Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo di Karnaugh

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Introduzione (1)

- Le reti combinatorie mostrano in ogni istante un comportamento che dipende solo dalla configurazione di valori degli ingressi, *combinazione di ingresso*, applicata nello stesso istante;

- Il loro comportamento è quindi rappresentabile in modo completo deducendo dalla descrizione in linguaggio naturale (la *specifica*) la tabella delle verità che fornisce per ogni combinazione di ingresso il valore della/e uscita/e.

- La *sintesi di una rete combinatoria* si riconduce quindi alla *sintesi di una funzione di commutazione* a una o più uscite.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Introduzione (2)

- Una soluzione immediata (*poco costosa in termini di fatica di progettazione*) consiste nel generare immediatamente le forme canoniche a partire dalla tabella delle verità.

- Di norma però si chiede qualche forma di ottimizzazione, al fine di ridurre:
  - il costo, che in un circuito integrato si riconduce all'area di silicio occupata, e/o
  - il ritardo di propagazione, cioè il tempo che intercorre fra l'istante in cui si modifica la combinazione di ingresso e quello in cui si legge alle uscite la corrispondente variazione
    (in un circuito reale, il ritardo introdotto da una porta logica non è nullo – la risposta non è istantanea).

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Introduzione (3)

- Verrà affrontato inizialmente il problema della sintesi di reti combinatorie a una sola uscita.
- Per queste si vedrà la sintesi a due soli livelli
  - cioè tale per cui partendo da qualunque ingresso, sul percorso per giungere all'uscita si incontrano al più due porte logiche (un AND e un OR – i NOT non vengono tenuti in conto nel computo del numero di livelli).

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Obiettivo

- Ridurre la complessità di una (o più) funzione(i) booleana(e) espressa(e) in forma di Prodotto di Somme (PoS) o di Somma di Prodotti (SoP).
- Si considerano le forme canoniche come soluzioni iniziali.
  - Ci si riferirà alla sola forma Somma di Prodotti o SoP;
  - La PoS ne è la duale pertanto valgono gli stessi principi.
- Nella sintesi a due livelli gli obiettivi sono due:
  - Riduzione del numero dei termini prodotto (principale);
  - Riduzione del numero di letterali (secondario).
  - Esempio: f(a,b,c)=a'b'c'+a'bc'+a'b'c equivale a f(a,b,c)=a'b'+a'c'
- Metodologie di sintesi ottima:
  - Esatte: *Karnaugh* e Quine - Mc Cluskey (che non vedremo).;
  - Euristiche per sintesi a due livelli (non le vedremo).

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh (1)

Si propone di identificare forme minime a due livelli applicando la regola di riduzione

$$a Z + a' Z = (a+a') Z = Z$$

con Z termine prodotto di n-1 variabili.

- Esempio:

$$abcd' + ab'cd' = acd'(b'+b) = acd'$$

La riduzione può essere applicata *iterativamente*.

Esempio:

$$abc'd' + abc'd + abcd' + abcd = abc'(d' + d) + abc(d' + d) = abc' + abc = ab(c' + c) = ab$$

Nota: si osservi che l'applicazione della relazione identificata è applicata ad un numero di termini pari a 2^n quindi 2, 4, 8, ...

Osservazione: la regola identificata mantiene inalterato il numero dei livelli, cioè somme di prodotti rimangono tali.

Al più, tali espressioni possono banalizzarsi in semplici prodotti o costanti.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh (2)

- La formula di riduzione potrebbe essere facilmente applicata direttamente alle espressioni Booleane.
- Il problema consiste nell'identificare:
  1. sia tutti i termini su cui applicare la riduzione;
     - Non è sempre immediato identificare tutti termini su cui applicare la regola di riduzione identificata.
  2. sia i tutti termini che partecipano a più riduzioni contemporaneamente e replicarli (vedi esempio).
     - Nota: si ricordi che, per le proprietà dell'algebra di Boole, la relazione x+x=x può essere applicata anche come x=x+x.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh (3)

➢ Esempio di replicazione dei termini:

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

SoP: $f(a,b) = a'b + ab + ab'$

$f(a,b) = (a'+a)b + ab' = b + ab'$

$f(a,b) = a'b + a(b + b') = a'b + a$

- Nessuna delle due espressioni è ulteriormente riducibile
- E' evidente, comunque, che la soluzione minima sia a+b (Algebra di Commutazione: proprietà 9)

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh (4)

Esempio di replicazione dei termini:

SOP: $f(a,b) = a'b + ab + ab'$

$\Downarrow$

$= a'b + ab + ab + ab'$

$\Downarrow$

$= (a' + a)b + a(b + b') = a + b$

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh (5)

- Si passa a una rappresentazione *grafica*, detta delle *mappe di Karnaugh*, che consente di risolvere direttamente i problemi identificati:
  - sia dovuti alla replicazione dei termini;
  - sia legati all'identificazione dei termini da raggruppare.

- Applicazione del metodo delle mappe di Karnaugh:
  - Semplice per un numero di variabili fino a 4;
  - Moderatamente complesso per 5-6 variabili;
  - Praticamente inattuabile per un numero di variabili superiori a 6.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh (6)

- Una mappa di Karnaugh è uno schema deducibile dalla rappresentazione geometrica delle configurazioni binarie.

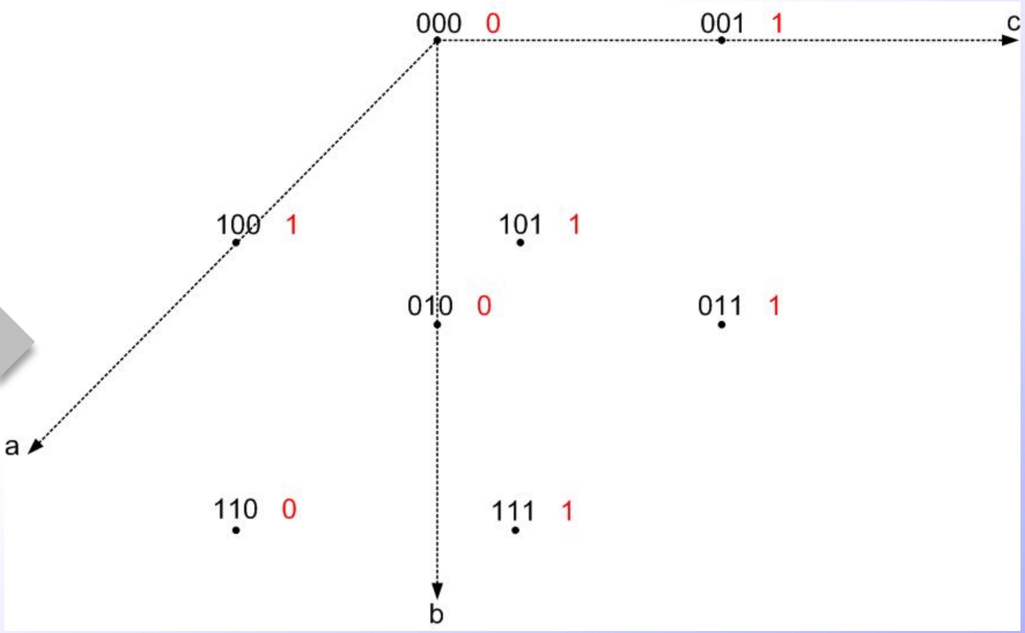
- Si definisce Distanza di Hamming fra due configurazioni binarie il numero di bit che cambiano valore nel passare da una configurazione binaria all'altra.
  - Esempio: la distanza di Hamming tra le configurazioni 01001 e 10101 è 3 poiché cambiano 3 bit.

- L'applicazione della regola di riduzione consiste nell'identificare le configurazioni binarie associate ai termini prodotto che sono a *distanza di Hamming unitaria.*
  - Esempio: i termini prodotto abcd' e ab'cd' corrispondono a 1110 e 1010 e sono a distanza di Hamming pari ad 1.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh (7)

- Come una funzione di commutazione a n variabili, $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ può essere rappresenta utilizzando una *tabella della funzione* o *tabella della verità*.
- La stessa funzione a n variabili può essere associata ad una rappresentazione cartesiana in uno spazio a n dimensioni.
- Esempio: (spazio tridimensionale)

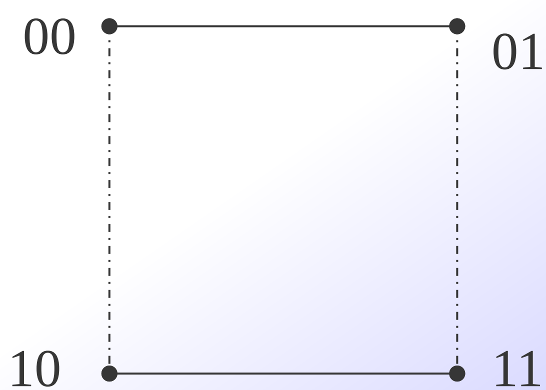
a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



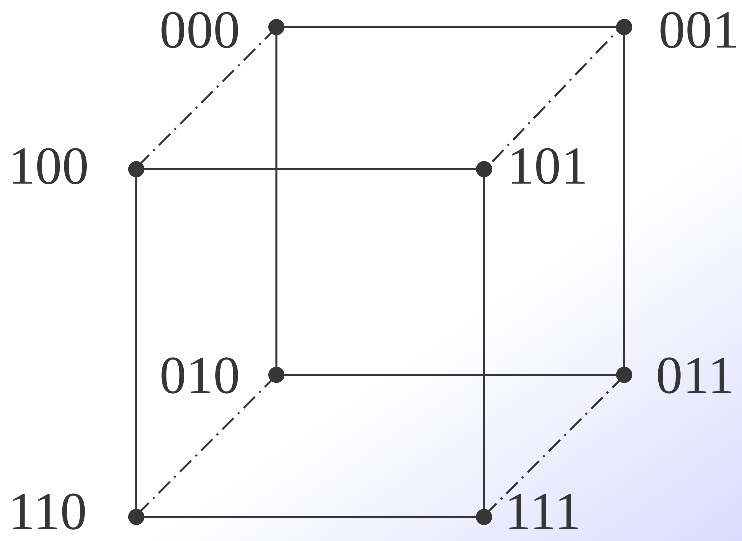
Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Nella rappresentazione cartesiana di una funzione in uno spazio a n dimensioni, collegando i vertici le cui configurazioni sono a distanza di Hamming unitaria si ottiene un n-cubo.
- Spazio a 1 dimensione (1 variabile)
  - E' una linea, e l'1-cubo è un segmento: i due vertici sono associati alle configurazioni 0 e 1

- Spazio a 2 dimensioni (2 variabili):
  - E' il piano, il 2-cubo è un quadrato che si ottiene dall'1-cubo per proiezione. Si premette 0 alle configurazioni dei vertici originali, 1 a quelle dei vertici proiettati

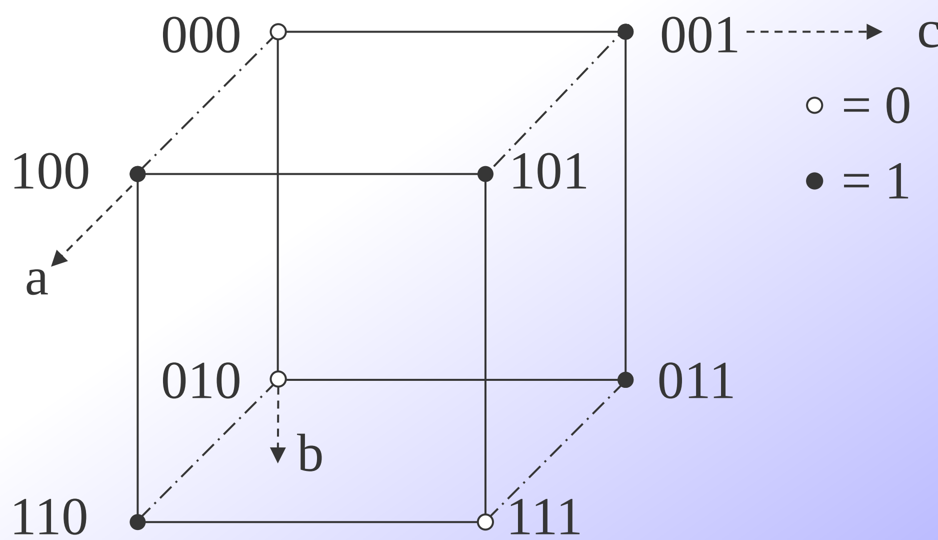


- Spazio a 3 dimensioni (3 variabili):
  - il 3-cubo è un solido, che si ottiene dal 2-cubo *per proiezione*, premettendo 0 alle configurazioni dei vertici originali, 1 a quelle dei vertici proiettati



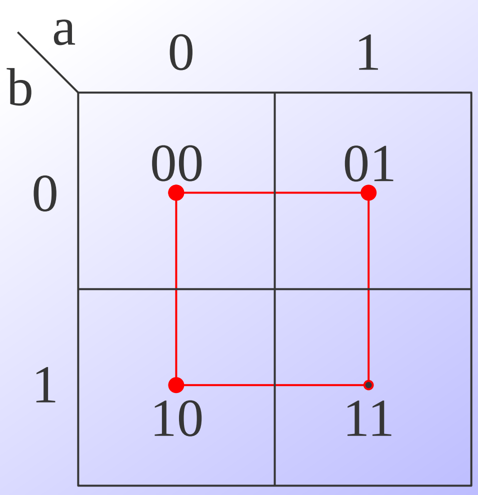
Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Si può pensare di *trasporre* una tabella delle verità a n variabili su un n-cubo, marcando opportunamente i nodi associati a 0 e 1.
  - Due configurazioni sono a distanza unitaria (adiacenti) se e solo se i vertici associati sono collegati da un lato.
- Esempio: $f(a,b,c) = ON_{set}(1,3,4,5,6)$
  - ON_{set} = insieme di 1
  - sella funzione



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Di fatto, la rappresentazione in uno spazio a n dimensioni non è maneggevole
- Già per sole tre dimensioni non è di semplice utilizzo.
- Quindi, si passa allo *sviluppo nel piano dei cubi.*
- Al cubo sviluppato nel piano, che ha 2^n vertici, si sovrappone una griglia (mappa) con 2^n caselle organizzate secondo righe e colonne
- Esempio: per il 2-cubo si ha una mappa di 4 caselle su due righe e due colonne, e ad ogni colonna si associa una delle variabili come coordinata



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

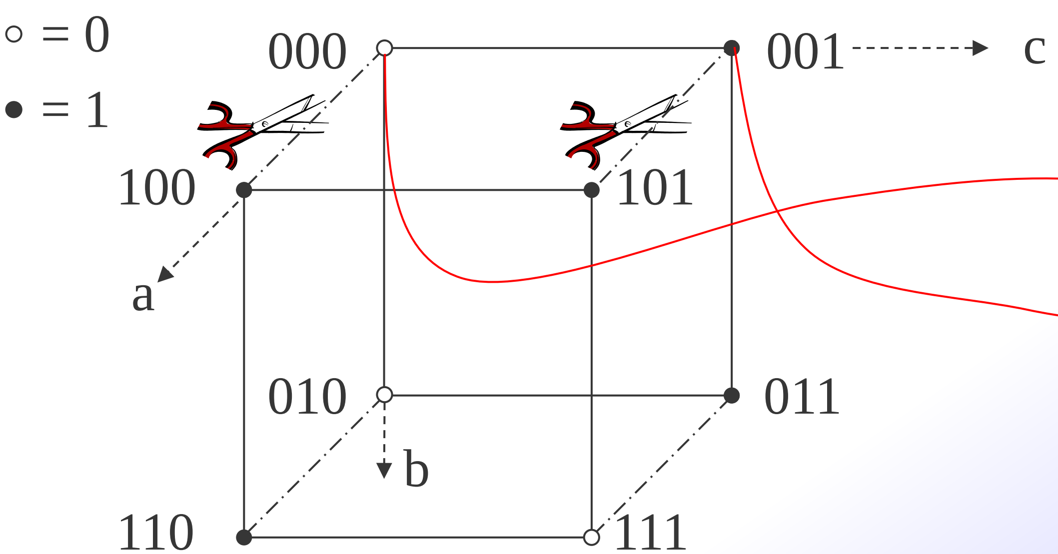
- Una mappa così realizzata costituisce una *mappa di Karnaugh*:
  - Le configurazioni assunte dalla variabili di ingresso danno origine agli indici di riga e colonna della mappa.
  - In ogni casella si trascrive il valore assunto dalla funzione quando la configurazione delle variabili corrisponde a quella delle coordinate che contrassegnano le caselle.
  - In una mappa di Karnaugh, due caselle che condividono un lato di un n-cubo corrispondono a due configurazioni di variabili adiacenti (distanza di Hamming pari ad 1).
  - Esempio: $f(a,b) = ON_{set}(1,2)$

a	b	f(a, b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	0

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- Lo sviluppo nel piano di un 3-cubo implica il **taglio** del cubo.
- Il taglio deve mantenere intatta, concettualmente, la *adiacenza fra vertici*.
  - Si presti molta attenzione all'*ordinamento delle coordinate.*
  - L'ordinamento delle coordinate mantiene le distanze di Hamming e *non* coincide con la numerazione consecutiva.



adiacenti

c \ a, b	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	1

adiacenti

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Caratteristiche delle mappe: riassunto
  - Indici di riga e colonna: configurazioni adiacenti
  - Cambia un solo bit nel passaggio da una configurazione ad un'altra

a	b	c	d	f(a, b, c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Il contenuto delle matrice è dato dal valore assunto dalla funzione f(a,b,c,d).
Le colonne e le righe identificate da 00 e 10 sono adiacenti

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Si ricorda che un *implicante* è un termine prodotto in cui compaiono solo alcuni dei letterali.
- Su una mappa di Karnaugh a *n variabili*, un implicante costituito dal prodotto di *(n-k)* variabili corrisponde al raggruppamento di 2^k "1" adiacenti, cioè tali che ogni casella del raggruppamento condivida un lato con altre *k* celle dello stesso raggruppamento.
- Vediamo un esempio…

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

Esempio:

Raggruppamento 1

Raggruppamento 2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

Si trovano solo raggruppamenti costituiti da 2 "1" adiacenti, in cui le due caselle condividono un lato.

$$f(a,b,c,d)=a'b'c'd'+a'b'cd'+a'bc'd'+ab'c'd+ab'cd+ab'cd'$$

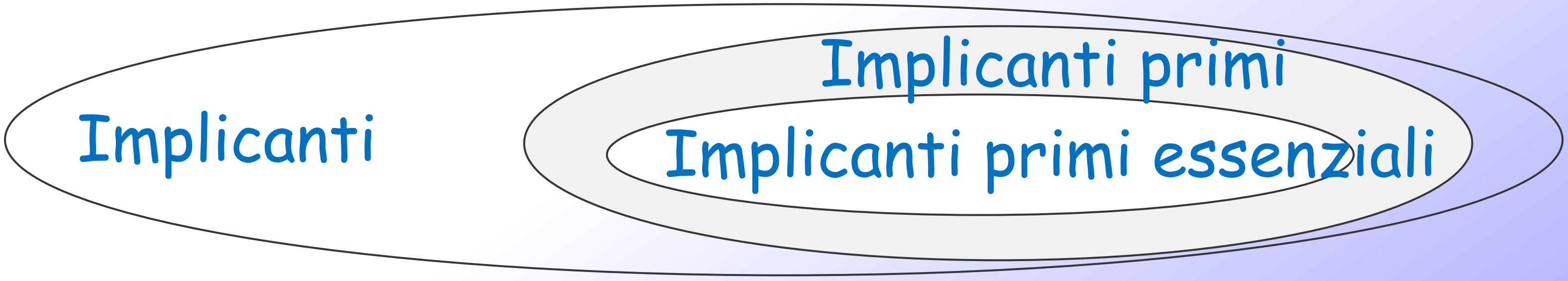
Raggruppamento 1

Raggruppamento 2

$$f(a,b,c,d)=\underbrace{a'c'd'}_{\text{Implicante 1}}+\underbrace{a'b'd'}_{\text{Implicante 2}}+b'cd'+ab'd+ab'c$$

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Metodo:
  1. Individuare gli implicanti primi e primi essenziali
     - **Implicante primo:** Termine prodotto associato ad un *raggruppamento* di dimensione massima.
       - L'eliminazione di una qualsiasi letterale dal prodotto, genera un prodotto tale che la nuova funzione q *non implica* f.
     - **Implicante primo essenziale:** Implicante primo che copre uno o più 1 non coperti da nessun altro implicante primo.
  2. Copertura:
     - Scelta del minor numero di implicanti primi e primi essenziali



Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- Scopo:
  - identificare una forma SoP che includa **il numero minimo di implicanti** e, a parità di numero di prodotti, **gli implicanti col minimo numero di letterali** (definita come forma minima) garantendo la **copertura di tutti gli 1 della funzione.**
- Teorema:
  - Esiste sicuramente una forma minima costituita *da soli* ***implicanti primi***
  - .
  - Sulla mappa di Karnaugh si identificano tutti gli implicanti primi.
    - **Nota: la somma di *tutti gli implicanti primi è spesso ridondante*.**
  - Implicanti primi essenziali devono essere inclusi nella forma minima.
- Una forma minima costituita da soli *implicanti primi essenziali* è *unica.*
  - La condizione è solo sufficiente.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- Esempio di raggruppamenti

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

Raggruppamento di dimensione massima

Raggruppamento

Raggruppamento scorrett

Sono consentiti solo Raggruppamenti di 2, 4, 8, 2^k caselle

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- Ad ogni raccoglimento è associato un termine prodotto.
- Il termine prodotto (implicante) è ottenuto:
  - identificando le variabili che non cambiano mai di valore e riportando ogni variabile in modo *naturale* (esempio: a) se il valore che essa assume è 1 o in modo *complementato* (esempio: a') se il valore assunto è 0
- Osservazione:
  - un numero di 1 raccolti pari a 2^n produce un implicante di N-n letterali dove N è il numero delle variabili della funzione.
  - Esempio: per una funzione di quattro variabili, f(a,b,c,d), un implicante che raccoglie quattro 1 è associato ad un termine prodotto di 2 variabili.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Esempio: identificazione del termine prodotto

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

d cambia valore

b cambia valore

- b e d cambiano valore: non compaiono nel termine prodotto.
- a e c compaiono come 0 quindi a' e c' .
- Il termine prodotto per questo raggruppamento è a'c'.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- Copertura:
  - sotto insieme degli implicanti identificati tale per cui nessun 1 della funzione rimane ***scoperto***.
  - Poiché ogni implicante scelto aumenta il costo della realizzazione della funzione, il numero di implicanti da scegliere deve essere il minore possibile.
  - L'obiettivo è la riduzione del costo; questo si traduce nella identificazione della **copertura di *minima cardinalità***:
    - sotto insieme degli implicanti primi e primi essenziali identificati che realizza una copertura della funzione che è di cardinalità minima.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Copertura (cont.):
  - Scelta degli implicanti per realizzare la copertura:

1. Si scelgono tutti gli implicanti primi essenziali.
   - Gli implicanti primi essenziali devono essere parte della copertura poiché "sono essenziali" e, quindi, non è possibile fare a meno di loro.
2. Si eliminano tutti gli implicanti primi che sono coperti da quelli essenziali (eliminazione implicanti **completamente ridondanti**)
   - gli implicanti eliminati, detti *completamente ridondanti*, coprono degli 1 che sono già ricoperti da quelli essenziali e, quindi, non servono ed aumentano il costo.
3. Si seleziona il numero minore degli implicanti primi che sono rimasti.
   - gli implicanti residui sono detti ***parzialmente ridondanti***.

- Osservazione: la scelta viene fatta seguendo un criterio basato sulla pura osservazione della tabella.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- **Esempio 1:**
  - $f(a,b,c,d) = \Sigma(0,1,2,4,5,9,10,11,13,15)$

a	b	c	d	f(a, b, c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Implicanti primi essenziali

$a'c'$; ad

Implicanti primi completamente ridondanti

$c'd$

Implicanti primi

$a'b'd'$; $b'cd'$; $ab'c$

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- Esempio 1 (cont.)
  - Copertura dei rimanenti termini, dopo la selezione degli implicanti primi essenziali (a'c' e ad).

Implicanti primi parzialmente ridondanti

a'b'd'; ab'c

Implicanti primi

b'cd'

c,d \ a,b	00	01	11	10
00			0	0
01				
11	0	0		
10	1	0	0	1

Forma minima (unica) → f(a,b,c,d)= a'c' + ad + b'cd'

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- **Esempio 2:**
  - ➢ $f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,4,5,10,11,13,15)$

a	b	c	d	f(a, b, c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Implicanti primi essenziali

Nessuno

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Implicanti primi Parzialmente ridondanti

a'c'd'; bc'd; acd; b'cd'

a'b'c; a'bc'; abd; ab'c

Forma minima ➔ $f(a,b,c,d) = a'c'd' + bc'd + acd + b'cd'$

Forma minima ➔ $f(a,b,c,d) = a'b'd' + a'bc' + abd + ab'c$

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

- Condizioni di Indifferenza (*don't care*)
- La specifica di un progetto (la descrizione di quello che si vuole progettare) contiene, spesso, delle *condizioni di indifferenza* (denominate anche *don't care* o *DC*).
- Le *condizioni di indifferenza* corrispondono a configurazioni di ingresso per le quali il valore dell'uscita non è noto e non è neppure di interesse sapere quanto può valere.
- Questo accade quando:

  Le configurazioni di ingresso non si presentano mai, e/o

  Le configurazioni di ingresso impediscono all'uscita della rete - in fase di progetto - di essere osservata.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Le configurazioni di ingresso per le quali il valore dell'uscita è non specificato vengono definite *condizioni di indifferenza* e costituiscono il DC_{set} della funzione stessa.
- Sulla tabella delle verità (o in una mappa di Karnaugh) il valore non specificato della funzione si indica il simbolo "-" (o anche "x").
- Le condizioni di indifferenza sono gradi di libertà nel processo di sintesi.
  - In fase di sintesi, ai valori non specificati si può assegnare indifferentemente il valore 0 oppure 1 a seconda di quanto conviene per minimizzare la funzione.
  - Una condizione di indifferenza **non deve** necessariamente essere coperta da un implicante (forma SoP), ma **può** esserlo se questo conviene cioè se consente di:
    1. o di ridurre il numero degli implicanti;
    2. o di ridurre il numero dei letterali degli implicanti esistenti.

[illegible]ntesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

➢ Importante[illegible]

1. Gli implicant[illegible]imi realizzati solamente mediante condizioni di indiffere[illegible]non hanno alcuno scopo (non servono).
2. Un implicant[illegible]rimo non diventa essenziale perché è l'unico a coprire una [illegible]a condizione di indifferenza.

a c

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	-	-	0	0
01	-	-	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

Implicanti primi essenziali

Implicanti primi

NON Implicanti primi

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	-	0	0
01	-	-	-	-
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

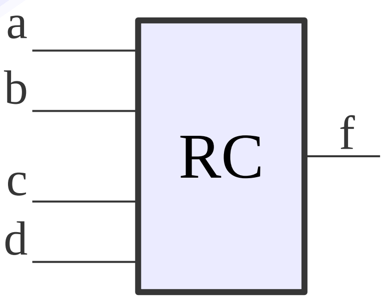
Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

- Esempio 1
- Si voglia sintetizzare una funzione con quattro ingressi *a,b,c,d* e un'uscita *f*. Gli ingressi rappresentano cifre decimali codificate in codice BCD (*Binary-coded decimal*);
  - Ogni cifra di un numero è rappresentata da un codice binario di 4 bit, il cui valore è compreso tra 0 (0000) e 9 (1001).
- l'uscita deve valere 1 se e solo se la cifra in ingresso è minore o uguale a 3 oppure maggiore o uguale a 8.

- Dalla specifica (codifica BCD) risulta che, delle 16 possibili configurazioni degli ingressi solo 10 potranno effettivamente presentarsi.
- In corrispondenza delle configurazioni di valori impossibili, non interessa il valore che la funzione può assumere
  - In questi casi, il valore dell'uscita è non specificato.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

Esempio 1 (cont.)



BCD	a	b	c	d	f(a, b, c,d)
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
-	1	0	1	0	-
-	1	0	1	1	-
-	1	1	0	0	-
-	1	1	0	1	-
-	1	1	1	0	-
-	1	1	1	1	-

a,b \ c,d	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	-	-	-	-
10	1	1	-	-

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

Esempio 1 (cont.)

- Ignorando la presenza dei gradi di libertà introdotti dalle condizioni di indifferenza, l'utilizzo dei soli 1 porterebbe a identificare due implicanti essenziali.

a,b \ c,d	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	-	-	-	-
10	1	1	-	-

$$f(a,b,c,d) = a'b' + c'b'$$

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

➢ Esempio 1 (cont.)

- Servendosi delle condizioni di indifferenza si migliora il risultato riducendo il costo della realizzazione.
  - assegnando valore 1 in corrispondenza di 1010 e 1011 e valore 0 in corrispondenza delle altre configurazioni.

a,b \ c,d	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	-	-	-	-
10	1	1	-	-

$$f(a,b,c,d) = b'$$

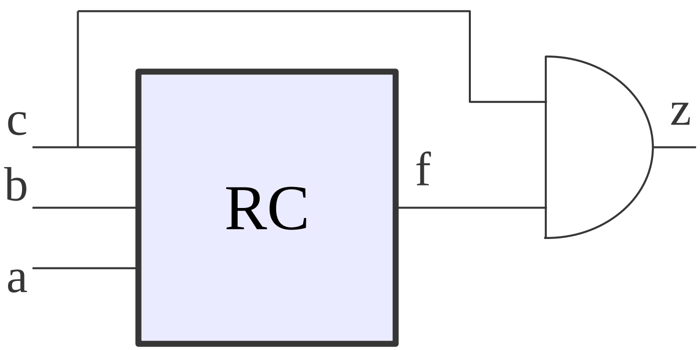
Esempio 2

Si voglia sintetizzare la rete RC di figura soggetta ai seguenti vincoli di progetto:

- il valore assunto da a è sempre uguale a quello di b.
- Quando a=b=0, e quando [a=b=1 e c=0] il valore di f è 1 mentre, in tutti gli altri casi, f vale 0.

Problema: Qual è la funzione associata alla rete combinatoria RC (f(a,b,c))?

Se non facessimo alcuna considerazione né sul fatto che **a** deve essere uguale a **b** né sul contesto in cui è inserito il circuito si avrebbe:



a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

c \ a, b	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	0	0

f(a,b,c,d)= a'b' + abc'

Esempio 2 (cont.)

Considerando il solo vincolo sugli ingressi, espresso da "*A è sempre uguale a B*", si avrebbe:

	a	b	c	f(a, b, c)
	0	0	0	1
	0	0	1	1
a diverso da **b**	0	1	0	-
a diverso da **b**	0	1	1	-
a diverso da **b**	1	0	0	-
a diverso da **b**	1	0	1	-
	1	1	0	1
	1	1	1	0

c \ a, b	00	01	11	10
0	1	-	1	-
1	1	-	0	-

$$f(a,b,c) = a' + c'$$

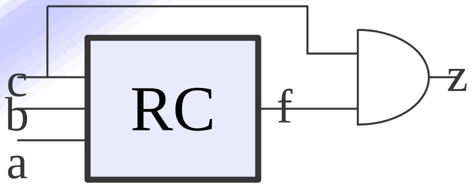
oppure

$$f(a,b,c) = b' + c'$$

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti - Karnaugh

Esempio 2 (cont.)

Considerando i vincoli imposti sia sugli ingressi sia sulle uscite:



	a	b	c	f(a, b, c)	
	0	0	0	-	**z** indipendente da **f**
	0	0	1	1	
a diverso da **b**	0	1	0	-	**z** indipendente da **f**
a diverso da **b**	0	1	1	-	
a diverso da **b**	1	0	0	-	**z** indipendente da **f**
a diverso da **b**	1	0	1	-	
	1	1	0	-	**z** indipendente da **f**
	1	1	1	0	

Il simbolo "–" indica che il valore assunto dall'uscita non ha alcuna importanza poiché:

a) La configurazione degli ingressi ad esso relativa non viene mai generata

b) L'uscita corrispondente alla configurazione degli ingressi non viene mai osservata

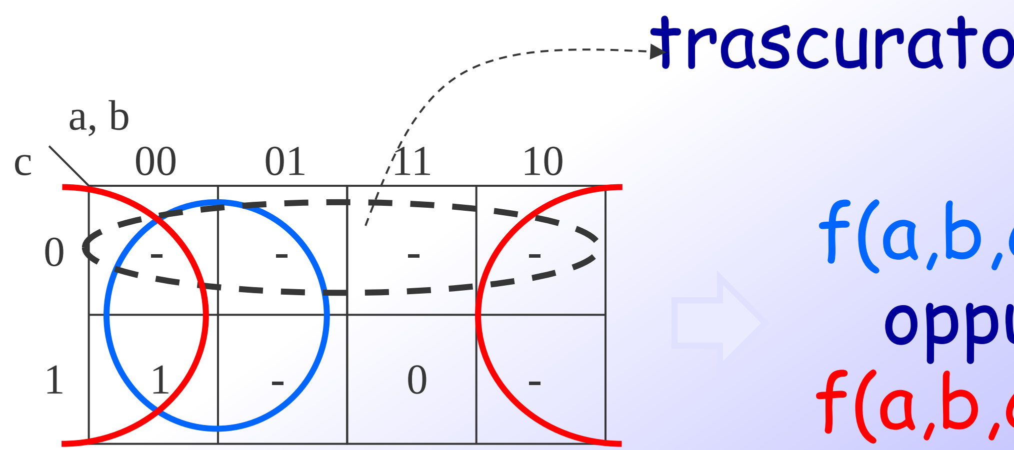
Sintesi di reti combinatorie a due livelli: Metodi esatti – Karnaugh

Rispetto al caso senza condizioni di indifferenza si hanno seguenti variazioni:

- Individuare gli implicanti primi e primi essenziali considerando le condizioni di indifferenza come se fossero 1;
  - Nota: Si ricordi che gli implicanti primi realizzati solamente mediante condizioni di indifferenza non hanno alcun valore.
- Coprire solo l'ONset della funzione con gli implicanti identificati.

Infatti, i soli termini significativi sono gli 1 della funzione. Questi termini sono gli unici elementi di rilievo (vincoli).

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	-
0	0	1	1
0	1	0	-
0	1	1	-
1	0	0	-
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	0



$f(a,b,c) = a'$

oppure

$f(a,b,c) = b'$