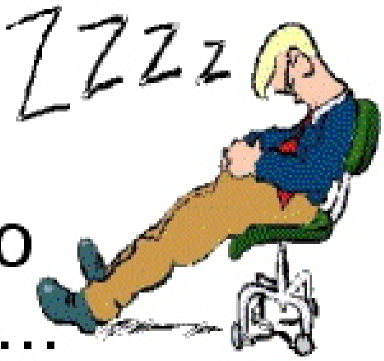
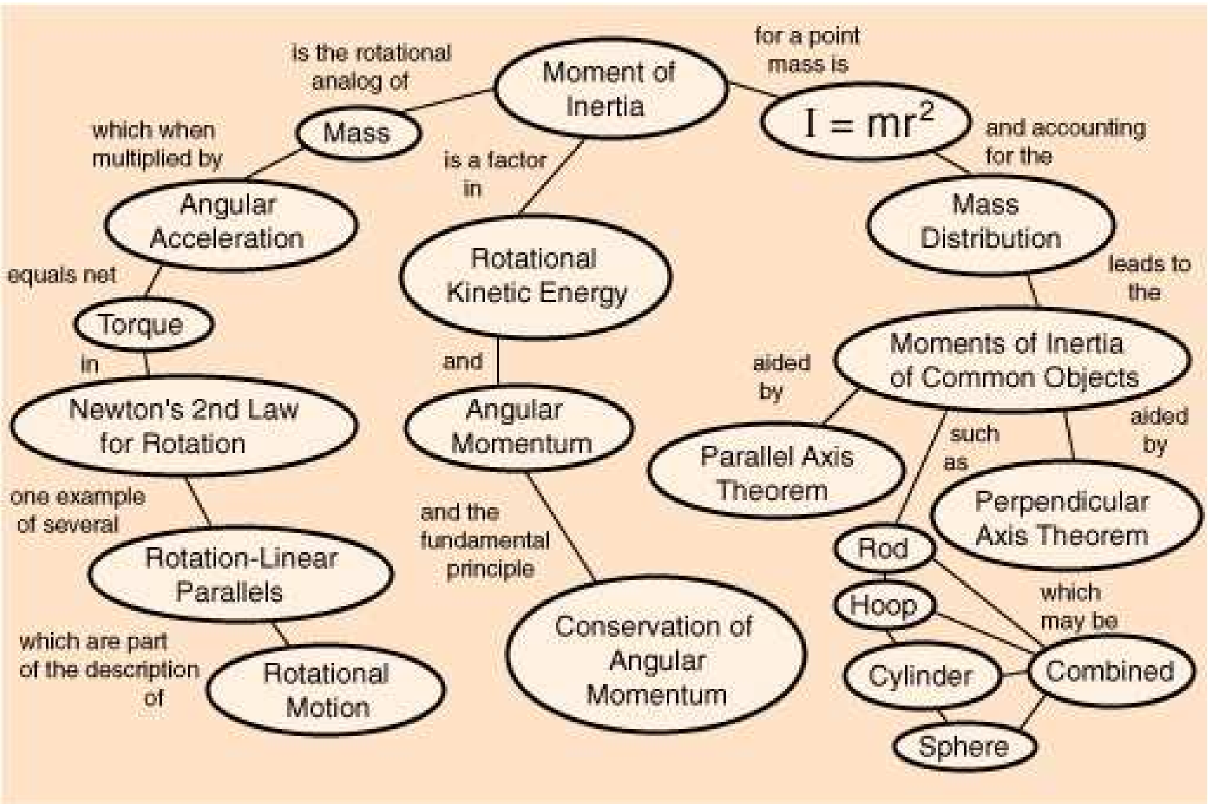
# Un momento d'inerzia...




dispensa di Giovanni Bachelet
Meccanica dei Sistemi, maggio 2003

links utili:

http://scienceworld.wolfram.com/physics/AngularMomentum.html
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/inecon.html



**Momento della quantità di moto di un corpo rigido rispetto al centro di massa**

Abbiamo visto che il moto di un corpo rigido, nel riferimento del laboratorio $S$, si può scomporre nel moto di traslazione del suo centro di massa $\vec{r}_c$ e nella sua rotazione rispetto a $\vec{r}_c$. Da questa scomposizione si ottiene anche $\vec{P}_c$ , momento della quantità di moto rispetto al centro di massa :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \;\; ; \;\; \vec{P}_c = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \left\{ |\vec{r}_i - \vec{r}_c|^2 \,\vec{\omega} - [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_c)] \, (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \right\}$$

Scomponendo il vettore $\vec{r}_i - \vec{r}_c = \vec{d}_{ic} + \vec{h}_{ic}$ nella somma di due vettori, uno parallelo $\vec{h}_{ic} = h_{ic}\,\hat{\omega} = (h_i - h_c)\,\hat{\omega}$ e l'altro $\vec{d}_{ic} = (\vec{d}_i - \vec{d}_c)$ perpendicolare all'asse di rotazione $\hat{\omega}$, otteniamo poi:

$$\vec{P}_c = \sum_i m_i \left\{ (d_{ic}^2 + h_{ic}^2)\,\vec{\omega} - \omega h_{ic} (\vec{d}_{ic} + h_{ic}\,\hat{\omega}) \right\} = \sum_i m_i \left\{ d_{ic}^2\,\vec{\omega} - \omega h_{ic} \vec{d}_{ic} \right\} = I_c\,\vec{\omega} + \vec{P}_{c\perp} \;,$$

dove $I_c\,\vec{\omega}$ è un vettore parallelo ad $\vec{\omega}$, il coefficiente $I_c = \sum_i m_i d_{ic}^2 > 0$ è detto *momento d'inerzia assiale* rispetto all'asse di rotazione $\hat{\omega}$ passante per $\vec{r}_c$ , e $\vec{P}_{c\perp} = -\omega \sum_i m_i h_{ic} \vec{d}_{ic}$ è un vettore perpendicolare a $\hat{\omega}$. La relazione fra $\vec{P}_c$ e $\vec{\omega}$ è quindi una relazione lineare (ad esempio ad una velocità angolare doppia corrisponde un momento della quantità di moto doppio), ma in generale $\vec{P}_{c\perp} \neq 0$: i due vettori non sono paralleli.

**Tensore d'inerzia di un corpo rigido**

L'equazione qui sopra esprime infatti una relazione lineare di tipo *tensoriale* fra i vettori $\vec{P}_c$ e $\vec{\omega}$. Questa relazione, una volta scelta arbitrariamente una terna cartesiana $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ nel riferimento del laboratorio, può essere espressa in termini delle componenti cartesiane dei due vettori in questione e degli elementi di una matrice $3 \times 3$; tale matrice è la *rappresentazione cartesiana*, nel particolare riferimento scelto, del *tensore d'inerzia* rispetto al centro di massa:

$$P_{c\alpha} = \sum_{\beta = x,y,x} I^c_{\alpha\beta}\,\omega_\beta, \quad \text{per} \quad \alpha = x, y, x. \qquad \text{Ovvero :} \qquad \begin{pmatrix} P_{cx} \\ P_{cy} \\ P_{cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^c_{xx} & I^c_{xy} & I^c_{xz} \\ I^c_{yx} & I^c_{yy} & I^c_{yz} \\ I^c_{zx} & I^c_{zy} & I^c_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Dove

$$I^c_{xx} = \sum_i m_i \left[ |\vec{r}_i - \vec{r}_c|^2 - (x_i - x_c)^2 \right] = \sum_i m_i \left[ (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]$$

$$I^c_{yy} = \sum_i m_i \left[ |\vec{r}_i - \vec{r}_c|^2 - (y_i - y_c)^2 \right] = \sum_i m_i \left[ (x_i - x_c)^2 + (z_i - z_c)^2 \right]$$

$$I^c_{zz} = \sum_i m_i \left[ |\vec{r}_i - \vec{r}_c|^2 - (z_i - z_c)^2 \right] = \sum_i m_i \left[ (x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 \right]$$

$$I^c_{xy} = I^c_{yx} = -\sum_i m_i \,(x_i - x_c)\,(y_i - y_c)$$

$$I^c_{xz} = I^c_{zx} = -\sum_i m_i \,(x_i - x_c)\,(z_i - z_c)$$

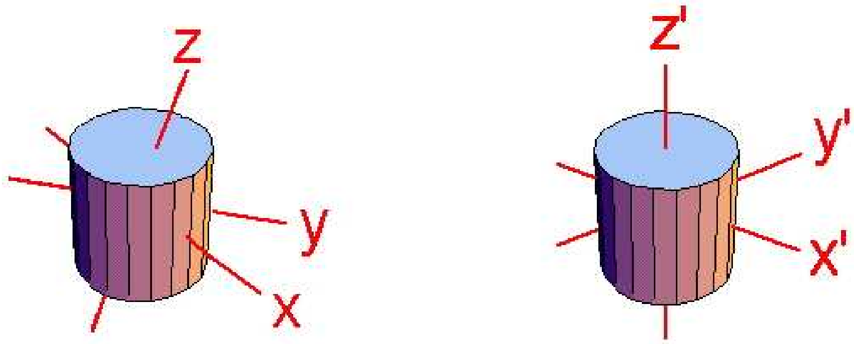
$$I^c_{yz} = I^c_{zy} = -\sum_i m_i \,(y_i - y_c)\,(z_i - z_c)$$

Il tensore d'inerzia è legato ad una proprietà intrinseca del corpo: la distribuzione spaziale delle sue masse rispetto al polo (può essere anche diverso dal centro di massa scelto qui). Gli elementi di matrice $I^c_{\alpha\beta}$ della sua rappresentazione cartesiana, invece, dipendono dal particolare orientamento della terna $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ scelta in $S$, proprio come succede alle componenti cartesiane dei vettori. [NB: un tensore è definito, come un vettore, dalle sue proprietà di trasformazione; uno scalare è un tensore di rango 0, un vettore è un tensore di rango 1, il nostro tensore d'inerzia è di rango 2... come imparerete prima o poi in altri corsi.]

## Assi principali e assi centrali

La matrice $I^c_{\alpha\beta}$ è simmetrica. Questo garantisce che, con un'opportuna rotazione degli assi coordinati, cioè con una diversa ed opportuna scelta di assi $\hat{x}'\hat{y}'\hat{z}'$, il tensore d'inerzia di quello stesso corpo sia rappresentato da una matrice $I^{c'}_{\alpha\beta}$ diagonale (una matrice $3 \times 3$ fatta tutta di zeri salvo i tre elementi diagonali, detti *autovalori*). Trovare questi nuovi assi $\hat{x}'\hat{y}'\hat{z}'$ equivale a *diagonalizzare* la matrice, ovvero trovare i tre *assi principali* d'inerzia del corpo, e i tre corrispondenti autovalori. Questi ultimi sono in generale diversi fra loro, e i tre assi corrispondenti non sono equivalenti. Se però due autovalori sono uguali fra loro (il che succede in presenza di particolari simmetrie del corpo), allora due dei tre assi principali risultano equivalenti; in questo caso qualunque direzione, nel piano individuato da quei due assi, è ancora un asse principale.

#### L'esempio del cilindro




Dato un cilindro omogeneo di massa $M$, raggio $R$ e altezza $h$, se scelgo un sistema di riferimento con origine nel centro del cilindro ed assi $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ orientati in modo non particolarmente furbo rispetto alle sue simmetrie (vedi figura, a sinistra), la matrice simmetrica $I^c_{\alpha\beta}$ che ne rappresenta il tensore d'inerzia ha tutti gli elementi diversi da zero; diagonalizzandola trovo la nuova terna cartesiana $\hat{x}'\hat{y}'\hat{z}'$ (vedi figura, a destra) tale che la nuova matrice $I^{c'}_{\alpha\beta}$ che rappresenta il tensore d'inerzia è diagonale; per un cilindro omogeneo è la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}Mh^2 + \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Mh^2 + \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix}.$$

I due autovalori relativi agli assi $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$ sono uguali; il terzo, relativo all'asse $\hat{z}'$, è diverso. L'uguaglianza dei due autovalori esprime il fatto che, in un cilindro omogeneo, tutti i diametri passanti per il centro sono equivalenti fra loro: nel piano $\hat{x}'\hat{y}'$ ogni asse che passa per il centro del cilindro è ancora un asse principale.

Se addirittura tutti e tre gli autovalori sono uguali, tutti e tre gli assi principali sono equivalenti: qualunque direzione nello spazio è un asse principale. Solo in quest'ultimo caso (che corrisponde alla piú alta simmetria possibile, ad esempio quella di una sfera omogenea) la matrice che rappresenta il tensore d'inerzia è proporzionale alla matrice identità, e risulta quindi diagonale *qualsiasi sia l'orientamento degli assi cartesiani*.

La proprietà degli assi principali, facilmente verificabile sulla base delle definizioni fornite, è che, se il corpo rigido ruota attorno ad uno di essi, il suo momento della quantità di moto è parallelo alla velocità angolare (ovvero risulta $\vec{P}_{c\perp} = 0$). Se invece il corpo rigido ruota attorno ad un asse che *non* corrisponde a nessun asse principale, allora il suo momento della quantità di moto avrà sia una componente parallela al vettore velocità angolare, sia una componente perpendicolare $\vec{P}_{c\perp} \neq 0$.

> Finora abbiamo parlato di momento angolare e tensore d'inerzia rispetto al centro di massa $r_c$. Gli assi cosí determinati non sono solo assi principali d'inerzia, ma anche *assi centrali* del corpo rigido in questione (assi principali passanti per il suo centro di massa); sono detti anche, per motivi che vedremo, *assi liberi di rotazione*. Momento angolare e tensore d'inerzia si possono però definire rispetto a un polo qualunque $r_o$, anche diverso da $r_c$: ad esempio, se il corpo è vincolato a ruotare attorno ad un asse che non contiene $r_c$, conviene piazzare il polo $r_o$ lungo quell'asse, non in $r_c$. Grazie al teorema di Koenig del momento angolare sarà poi facile mettere in relazione quantità angolari definite rispetto a due diversi poli.

Le simmetrie spaziali di un corpo rigido, se omogeneo, aiutano a individuare gli assi centrali del suo tensore d'inerzia. E' facile infatti convincersi, sulla base delle definizioni iniziali di queste dispense, che, se un corpo rigido ruota attorno ad un proprio asse di simmetria (che per definizione passa per il centro di massa), allora $\vec{P}_{c\perp} = 0$: un asse di simmetria è dunque un asse centrale.

**Momento d'inerzia assiale e teorema di Huygens-Steiner**

Se i corpi rigidi omogenei hanno assi di simmetria riconoscibili a vista, chi non ama matrici e tensori può accontentarsi dell'equazione $\vec{P}_c = I_c\,\vec{\omega} + \vec{P}_{c\perp}$ e distinguere due casi: (a) l'asse di rotazione $\hat{\omega}$ coincide con un asse di simmetria, e allora il momento della quantità di moto rispetto al centro di massa è parallelo al vettore velocità angolare $\vec{\omega}$; (b) l'asse di rotazione passa per il centro di massa ma non coincide con un asse di simmetria, e allora il momento della quantità di moto rispetto al centro di massa ha anche una componente perpendicolare ad $\vec{\omega}$. Sia nel caso (a) che nel caso (b) la componente parallela alla velocità angolare è data da $I_c\,\vec{\omega}$, dove $I_c = \sum_i m_i d_{ic}^2$, somma delle masse che compongono il corpo rigido pesate col quadrato della loro distanza dall'asse di rotazione, è il *momento d'inerzia assiale* rispetto all'asse di rotazione.

Se invece l'asse di rotazione non passa per il centro di massa, conviene riferire il momento della quantità di moto ad un polo $\vec{r}_o$ che sia sull'asse, quindi non piú al centro di massa $\vec{r}_c$; ma grazie al teorema di Koenig del momento angolare $\vec{P}_o = \vec{P}_c + (\vec{r}_c - \vec{r}_o) \times M\vec{v}_c$ possiamo scrivere:

$$\vec{P}_o = \left(I^c + M d_c^2\right)\vec{\omega} + \left(\vec{P}_{c\perp} - M\omega h_c \vec{d}_c\right) = I^o\,\vec{\omega} + \vec{P}_{o\perp},$$

dove $\vec{r}_c - \vec{r}_o$, vettore distanza fra polo e centro di massa, è stato scomposto nella somma di due vettori, uno parallelo all'asse di rotazione $\vec{h}_c = h_c\,\hat{\omega} = (h_c - h_o)\,\hat{\omega}$ e l'altro perpendicolare all'asse di rotazione $\vec{d}_c = (\vec{d}_c - \vec{d}_o)$. Otteniamo cosí per il momento d'inerzia assiale il risultato noto come teorema di Huygens-Steiner: $I^o = I^c + Md_c^2$. In altre parole, dati due assi paralleli a quello di rotazione $\hat{\omega}$, il primo passante per $\vec{r}_o$ e il secondo passante per $\vec{r}_c$, che si trova a distanza $d_c$ dal primo, i due corrispondenti momenti d'inerzia del corpo rigido differiscono per una quantità data dalla massa totale del corpo moltiplicata per il quadrato della distanza fra gli assi (NB: $d_c$ , componente di $\vec{r}_c - \vec{r}_o$ perpendicolare a $\vec{\omega}$, è proprio questa distanza). Per la proprietà transitiva, questo tipo di relazione sussiste fra momenti d'inerzia assiali rispetto a qualsiasi coppia di assi paralleli $a$ e $a'$: $I^{a'} = I^a + Md_{aa'}^2$, un risultato molto utile nel calcolo dei momenti d'inerzia assiali.

**Rotazioni rispetto a un punto fisso**

Ora mostriamo che, per far ruotare un corpo rigido rispetto a un punto fisso $\vec{r}_o$ non coincidente col centro di massa $\vec{r}_c$, ci vuole una risultante delle forze esterne diversa da zero [nel seguito mettiamo il punto fisso nell'origine: $\vec{r}_o = (0,0,0)$]; e che, per farlo ruotare con velocità angolare $\vec{\omega}$ *non* diretta secondo un asse principale, ci vuole un momento complessivo delle forze esterne diverso da zero. Nel caso generale (asse non principale e punto fisso diverso da $\vec{r}_c$) abbiamo infatti:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c = M\vec{\omega} \times \vec{r}_c \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = M\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) = \vec{F}^{ext} \neq 0$$

$$\vec{P}_o = I^o\,\vec{\omega} + \vec{P}_{o\perp} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_o}{dt} = I^o\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{P}_{o\perp} + \vec{\omega} \times \vec{P}_{o\perp} = \vec{M}_o^{ext} \neq 0;$$

per la seconda equazione abbiamo tenuto conto che $\vec{P}_{o\perp} = \omega A \hat{P}_{o\perp}$ con $A$ costante ($A$ dipende solo dalla distribuzione spaziale delle masse giacché $\vec{P}_{c\perp} = -\omega \sum_i m_i h_{ic} \vec{d}_{ic}$ e $\vec{P}_{o\perp} = \vec{P}_{c\perp} - M\omega h_c \vec{d}_c$); il versore $\hat{P}_{o\perp}$ ruota nel piano perpendicolare all'asse di rotazione con velocità $\omega$.

La prima equazione dice che, anche se $d\vec{\omega}/dt$ è zero (cioè anche se l'asse di rotazione $\hat{\omega}$ è fisso e la velocità angolare $\omega$ è costante nel tempo), occorre una risultante delle forze esterne, in particolare una forza centripeta, per mantenere in rotazione un corpo rigido attorno a un punto che non sia il suo centro di massa.

La seconda equazione dice che $\vec{P}_{o\perp}$, non appena è diverso da zero, dipende per forza dal tempo: anche se $\vec{\omega}$ è costante, $\vec{P}_{o\perp}$ ruota nel piano perpendicolare a $\vec{\omega}$ con velocità angolare $\omega$; cosí anche l'intero vettore $\vec{P}_o = I^o\,\vec{\omega} + \vec{P}_{o\perp}$ dipende dal tempo (ruota descrivendo un cono, *precedendo* attorno all'asse di rotazione); quindi la derivata temporale del vettore $\vec{P}_o$ non è zero, e occorre un momento risultante delle forze esterne per mantenere il corpo in rotazione attorno a quell'asse.

Infine, sempre nell'ipotesi di $\vec{\omega}$ costante, non è difficile dimostrare, sulla base delle definizioni fornite in precedenza, che sia $|\vec{F}^{ext}|$, sia $|\vec{M}_o^{ext}|$, sono proporzionali a $\omega^2$.

Dalle equazioni precedenti consegue che un corpo rigido, in assenza di forze e momenti esterni, può ruotare solo intorno ad uno dei suoi assi centrali; per questo essi sono anche chiamati assi liberi di rotazione. Per mantenere un corpo rigido in rotazione costante intorno a un asse non centrale (o perché non passa per il centro di massa, o perché la direzione non è quella di un asse centrale, o tutte e due le cose) occorrono invece forze e momenti esterni, sempre piú grandi man mano che aumenta la velocità angolare $\omega$. Per questo è importante, ad esempio per l'elica di un aereo o per la ruota di un'automobile, una perfetta "equilibratura": una distribuzione di masse tale che l'asse di rotazione (tipicamente realizzato con un vincolo, come il mozzo della ruota) non sia soggetto a forze e momenti esterni che diventano rapidamente molto grandi con l'aumentare della velocità angolare. Senza "equilibratura", oltre una certa velocità angolare, si spacca tutto. Un istruttivo esercizio da fare per conto proprio è verificare le direzioni dei vettori $\vec{F}^{ext}$ e $\vec{M}_o^{ext}$, e capire fisicamente a quale tipo di sollecitazione è sottoposto il vincolo responsabile di mantenere fisso l'asse di rotazione, se quest'ultimo non coincide con un asse centrale del corpo ruotante.

**Rotazioni rispetto a un asse fisso**

Se l'asse è fisso nel tempo, la direzione di $\vec{\omega}$ è costante nel tempo e l'angolo $\theta(t)$ di rotazione del corpo attorno all'asse determina completamente il moto (un solo grado di libertà). Conviene scegliere la terna cartesiana del riferimento $S$ in modo che sia $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, cioè in modo che l'asse $\hat{z}$ coincida con l'asse di rotazione del corpo (che può passare o meno per il centro di massa: per esempio per una porta scegliamo l'asse $\hat{z}$ lungo i cardini), e riferire $\vec{P}_o$ e $I^o$ ad un polo $\vec{r}_o$ che si trovi lungo tale asse; nel seguito scegliamo l'origine $\vec{r}_o = (0, 0, 0)$. Con queste scelte $\theta(t)$ ubbidisce all'equazione differenziale

$$\frac{dP_{oz}}{dt} = I^o \frac{d\omega}{dt} = I^o \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_z^{ext}.$$

Una volta nota la componente $z$ del momento complessivo delle forze esterne e le condizioni iniziali $\theta(t{=}0)$ e $\omega(t{=}0)$, integrando l'equazione differenziale, otteniamo $\theta(t)$. Notiamo qui l'origine del nome "momento d'inerzia assiale": nel moto rotatorio $I^o$ gioca, rispetto all'accelerazione angolare, lo stesso ruolo che gioca la massa rispetto all'accelerazione nel moto traslatorio. In particolare vale un principio d'inerzia angolare: se la componente $z$ (cioè la componente lungo l'asse fisso di rotazione) del momento complessivo delle forze esterne è nulla, il corpo si mantiene indefinitamente in uno stato di quiete o di moto rotatorio uniforme, cioè conserva la componente del momento della quantità di moto parallela all'asse fisso di rotazione. Una volta nota $\theta(t)$ sono naturalmente determinati anche $\vec{Q} = M\vec{\omega}\times\vec{r}_c$ e $\vec{P}_{o\perp} = -\omega \sum_i m_i h_{ic} \vec{d}_{ic} - M\omega h_c \vec{d}_c$.

**Energia cinetica**

Nel riferimento del laboratorio $S$ è possibile scomporre l'energia cinetica $K$ di un sistema qualunque nella somma $K = \frac{1}{2}Mv_c^2 + K'$, dove il primo termine è la cosiddetta energia *del* centro di massa e il secondo termine $K'$ è l'energia cinetica *nel* centro di massa, cioè rispetto ad un riferimento $S'$ che trasla col centro di massa (ma senza ruotare rispetto ad $S$). Nel riferimento $S'$ il centro di massa è fermo e un corpo rigido può solo ruotare con velocità $\vec{\omega}$. Ovvero in $S'$ la velocità delle varie masse che compongono il corpo rigido è $\vec{v}_i' = \vec{\omega}\times\vec{r}_i' = \vec{\omega}\times(\vec{r}_i - \vec{r}_c)$, e quindi

$$K' = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i |\vec{\omega}\times\vec{r}_i'|^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\omega^2 d_i'^2 = \frac{1}{2} I_c\,\omega^2$$

dove $d_i'$ è la componente perpendicolare ad $\omega$ di $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$, cioè la distanza della massa $m_i$ dall'asse di rotazione passante per il centro di massa: anche nell'energia cinetica rotazionale il momento d'inerzia assiale gioca un ruolo analogo alla massa nell'energia cinetica traslazionale.