Architettura degli Elaboratori A.A. 2018/2019

Rappresentazioni di Numeri Interi e Conversioni

Esercizi Svolti

Dott. Mirko Staderini – mirko.staderini@unifi.it
DiMaI – Università degli Studi di Firenze
Viale Morgagni, 65 – 50134 Firenze

Esercizio 1

Data la stringa binaria B=10100000 (n=8 bit) interpretarla come un numero intero codificato in:

a) Binario puro
b) Modulo e segno
c) Complemento a 2
d) Complemento a 1
e) Forma polarizzata

Soluzione

a) Binario puro

$$B = 2^5 + 2^7 = 32 + 128 = 160_{10}$$

b) Modulo e segno
Segno: 1 -> Negativo

$$B = -(0100000) = -(2^5) = -32_{10}$$

c) Complemento a 2
Segno: 1 -> Negativo

$$|B| = 2^8 - (2^5 + 2^7) = 256 - (32 + 128) = 256 - 160 = 96_{10}$$
$$B = -96_{10}$$

Oppure
(sottrazione eseguita in binario):

$(2^8)_2 = 100000000_2$

```
 100000000 -
  10100000 =
-------------
  01100000
```

Ricordando che in binario: $0 - 0 = 0$ $1 - 0 = 1$ $1 - 1 = 0$ $0 - 1 = 1$ dopo aver preso in prestito un 1 dalla colonna a sinistra N.B. ogni 1 prestato vale 2 unità di ordine inferiore

$$-(01100000)_{10} = -(2^5 + 2^6) = -(32 + 64) = -96_{10}$$

Oppure
(si complementano tutti i bit e si aggiunge 1):

$$B' = (01011111 + 1)_2$$
$$B = -(01100000) = -(2^5 + 2^6) = -(32 + 64) = -96_{10}$$

Ricordando che in binario

$$0 + 0 = 0$$
$$1 + 0 = 1$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 \ = 0 \ con \ riporto \ di \ 1 \ alla \ colonna \ a \ sinistra$$

d) Complemento a 1
Segno: 1 -> Negativo

$$|B| = (2^8 - 1) - (2^5 + 2^7) = 255 - (32 + 128) = 255 - 160 = 95_{10}$$
$$B_{10} = -95_{10}$$

Oppure
(sottrazione eseguita in binario):

$$(2^8 - 1)_{10} = 11111111_2$$

```
 11111111 -
 10100000 =
------------
 01011111
```

$$-(01011111)_{10} = -(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6) = -(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 64) = -95_{10}$$

Oppure
(si complementano tutti i bit):

$$B' = 01011111_2$$
$$B = -(01011111)_2 = -(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6) = -(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 64) = -95_{10}$$

e) Forma polarizzata

$$BIAS = 2^{n-1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$$

$$B = 160 - BIAS = 160 - 127 = 33_{10}$$

Esercizio 2

Si considerino le seguenti codifiche binarie, su 8 bit:

a) Binario puro
b) Modulo e segno
c) Complemento a uno
d) Complemento a due
e) Forma polarizzata

Per ciascuna codifica determinare il valore massimo e il valore minimo rappresentabili, espresso in decimale, e le corrispondenti stringhe binarie che li codificano.

Soluzione

		Valore Minimo	Valore Massimo
Binario puro	*codifica*	00000000	11111111
	valore in decimale	0	255
Modulo e segno	*codifica*	11111111	01111111
	valore in decimale	-127	127
Complemento a uno	*codifica*	10000000	01111111
	valore in decimale	-127	127
Complemento a due	*codifica*	10000000	01111111
	valore in decimale	-128	127
Forma polarizzata	*codifica*	00000000	11111111
	valore in decimale	-127	128

a) Binario puro
   - Minimo: $(00000000)_2 = 0$
   - Massimo: $(11111111)_2 = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6)_2 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = +255$

b) Modulo e segno
   - Minimo: $(11111111)_{2,MS} = -(1111111)_2 = -(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) = -(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = -127$
   - Massimo: $(01111111)_{2,MS} = +(1111111)_2 = +127$

c) Complemento a uno
   - Minimo: $(10000000)_{2,C1} = -(01111111)_2 = -(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) = -(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = -127$
   - Massimo: $(01111111)_{2,C1} = +(01111111)_2 = +127$

d) Complemento a due
   - Minimo: $(10000000)_{2,C2} = -(01111111 + 1) = -(10000000)_2 = -(2^7) = -128$
   - Massimo: $(01111111)_{2,C2} = +(01111111)_2 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = +127$

e) Forma polarizzata
   $BIAS = 2^{8-1} - 1 = 127$

   - Minimo: $(00000000)_{2,POL} = 0 - BIAS = -127$
   - Massimo: $(11111111)_{2,POL} = (2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) - BIAS = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) - 127 = 255 - 127 = +128$

Esercizio 3

Dati i seguenti numeri espressi in decimale:

- A = 33
- B = -12

Determinare le loro rappresentazioni (utilizzando 8 bit) in:

a) Complemento a due
b) Modulo e segno
c) Complemento a uno
d) Forma polarizzata

Soluzione

a) Complemento a due

N	N mod 2
33	1
16	0
8	0
4	0
2	0
1	1
0	

N	N mod 2
12	0
6	0
3	1
1	1
0	

A è positivo, quindi la sua codifica in complemento a due è uguale al binario puro: $A_{2,C2(8)} = 00100001$

B è negativo, quindi $B_{2,C2(8)} = 2^8 - B_2$

```
 100000000 -
      1100 =
-------------
  11110100
```

$$B_{2,C2(8)} = 11110100$$

Verifichiamo il risultato eseguendo la somma in complemento a due. Il risultato, una volta decodificato deve essere uguale a A+B=21

Dovendo fare X + Y in complemento a 2, sappiamo che :

1) X > 0, Y > 0 =>$X_{2,C2}$ + $Y_{2,C2} = (X+Y)_{2,C2}$
2) X > 0, Y < 0 => Si esprime Y in complemento a 2 e si esegue la somma X - $|Y| = (X - |Y|)_{2,C2}$
3) X <0, Y <0 => Si esprime sia X che Y in complemento a 2

Allora avremo:

```
   00100001 +
   11110100 =
--------------
 1 00010101
```

$$00010101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

b) Modulo e segno

Abbiamo già calcolato la codifica in binario per il punto a), dobbiamo solamente definire il bit di segno:

A: Segno 0, Codifica del valore 100001

B: Segno 1, Codifica del valore 1100

$$A_{2,MS(8)} = 00100001 \qquad B_{2,MS(8)} = 10001100$$

c) Complemento a uno

Il procedimento è simile a quello per il complemento a due.

A è positivo, quindi la sua codifica in complemento a uno è uguale al binario puro: $A_{2,C1(8)} = 00100001$

B è negativo, quindi $B_{2,C1(8)} = 2^{8-1} - B_2$

```
 11111111 -
     1100 =
-------------
 11110011
```

$$B_{2,C1(8)} = 11110011$$

Verifichiamo il risultato eseguendo la somma in complemento a uno. Il risultato, una volta decodificato deve essere uguale a A+B=21

Dovendo fare X + Y in complemento a 1, sappiamo che :

1) X > 0, Y > 0 =>$X_{2,C1}$ + $Y_{2,C1} = (X+Y)_{2,C1}$
2) X > 0, Y < 0 => Si esprime Y in complemento a 1 e si esegue la somma
   a. Se $|Y| > X => (X - |Y|)_{2,C1}$ (quantità negativa)
   b. Se $|Y| < X =>$ $((X - |Y| + 1)_{2,C1}$ (quantità positiva)
3) X <0, Y <0 => Si esprime sia X che Y in complemento a 1 e si aggiunge uno alla somma in complemento a 1

Allora avremo:

```
  00100001 +
  11110011 =
--------------
1 00010100 +
         1 =
--------------
  00010101
```

$$00010101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

d) Forma polarizzata

Dobbiamo per prima cosa calcolare il bias:

$$BIAS = 2^{n-1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$$

Calcoliamo quindi il valore da codificare aggiungendo il bias:

$A' = A + BIAS = 33 + 127 = 160$

$$B' = B + BIAS = -12 + 127 = 115$$

N	**N mod 2**
160	0
80	0
40	0
20	0
10	0
5	1
2	0
1	1
0	

N	**N mod 2**
115	1
57	1
28	0
14	0
7	1
3	1
1	1
0	

$A_{2,POL(8)} = 10100000$ $B_{2,POL(8)} = 01110011$

Esercizio 4

Dati i seguenti valori espressi in base 10:

- A = -32
- B = 56

Convertirli nelle seguenti codifiche:

e) Base 2, forma polarizzata su 10 bit
f) Base 5, complemento a 5 su 3 cifre
g) Base 5, complemento a 4 su 3 cifre
h) Base 16, modulo e segno su 3 cifre

Soluzione

e) Base 2, forma polarizzata su 10 bit

$$BIAS = 2^9 - 1 = 511$$

$$A' = -32 + BIAS = -32 + 511 = 479_{10}$$

$$A = 0111011111_{2,POL(10)}$$

$$B' = 56 + BIAS = 56 + 511 = 567_{10}$$

$$B = 1000110111_{2,POL(10)}$$

N	N mod 2
479	1
239	1
119	1
59	1
29	1
14	0
7	1
3	1
1	1
0	

N	N mod 2
567	1
283	1
141	1
70	0
35	1
17	1
8	0
4	0
2	0
1	1
0	

f) Base 5, complemento a 5 su 3 cifre

A è negativo, quindi: $A_{5,C5} = b^n - |A| = 5^3 - 32 = 125 - 32 = 93_{10} = 333_{5,C5}$

B è positivo, quindi $B_{5,C5} = B_5 = 211_{5,C5}$

N	N mod 5
93	3
18	3
3	3
0	

N	N mod 5
56	1
11	1
2	2
0	

g) Base 5, complemento a 4 su 3 cifre

A è negativo, quindi: $A_{5,C4} = (b^n - 1) - |A| = 5^3 - 1 - 32 = 124 - 32 = 92_{10} = 332_{5,C4}$

B è positivo, quindi $B_{5,C4} = B_5 = 211_{5,C4}$

N	N mod 5
92	2
18	3
3	3
0	

h) Base 16, modulo e segno su 3 bit

A: Segno negativo: (b-1) = 15 = F

$$32_{10} = 20_{16}$$

$$A = F20_{16,MS(3)}$$

N	N mod 16
32	0
2	2
0	

B: Segno positivo: 0

$$|56|_{10} = 16 \cdot 3 + 8 = 3 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 38$$

$$B = 038_{16,MS(3)}$$

N	N mod 16
56	8
3	3
0	

Esercizio 5

5.1)

Dati a e b espressi in esadecimale, eseguire le conversioni di base richieste (base 10, base 8, base 2) per completare le tabelle seguenti.

a_{16}	a_{10}	a_8	a_2
C67			

b_{16}	b_{10}	b_8	b_2
B43			

5.2)

Stabilire il valore in decimale di **a+b** se le sequenze di bit a_2 e b_2 di cui sopra sono interpretate come numeri espressi in:

- binario puro
- modulo e segno
- forma polarizzata

a_2+b_2	$a_{2,MS}+b_{2,MS}$	$a_{2,P} + b_{2,P}$
6058		

Riportare i risultati in tabella.

Soluzione

5.1)

a_{16}	a_{10}	a_8	a_2
C67	3175	6147	110001100111

b_{16}	b_{10}	b_8	b_2
B43	2883	5503	101101000011

$a_{16} =[C67]_{16}=12_{10} \cdot 16^2{}_{10} +6_{10} \cdot 16^1{}_{10}+7_{10} \cdot 16^0{}_{10}=[3072]_{10}+[96]_{10}+7_{10}=[3175]_{10} =a_{10}$

$a_{10}=[3175]_{10}=[6147]_8 =a_8$

		8	<-Base
$Q^{(0)}$	3175	7	<-β_0
$Q^{(1)}$	396	4	<-β_1
$Q^{(2)}$	49	1	<-β_2
$Q^{(3)}$	6	6	<-β_3
$Q^{(4)}$	0		

Infatti $v([6147]_8)=6 \cdot 8^3 +1 \cdot 8^2 +4 \cdot 8^1+7 \cdot 8^0=[3072]_{10}+[64]_{10}+[32]_{10} +7_{10}=[3175]_{10}$

$a_{10}= [3175]_{10}=[110001100111]_2= a_2$

		2	<-Base
$Q^{(0)}$	3175	1	<-β_0
$Q^{(1)}$	1587	1	<-β_1
$Q^{(2)}$	793	1	<-β_2
$Q^{(3)}$	396	0	<-β_3
$Q^{(4)}$	198	0	<-β_4
$Q^{(5)}$	99	1	<-β_5
$Q^{(6)}$	49	1	<-β_6
$Q^{(7)}$	24	0	<-β_7
$Q^{(8)}$	12	0	<-β_8
$Q^{(9)}$	6	0	<-β_9
$Q^{(10)}$	3	1	<-β_{10}
$Q^{(11)}$	1	1	<-β_{11}
$Q^{(12)}$	0		

$b_{16}=[B43]_{16}=11_{10} \cdot 16^2{}_{10} +4_{10} \cdot 16^1{}_{10}+3_{10} \cdot 16^0{}_{10}=[2816]_{10}+[64]_{10}+[3]_{10}=[2883]_{10} =b_{10}$

$b_{10}=[2883]_{10}=[5503]_8 =b_8$

		8	<-Base
$Q^{(0)}$	2883	3	<-β_0
$Q^{(1)}$	360	0	<-β_1
$Q^{(2)}$	45	5	<-β_2
$Q^{(3)}$	5	5	<-β_3
$Q^{(4)}$	0		

Infatti $v([5503]_8)=5 \cdot 8^3 +5 \cdot 8^2 +0 \cdot 8^1+3 \cdot 8^0=[2560]_{10}+[320]_{10}+[3]_{10}=[2883]_{10}$

$b_{10}= [2883]_{10}=[101101000011]_2= b_2$

		2	<-Base
$Q^{(0)}$	2883	1	<-β_0
$Q^{(1)}$	1441	1	<-β_1
$Q^{(2)}$	720	0	<-β_2
$Q^{(3)}$	360	0	<-β_3
$Q^{(4)}$	180	0	<-β_4
$Q^{(5)}$	90	0	<-β_5
$Q^{(6)}$	45	1	<-β_6
$Q^{(7)}$	22	0	<-β_7
$Q^{(8)}$	11	1	<-β_8
$Q^{(9)}$	5	1	<-β_9
$Q^{(10)}$	2	0	<-β_{10}
$Q^{(11)}$	1	1	<-β_{11}
$Q^{(12)}$	0		

5.2)

a_2+b_2	$a_{2,MS}+b_{2,MS}$	$a_{2,P}+b_{2,P}$
6058	-1962	1964

a_2=110001100111

b_2=101101000011

Binario puro:
a+b=3175+2883=6058

Modulo e segno:
$$a = -(10001100111) = -(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^5 + 2^6 + 2^{10}) = -(1 + 2 + 4 + 32 + 64 + 1024) = -1127$$
$$b = -(01101000011) = -(2^0 + 2^1 + 2^6 + 2^8 + 2^9) = -(1 + 2 + 64 + 256 + 512) = -835$$
$$a + b = -1127 - 835 = -1962$$

Forma polarizzata:
$$BIAS = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$$
$$a = 3175 - 2047 = 1128$$
$$b = 2883 - 2047 = 836$$
$a + b =$ 1128+836=1964

Esercizio 6 (da svolgere)

Date le codifiche A, B, C, D, E, determinare il loro valore in decimale. Scrivere esplicitamente il procedimento di calcolo per effettuare la conversione.

A	$(11010110)_{2,C1}$	
B	$(01110101)_{2,C2}$	
C	$(0213)_{5,MS}$	
D	$(D3)_{16,NAT}$	
E	$(01001111)_{2,POL}$	

NAT: codifica naturale, C1: complemento a uno, C2: complemento a due, MS: modulo e segno, POL: forma polarizzata.

Esercizio 6

Date le codifiche A, B, C, D, E, determinare il loro valore in decimale. Scrivere esplicitamente il procedimento di calcolo per effettuare la conversione.

A	$(11010110)_{2,C1}$	-41
B	$(01110101)_{2,C2}$	117
C	$(0213)_{5,MS}$	58
D	$(D3)_{16,NAT}$	211
E	$(01001111)_{2,POL}$	-48

NAT: codifica naturale, C1: complemento a uno, C2: complemento a due, MS: modulo e segno, POL: forma polarizzata.

Soluzione

$A = -(00101001)_2 = -(2^0 + 2^3 + 2^5) = -(1 + 8 + 32) = -41$

$B = 01110101_{2,NAT} = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 1 + 4 + 16 + 32 + 64 = 117$

$C = +(213)_5 = +(3 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2) = 3 + 5 + 50 = 58$

$D = 13 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 208 + 3 = 211$

E

$BIAS = 2^7 - 1 = 127$

$E = (01001111)_2 - 127_{10} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 1 + 2 + 4 + 8 + 64 - 127 = 79 - 127 = -48$

Esercizio 7 – Da svolgere

Date le seguenti sequenze di bit:

A	1	1	1	0	1	0	1	1
B	0	1	0	1	1	1	0	1

dire quanto valgono se interpretate come numeri espressi in

- complemento a 2
- modulo e segno
- binario puro
- complemento a 1
- forma polarizzata

Esercizio 7 – Da svolgere

Date le seguenti sequenze di bit:

A	1	1	1	0	1	0	1	1
B	0	1	0	1	1	1	0	1

dire quanto valgono se interpretate come numeri espressi in
- complemento a 2
- modulo e segno
- binario puro
- complemento a 1
- forma polarizzata

Soluzione

Complemento a 2:
$A = -(00010101) = -(2^0 + 2^2 + 2^4) = -(1 + 4 + 16) = -21$
$B = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 = 1 + 4 + 8 + 16 + 64 = 93$

Modulo e segno:
$A = -(1101011) = -(2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^6) = -(1 + 2 + 8 + 32 + 64) = -107$
$B = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 = 1 + 4 + 8 + 16 + 64 = 93$

Binario puro:
$A = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + 128 = 235$
$B = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 = 1 + 4 + 8 + 16 + 64 = 93$

Complemento a 1:
$A = -(00010100) = -(2^2 + 2^4) = -(1 + 4 + 16) = -20$
$B = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 = 1 + 4 + 8 + 16 + 64 = 93$

Forma polarizzata:
$BIAS = 2^7 - 1 = 127$
$A = 235 - 127 = 108$
$B = 93 - 127 = -34$

Esercizio 8 – Da svolgere

Date le codifiche A, B, C, D, E, determinare il loro valore in decimale. Scrivere esplicitamente il procedimento di calcolo per effettuare la conversione.

A	$(10110101)_{2,C1}$	
B	$(01110101)_{2,C2}$	
C	$(11001011)_{2,MS}$	
D	$(135)_{8,NAT}$	
E	$(00000000)_{2,POL}$	

NAT: codifica naturale, C1: complemento a uno, C2: complemento a due, MS: modulo e segno, POL: forma polarizzata.

Esercizio 8 – Da svolgere

Date le codifiche A, B, C, D, E, determinare il loro valore in decimale. Scrivere esplicitamente il procedimento di calcolo per effettuare la conversione.

A	$(10110101)_{2,C1}$	-74
B	$(01110101)_{2,C2}$	117
C	$(11001011)_{2,MS}$	-75
D	$(135)_{8,NAT}$	93
E	$(00000000)_{2,POL}$	-127

NAT: codifica naturale, C1: complemento a uno, C2: complemento a due, MS: modulo e segno, POL: forma polarizzata.

Soluzione

$A = -(01001010)_2 = -(2^1 + 2^3 + 2^6) = -(2 + 8 + 64) = -74$

$B = 01110101_{2,NAT} = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 1 + 4 + 16 + 32 + 64 = 117$

$C = -(1001011)_2 = -(2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^6) = -(1 + 2 + 8 + 64) = -75$

$D = 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 64 + 24 + 5 = 93$

E

$BIAS = 2^{n-1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$

$E = (00000000)_2 - 127_{10} = 0 - 127 = -127$