Algebra di Boole

Algebra Booleana: Sistema algebrico

- Operazione:
  - una operazione α sull'insieme S = {s1,s2,...} è una funzione che da SxS (S cartesiano S) porta in S:
    - $\alpha : S \times S \rightarrow S$

  - Quindi, ad ogni coppia ordinata appartenente ad S x S corrisponde un elemento di S.

Algebra Booleana: Sistema algebrico

- Alcune considerazioni:
  - L'operazione * (di moltiplicazione) sull'intervallo [0,1] consente di ottenere un valore incluso in [0,1] a partire da elementi inclusi in [0,1].
  - La sottrazione sull'insieme dei naturali non è una operazione.
    - Es: 5-10 non appartiene ai naturali.

Sistema Algebrico:

- Combinazione di un insieme e di una o più operazioni.
  - esempio: ([0,1], *) è un sistema algebrico.

Algebra Booleana: introduzione (1)

- Algebra Booleana B:
- è un sistema algebrico identificato dalla quintupla (B,+,*,0,1) dove:
  - B è l'insieme su cui vengono definite le operazioni;
  - +,* sono le operazioni OR e AND (operazioni a due elementi);
  - 0, 1 sono elementi speciali di B
    - 0 è l'*elemento neutro* rispetto a +
    - 1 è l'*elemento neutro* rispetto a *
- Esempio:
- Algebra Booleana a due valori: ({0,1},+,*,0,1) dove + e * sono definiti come

+	0	1
0	0	1
1	1	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Algebra Booleana: introduzione (2)

- Le variabili dell'algebra booleana a due valori possono assumere solo i due valori 0 e 1
  - precisamente, se x indica una variabile, allora;
    - x = 0 se e solo se x ≠ 1
    - x = 1 se e solo se x ≠ 0
- Si considera inoltre una *operazione a un solo elemento* (*unary operation*) detta *complementazione* o *negazione* (NOT), definita come:

!	
0	1
1	0

➢ Nota: il simbolo associato al NOT è spesso indicato come ' (esempio x'), ! (esempio !x) o sopra segnando la variabile.

Algebra di Commutazione

- L'*Algebra di Commutazione* è un'algebra booleana a due elementi.
- Una *funzione di commutazione* a *n* variabili è una funzione del tipo: $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$

➢ *"Tra tutte le algebre booleane, l'algebra booleana a due valori........è la più utile. Essa è la base matematica della analisi e progetto di circuiti di commutazione che realizzano i sistemi digitali."*

[Lee, S.C., *Digital Circuit And Logic Design*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976]

Algebra di Commutazione: rappresentazione di una funzione

- Una funzione di commutazione a *n* variabili
  - $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
  - può essere rappresenta in modo comodo utilizzando una *tabella della funzione* o *tabella della verità*

- Una tabella della verità specifica la relazione che esiste tra ogni elemento del dominio di $f(\{0,1\}^n)$ e la corrispondente immagine (elemento del codominio).

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Algebra di Commutazione: definizioni (1)

- Letterale:
  - un letterale è una coppia (Variabile, Valore);
  - Per un'algebra di commutazione in cui il valore di x può essere solamente 0 o 1 si hanno due letterali associati alla variabile x, precisamente:
    - (x,1) è indicato come x , rappresenta la variabile x in forma naturale;
    - (x,0) rappresenta la variabile x in forma negata (complementata) ed è indicato come x' (oppure !x).
  - In modo equivalente, dato $a \in \{0,1\}$ un letterale è espresso come x^a dove:
    - per $a=1 \rightarrow x^a = x$; per $a=0 \rightarrow x^a = x'$.
  - Ad esempio:
    - il letterale z vale 1 ogni qual volta la variabile z vale 1;
    - il letterale z' vale 1 ogni qual volta che la variabile z vale 0.

Algebra di Commutazione: definizioni (2)

- Termine prodotto:
  - Un termine prodotto è il *prodotto logico* o *congiunzione* (AND) di più letterali.
  - Un termine prodotto in cui compaiono letterali corrispondenti a tutte le variabili della funzione e tale per cui la configurazione di valori delle variabili definite dai letterali genera un valore 1 della funzione stessa nella tabella delle verità, costituisce un *mintermine* della funzione (spesso si sottintende il segno *)
  - Ad esempio, a' b'c e ab'c rappresentano due mintermini della funzione specificata dalla tabella delle verità
  - Un termine prodotto in cui compaiono solo alcuni dei letterali e che corrisponda a un insieme di 1 della funzione è denominato *implicante*.
  - Ad esempio, a'c è un implicante della funzione data

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Algebra di Commutazione: definizioni (3)

- Termine somma (duale del termine prodotto):
  - Un termine somma è la *somma logica* o *disgiunzione* (OR) di più letterali.
  - Un termine somma in cui compaiono letterali corrispondenti a tutte le variabili della funzione e tale per cui la configurazione di valori complementati delle variabili definite dai letterali genera un valore 0 della funzione stessa nella tabella delle verità, costituisce un *maxtermine* della funzione
  - *Ad esempio*, $a + b + c$ e $a + b' + c$ rappresentano due maxtermini della funzione specificata dalla tabella delle verità
  - Un termine somma in cui compaiono solo alcuni dei letterali e che corrisponda a un insieme di 0 della funzione è denominato *implicato*.
  - Ad esempio, $a + c$ è un implicato della funzione data

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Algebra di Commutazione: proprietà (1)

1. Elemento neutro
   - $a + 1 = 1$ $\quad$ $a * 0 = 0$ (elemento nullo)
   - $a + 0 = a$ $\quad$ $a * 1 = a$ (identità)
2. Idempotenza
   - $a + a = a$ $\quad$ $a * a = a$
3. Inverso
   - $a + a' = 1$ $\quad$ $a * a' = 0$
4. Commutativa
   - $a + b = b + a$ $\quad$ $a * b = b * a$
5. Associativa
   - $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\quad$ $a * (b * c) = (a * b) * c$

Algebra di Commutazione: proprietà (2)

6. Distributiva
   - $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
   - $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$
7. Assorbimento
   - $a + (a * b) = a$ $\qquad a * (a + b) = a$
8. Leggi di De Morgan
   - $(a + b)' = a' * b'$ $\qquad (a * b)' = a' + b'$
9.
   - $a + (a' * b) = a + b$ $\qquad a * (a' + b) = a * b$
10. Consenso
   - $(a * b) + (a' * c) + (b * c) = (a * b) + (a' * c)$
   - $(a + b) * (a' + c) * (b + c) = (a + b) * (a' + c)$

Algebra di Commutazione: proprietà (3)

11. Principio di dualità
    - Ogni identità deducibile dai postulati dell'algebra di Boole è trasformata in un'altra identità se:
      - Ogni operazione + viene sostituita da un'operazione * e viceversa.
      - Ogni elemento identità 0 viene sostituito da un elemento identità 1 e viceversa.
    - Esempio: (assorbimento)
      - a + (a * b) = a
      - a * (a + b) = a

Algebra di Commutazione: proprietà (4)

- Il modo più semplice per dimostrare le proprietà è quello esaustivo (per tutti i possibili valori di tutte le variabili).
- Sono possibili altri tipi di dimostrazione:
  - Ad esempio, si voglia dimostrare:
    - $a + a'b = a + b$
  - Si sostituisce a con a*1
  - Dalla proprietà della negazione ($b + b' = 1$) applicata da destra verso sinistra si sostituisce $a1 + a'b$ con $a(b+b') + a'b$
  - Applicando la proprietà distributiva si ottiene $ab+ab'+a'b$
  - Applicando la proprietà di idempotenza da destra verso sinistra al termine ab si ottiene $ab+ab+ab'+a'b$
  - Applicando la proprietà distributiva da destra verso sinistra si ottiene $a(b+b') + b(a + a')$
  - Applicando la proprietà dell'inverso si ha $a*1 + b*1$
  - Applicando la proprietà dell'elemento neutro si ha infine $a*1 + b*1= a + b$

Algebra di Commutazione: funzioni

- Una *funzione booleana* di *n* variabili può essere espressa attraverso *una espressione booleana* di *n* variabili costituita da letterali, costanti, operatori AND, OR e NOT.
  - Esempio di espressione booleana: f(a,b,c) = ab+a'c'
- Le proprietà dell'algebra di commutazione possono essere utilizzate per manipolare una espressione booleana ed ottenerne una equivalente.
  - Due espressioni booleane sono equivalenti se e solo se sono riconducibili alla stessa funzione booleana.
- Esempio:
  - $f(a,b,c) = (a' * b')' * a \underbrace{=}_{\text{De Morgan}} (a + b) * a \underbrace{=}_{\text{Assorbimento}} a$

Algebra di Commutazione: espressioni e funzioni (1)

- Il numero di espressioni booleane di *n* variabili definite su una *algebra booleana* B è infinito.
  - La relazione tra espressioni booleane e funzioni booleane non è 1 a 1.
  - Data una tabella delle verità, da essa è possibile dedurre un numero anche molto alto di espressioni booleane tutte fra loro equivalenti.
- Esempio:

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\Rightarrow$

$f(a,b,c) = (a' * b')' * a$

$f(a,b,c) = (a + b) * a$

$f(a,b,c) = a$

$f(a,b,c) = \ldots$

Algebra di Commutazione: espressioni e funzioni (2)

- Data una funzione booleana (es. mediante tabella delle verità) il problema è identificare almeno una espressione booleana ad essa corrispondente.
- In molte applicazioni dell'algebra booleana si chiede di determinare una *buona rappresentazione* della funzione booleana, avendo preventivamente definito il concetto di buono ed un modo per valutarlo: *obiettivo* e *cifra di merito*.
  - Ad esempio: l'obiettivo è minimizzare il costo del circuito elettronico corrispondente a un'espressione, la cifra di merito usata è il numero di letterali presenti nell'espressione.
- Solitamente la buona rappresentazione algebrica viene ricavata manipolando una soluzione iniziale.

Algebra di Commutazione: espressioni e funzioni (3)

- Data una funzione booleana, la *soluzione iniziale* al problema di determinare una sua espressione ricorre alle *forme canoniche*.

- Le forme canoniche sono, rispettivamente, la forma *somma di prodotti* (SoP) e quella *prodotto di somme* (PoS).

- Data una funzione booleana esiste una ed una sola forma canonica SoP ed una ed una sola forma PoS che la rappresenta.

Algebra di Commutazione: Forme canoniche (1)

- Si consideri il seguente esempio:

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Si osservi che la funzione può essere ottenuta dal OR delle seguenti funzioni:

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

=

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

+

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$f(a,b) = a'b + ab$ $\quad f_1(a,b) = a'b$ $\quad f_2(a,b) = ab$

Algebra di Commutazione: Forme canoniche (2)

- Mettendo in OR i mintermini della funzione booleana si ottiene l'espressione booleana della funzione stessa espressa come somma di prodotti.
- Tale espressione è denominata *prima forma canonica*.
- Esempio:

a	b	c	f(a, b, c)	mintermine
0	0	0	0	
0	0	1	1	a' b' c
0	1	0	1	a' b c'
0	1	1	1	a' b c
1	0	0	1	a b' c'
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	a b c

$$f(a,b,c) = a'b'c + a'bc' + a'bc + ab'c' + abc$$

Algebra di Commutazione: Forme canoniche (3) qui

- Si consideri, nuovamente l'esempio:

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- La funzione può essere ottenuta dall'AND delle seguenti funzioni:

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

=

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

*

a	b	f(a, b)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$f(a,b) = (a'b')' * (ab')'$

$f_1(a,b) = (a'b')' = a + b$

$f_2(a,b) = (ab')' = a' + b$

Algebra di Commutazione: Forme canoniche (4)

- Applicando le leggi di De Morgan, si ottiene:
  - $f_1(a,b) = (a'b')'$ → $f_1(a,b) = (a + b)$
  - $f_2(a,b) = (ab')'$ → $f_2(a,b) = (a' + b)$

$$f(a,b) = (a + b) * (a' + b)$$

- Mettendo in AND in *maxtermini* della funzione si ottiene l'espressione booleana della funzione stessa espressa come prodotto di somme.
- Tale espressione booleana è denominata *seconda forma canonica*.

Algebra di Commutazione: Forme canoniche (5)

- Esempio :

a	b	c	f(a, b, c)	maxtermine
0	0	0	0	a + b + c
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	a' + b + c'
1	1	0	0	a' + b' + c
1	1	1	1	

$$f(a,b,c) = (a + b + c) * (a' + b + c') * (a' + b' + c)$$

Seconda Forma Canonica

Algebra Booleana: Espansione di Shannon (1)

- Formalmente, quanto esposto dal punto di vista intuitivo produce le forme canoniche come segue:

  - Prima Forma Canonica:
    $f = (x_1' \ldots x_n') * f(0,\ldots,0) + (x_1' \ldots x_n) * f(0,\ldots,1) + \ldots + (x_1 \ldots x_n) * f(1,\ldots,1)$

  dove:

$(x_1' \ldots x_n')$, $(x_1' \ldots x_n)$, …, $(x_1 \ldots x_n)$ sono i mintermini della funzione f

$f(0,\ldots,0)$, …, $f(1,\ldots,1)$ sono i valori che la funzione assume quando la configurazione delle variabili sia, rispettivamente, $(0,\ldots,0)$, …, $(1,\ldots,1)$

Algebra Booleana: Espansione di Shannon (2)

- Seconda Forma Canonica:

$$f = ((x_1'+\ldots+x_n') + f(1,\ldots,1)) * (x_1'+\ldots+x_n) + f(1,\ldots,0) * \ldots * (x_1+\ldots+x_n) + f(0,\ldots,0)$$

dove:

$(x_1'+\ldots+x_n')$, $(x_1'+\ldots+x_n)$, …, $(x_1+\ldots+x_n)$
sono i maxtermini della funzione f.

- Nota: $f(0,0,\ldots,0)$, $f(0,0,\ldots,1)$,…, $f(1,1,\ldots,1)$ sono noti con il nome di *discriminante della funzione f* e il loro valore appartiene a B cioè l'insieme (0,1)

Algebra Booleana: Espansione di Shannon (3)

- La descrizione formale deriva direttamente dall'applicazione iterativa del ***Teorema di Shannon***

Sia $f: B^n \rightarrow B$ una funzione booleana,

si ha $f = (x_1, x_{2,\dots,} x_n) = \mathbf{x_1' * f_{x1'} + x_1 * f_{x1}}$

per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in B^n.

Esempio: $f(a,b,c) = a' * f(0,b,c) + a * f(1,b,c)$

Dualmente:

Sia $f: B^n \rightarrow B$ una funzione booleana, si ha

$f = (x_1, x_{2,\dots,} x_n) = \mathbf{(x_1' + f_{x1}) * (x_1 + f_{x1'})}$

per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in B^n.

Esempio: $f(a,b,c) = (a' + f(1,b,c)) * (a + f(0,b,c))$

Algebra Booleana: Espansione di Shannon e Forme canoniche

Ad esempio:

$$f(a, b, c) = a'b'c' * f(0,0,0) + a'b'c * f(0,0,1) + a'bc' * f(0,1,0) + a'bc * f(0,1,1) + ab'c' * f(1,0,0) + ab'c * f(1,0,1) + abc' * f(1,1,0) + abc * f(1,1,1)$$

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Prima Forma Canonica

$a'b'c + a'bc + ab'c' + ab'c + abc$

$(a+b+c) * (a+b'+c) * (a'+b'+c)$

Seconda Forma Canonica

Algebra Booleana: Espansione di Shannon (4)

Osservazione: il teorema di espansione di Shannon può essere utilizzato anche su espressioni booleane.

Esempio:

espandendo rispetto ad a l'espressione booleana

$$f(a,b,c) = ab + b' + a'bc'$$

si ha la forma la forma equivalente:

$$f(a,b,c) = a' * (b' + bc') + a * (b + b') =$$

$$= a'b' + a'bc' + ab + ab' =$$

$$= a'b' + a'bc' + a$$

Algebra Booleana: Manipolazione delle espressioni (1)

- Data un'espressione di una funzione booleana, le proprietà dell'algebra di commutazione permettono di manipolarla in modo da ottenere un'espressione equivalente, ma in forma diversa
  - eventualmente con caratteristiche meglio rispondenti a particolari requisiti.
- Esempio:
  - sia data la forma canonica
    - $f(x,y,z) = x'yz' + xyz' + xyz$
  - e sia data la funzione di costo costituita dal *numero di letterali presenti* – che in questo caso vale 9.
  - Obiettivo: manipolare la funzione al fine di ridurre il costo.

Algebra Booleana: Manipolazione delle espressioni (2)

- Partendo da:

$$f(x,y,z) = x'yz' + xyz' + xyz$$

1. applicando la *proprietà distributiva* e quella della *complementazione*:

$$f(x,y,z) = (x' + x)\, yz' + xyz = 1yz' + xyz = yz' + xyz$$

2. applicando nuovamente la *proprietà distributiva*:
   - $f(x,y,z) = y\,(z' + xz)$
3. ricordando che $a + a'b = a + b$, si ottiene:
   - $f(x,y,z) = y\,(z' + x) = yz' + xy$

Algebra Booleana: Manipolazione delle espressioni (3)

- Allo stesso risultato si sarebbe giunti anche partendo da:
  - $f(x,y,z) = x'yz' + xyz' + xyz$
  1. applicando la *proprietà dell'idempotenza*:
     - $f(x,y,z) = x'yz' + xyz' + xyz' + xyz$
  2. applicando la *proprietà distributiva*:
     - $f(x,y,z) = yz'(x' + x) + xy(z' + z)$
  3. da cui infine, applicando la *proprietà dell'inverso*:
     - $f(x,y,z) = yz' + xy$
- Si osservi che rispetto alla forma di partenza l'espressione logica ottenuta è di costo inferiore: *4 letterali*.

Algebra Booleana: Manipolazione delle espressioni (4)

- L'applicazione delle trasformazioni algebriche **non** permette di identificare una *procedura sistematica*
- Conseguenze:
  - **Non è possibile identificare un algoritmo**
    - Non si possono realizzare strumenti CAD che consentano di ottenere una soluzione ottima a due livelli utilizzando le proprietà dell'algebra
  - **Non è possibile sapere se l'espressione ottenuta è quella minima**
    - La bontà del risultato dipende molto dalla scelta delle proprietà da applicare e dall'ordine in cui sono applicate.

- In pratica, non è questa la via che si sceglie per ottenere una forma ottima!