Architettura degli Elaboratori A.A. 2018/2019

Rappresentazione dei Numeri Razionali

Esercizi Svolti

DiMaI – Università degli Studi di Firenze
Viale Morgagni, 65 – 50134 Firenze

Esercizio 1

a) Eseguire la decodifica in decimale dei seguenti numeri rappresentati in formato IEEE754 in singola precisione:

A =

1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

b) Sia C il numero decimale -11,15. Fornire la sua rappresentazione nel formato IEEE754 in singola precisione.

Soluzione:

a)

A

Segno: negativo

Esponente: $(1000\ 1001)_2 - (2^7 - 1) = 2^0 + 2^3 + 2^7 - (2^7 - 1) = 10$

Mantissa: 101100100001

A = $-(1{,}101100100001)_2 \cdot 2^{10} = -(11011001000{,}01)_2$

Parte intera: $(11011001000)_2 = 2^3 + 2^6 + 2^7 + 2^9 + 2^{10} = 8 + 64 + 128 + 512 + 1024 =$ 1736

Parte decimale: $(0{,}01)_2 = 2^{-2} = 0.25$

A = -1736,25

b)

C = -11,15

Segno: 1

- ### Parte intera

N	N mod 2
11	1
5	1
2	0
1	1

$$(11)_{10} = (1011)_2$$

- **Parte decimale**

N	N * 2	Trunc(N*2)
0,15	0,3	0
0,3	0,6	0
0,6	1,2	1
0,2	0,4	0
0,4	0,8	0
0,8	1,6	1
0,6	1,2	1
0,2	0,4	0
0,4	0,8	0

Nota: Il numero è periodico

$$(0{,}15)_{10} = (001001100110011001\ \ldots)_2$$

$$(11{,}15)_{10} = (1011{,}001001100110011\ \ldots)_2 = (1{,}011001001100110011\ \ldots)_2 \times 2^3$$

Esponente: $3 + 127 = 130$

$$(130)_{10} = (128 + 2)_{10} = 2^7 + 2^1 = (10000010)_2$$

Mantissa: = 0110 0100 1100 1100 1100 110

C =

1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

Esercizio 2

Convertire il numero decimale x=322,631 in base 5 utilizzando una rappresentazione che prevede 5 cifre per la parte intera e 6 cifre per la parte decimale.
La rappresentazione ottenuta è esatta, oppure è un'approssimazione di x?
Di quanto (eventualmente) si è approssimato x?

Soluzione

- Parte intera

N	N mod 5
322	2
64	4
12	2
2	2

2242

Verifica: $2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 = 250 + 50 + 20 + 2 = 322$

- Parte decimale

N	N * 5	Trunc(N*5)
0,631	3,155	3
0,155	0,775	0
0,755	3,875	3
0,875	4,375	4
0,375	1,875	1
0,875	4,375	4

0,303414

$$x' = (2242{,}303414)_5$$

La rappresentazione ottenuta non è esatta. Inoltre, il numero risulta essere periodico in base 5.

- Approssimazione

N	5^{-N}
1	1/5 = 0,2
2	0,2/5 = 0,04
3	0,04/5 = 0,008
4	0,008/5 = 0,0016
5	0,0016/5 = 0,00032

6 | 0,00032/5 = 0,000064

$$(x')_{10} = 322 + \left(3 \cdot 5^{-1}\right) + \left(3 \cdot 5^{-3}\right) + \left(4 \cdot 5^{-4}\right) + \left(1 \cdot 5^{-5}\right) + \left(4 \cdot 5^{-6}\right)$$
$$= 322 + 0{,}6 + 0{,}024 + 0{,}0064 + 0{,}00032 + 0{,}000256 = 322{,}6$$

```
 322        +
   0,6      +
   0,024    +
   0,0064   +
   0,00032  +
   0,000256 =
--------------
 322,630976
```

Si è approssimato x di $0{,}631 - 0{,}630976 = 0{,}000024$

Esercizio 3

Dati i numeri decimali **X = 52.3** e **Y=-0.35**

1. rappresentarli in virgola mobile in un registro a 12 bit, di cui 1 bit per il segno, 4 bit per l'esponente in forma polarizzata e 7 bit per la mantissa

	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
X												
Y												

2. dire quanto vale l'errore di approssimazione commesso per ciascun numero

SOLUZIONE

A=52.3

Segno: positivo! (quindi primo bit 0)

Parte intera 52:
diventa 110100
Parte decimale 0,3:

0.3 *2
0.6 *2
1.2 *2
0.4 *2
0.8 *2
1.6 *2
1.2 *2
... si ripetono le ultime 4 cifre!

0,**010011...**

Mettendoli insieme si ottiene:

110100.010011... * 2^0

Sposto la virgola a sinistra fino al bit 1 più significativo:

1.10100010011... * 2^5

Quindi
- esponente 5 da rappresentare in forma polarizzata:
  101 a cui sommare 0111
  si ottiene 1100

- mantissa: si prendono le sette cifre più significative dopo la virgola, ovvero 1010001

Ricapitolando:

0 1100 1010001

Interpretando il precedente floating point si ricava:

```
1.1010001 * 2^5 = 110100,01 * 2^0
32 + 16 + 4 + 1*2^{-2} = 52 + 0.25 = 52.25
```

La differenza tra il numero dato e la sua rappresentaz è pertanto `|52.3 - 52.25| = 0,05`

B=-0.35

Segno: negativo! (quindi primo bit 1)

Parte intera 0:

Parte decimale 0,35:

> 0.35 *2
> **0**.70 *2
> **1**.40 *2
> **0**.80 *2
> **1**.60 *2
> **1**.20 *2
> **0**.40 *2
> ... si ripetono le ultime 4 cifre!
>
> 0,**010110**...

Mettendoli insieme si ottiene:

```
0.0101100110... * 2^0
```

Sposto la virgola a destra fino al bit 1 più significativo:

```
1.01100110... * 2^(-2)
```

Quindi

- esponente -2 da rappresentare in forma polarizzata:
  si ottiene 0101
- mantissa: si prendono le sette cifre più significative dopo la virgola, ovvero 0110011

Ricapitolando:

```
1 0101 0110011
```

Interpretando il precedente floating point si ricava:

```
- 1,0110011 * 2^{-2} = - 0.010110011 * 2^0 =
- (2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9}) =
- (1/4 + 1/16 + 1/32 + 1/256 + 1/512) = -0.349609375
```

La differenza tra il numero dato e la sua rappresentazione è pertanto

```
|0.35 - 0.349609375| = 0,000390625
```