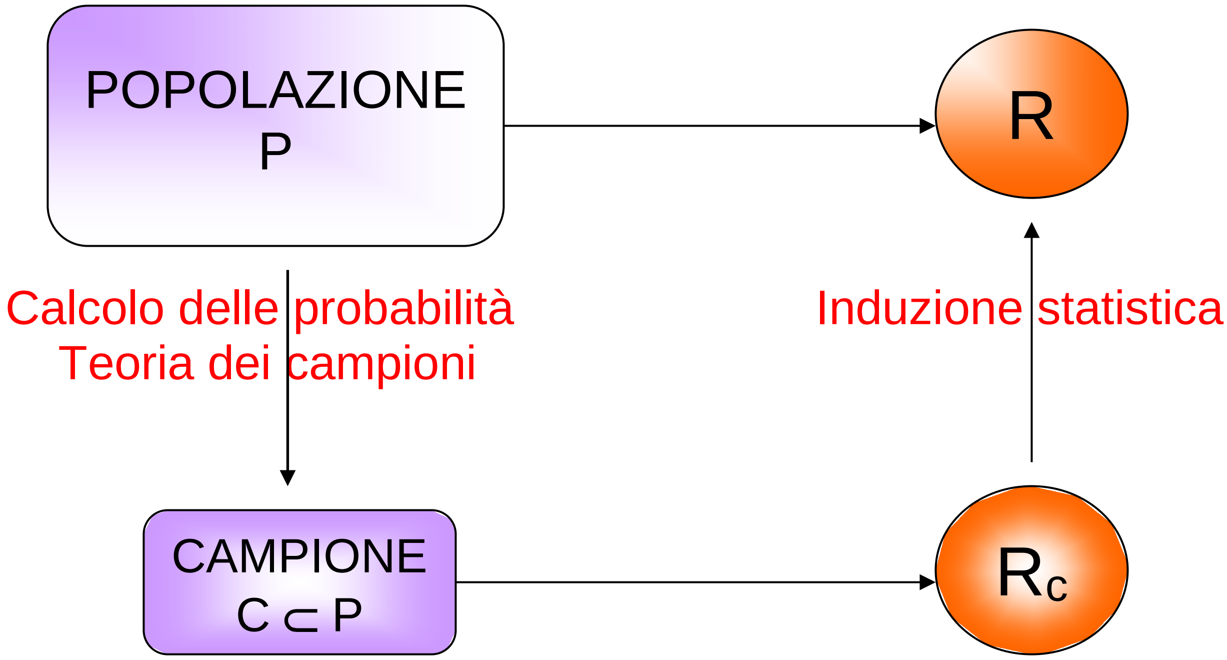
INFERENZA → SCHEMATIZZAZIONE



Perché non estendere direttamente il risultato campionario alla popolazione? → **Variabilità dei risultati→INCERTEZZA**

PROBLEMI

- **come scegliere il campione (teoria dei campioni)**

  C. probabilistici vs C. non probabilistici
  Procedura oggettiva (ripetibile)
  Possibilità di valutare il risultato (**calcolo delle probabilità**)

  Capostipite dei campioni probabilistici: ***Campione Casuale Semplice*** *(CCS) con (senza) replicazione.*

- come **'prevedere'** il risultato campionario se la popolazione è nota →PROBLEMA DIRETTO
- come **'estendere'** il risultato campionario all'intera popolazione (induzione) →PROBLEMA INVERSO

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Nasce con i giochi d'azzardo nel tentativo di razionalizzare e formalizzare in modo matematico l'incertezza connessa al gioco.

Intuitivo assegnare la probabilità nei giochi di sorte caratterizzati da regolarità e simmetrie

- ***Qual è la probabilità che esca testa nel lancio di una moneta? → 0,5***
- ***Qual è la probabilità di estrarre una figura da un mazzo di 40 carte? → 12/40=0,3***

Nel nostro contesto l'incertezza è data dalla consapevolezza che campioni differenti estratti dalla stessa popolazione danno informazioni diverse.
non giochiamo ma trattando con il campione casuale semplice è come se valutassimo i risultati di estrazioni di palline da una urna (simil-lotto)

Lo sviluppo teorico del calcolo delle probabilità richiede di fissare

- ***concetti primitivi***
- ***postulati (assiomi)*** **e di derivarne dei**
- ***teoremi***

concetti primitivi

esperimento (casuale) → operazione la cui esecuzione (prova) è suscettibile di dar luogo ad un risultato riconoscibile (evento). L'insieme dei risultati possibili è noto a priori ma non è possibile prevedere quale sarà il risultato prima di eseguire la prova. Il grado di incertezza sul risultato si esprime attraverso una valutazione numerica detta probabilità

La prova genera l'evento E con una certa probabilità

Postulati (assiomi)

L'insieme dei possibili risultati (*Eventi Elementari*) di una prova è detto *Spazio Campionario* *S*.

Qualunque sottoinsieme di *S* è un evento. L'insieme di tutti gli eventi di possibile interesse ottenibili come sottoinsieme dello spazio campionario è lo *Spazio degli Eventi* $\mathcal{E}$.

POSTULATO 1: gli eventi di $\mathcal{E}$ formano un'algebra di Boole, ossia una struttura formale chiusa rispetto ad un sistema di operazioni

Le operazioni di interesse sono

Negazione **dell'evento *A*** $\overline{A}$

data dall'evento "A non si verifica"

Intersezione **tra due eventi *A* e *B*** $A \cap B$

data dall'evento "entrambi gli eventi A e B si verificano contemporaneamente"

Unione **tra due eventi A e B** $A \cup B$

data dall'evento "almeno uno dei due eventi si verifica"

Due eventi rilevanti che servono a garantire la chiusura dell'algebra rispetto alle operazioni

Evento impossibile $\varnothing$

non può mai verificarsi perché non comprende nessuno dei possibili risultati; è un insieme vuoto e può essere definito come $\emptyset = A \cap \overline{A}$

Evento Certo S

comprende tutti i possibili risultati e si verifica sempre; coincide con S e può essere definito come $S = \overline{\emptyset}$

Relazioni tra eventi:

incompatibilità**: due eventi sono incompatibili se** $A \cap B = \emptyset$**, ossia se non possono verificarsi contemporaneamente nella stessa prova**

Inclusione**: se** $A \cup B = A$ **allora B è incluso in A**

La probabilità è definita come una funzione che associa ad ogni evento $A \in \mathcal{E}$ un numero reale. È indicata con P(A) e, nell'approccio assiomatico, deve soddisfare i seguenti postulati.

POSTULATO 2: $P(A) \geq 0$

POSTULATO 3: $P(S) = 1$

POSTULATO 4: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teoremi

A partire dai postulati si dimostrano teoremi

$P(A) \leq 1$ *dimostraz:*

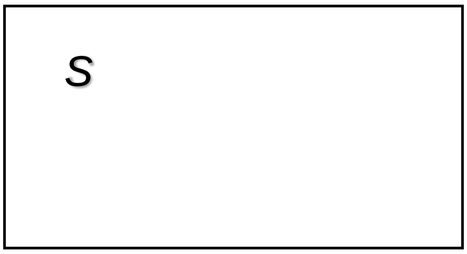
$1 = (PS) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) \leq 1$

$P(\emptyset) = 0$

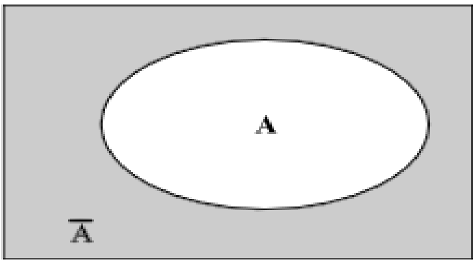
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ⇐ *teorema delle probabilità totali*

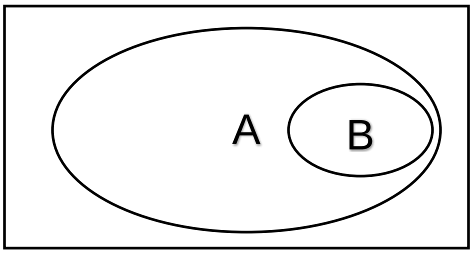
Interpretazione euristica tramite diagrammi di Venn. Lo spazio campionario S come rettangolo di area 1. Evento come qualunque figura geometrica contenuta nel rettangolo. Probabilità come area della figura che rappresenta l'evento.



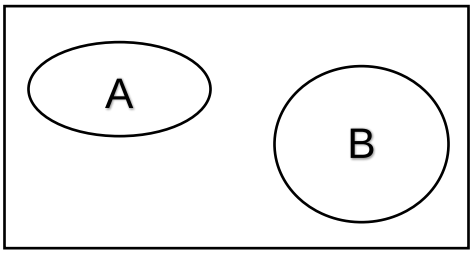
Spazio campionario
P(S)=1



Negazione
$P(A)+P(\bar{A})=1$

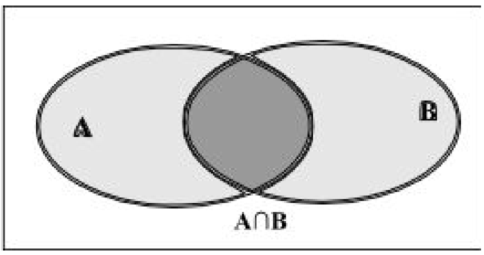


Inclusione
$P(B \subset A) \leq P(A)$



Incompatibilità se $A \cap B = \phi$
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

altrimenti



$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Misure di probabilità

Diverse concezioni (<u>definizioni</u>) di probabilità

- ***Classica*: numero di risultati favorevoli all'evento diviso il numero di risultati possibili** ***se tutti i risultati sono ugualmente possibili***

- ***Frequentista*: rapporto tra numero di volte che un evento si è presentato in un "gran" numero di prove diviso il numero di prove effettuate** ***tutte nelle stesse condizioni (ripetibilità)***

  <u>postulato empirico del caso</u>: in un gran numero ripetute tutte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili compare con una frequenza relativa approssimativamente uguale alla sua probabilità. L'approssimazione è tanto migliore quanto più il numero di prove cresce
  vedi cart. excel probabilità foglio postulato empirico del caso

- ***Soggettivista*: grado di fiducia che un individuo coerente assegna al verificarsi di un evento sulla base delle informazioni di cui dispone** ***Coerenza → prezzo che si è disposti a pagare per riscuotere un importo unitario se si verifica l'evento***

Il concetto di probabilità condizionata (subordinata) e indipendenza

Probabilità di un evento "sapendo" (condizionatamente al fatto) che un evento ad esso collegato si è verificato.
Si indica con P(A|B) (si legge probabilità di A dato B) ed è definita come

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad con\ P(B) > 0$$

In modo analogo

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad con\ P(A) > 0$$

Da cui

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

teorema delle probabilità composte

INDIPENDENZA due eventi sono indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

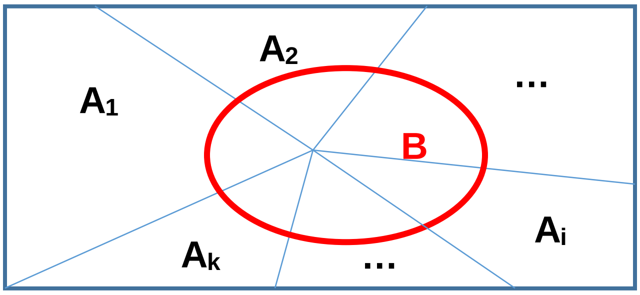
Il che implica

$$P(A|B) = P(A)\ e\ P(B|A) = P(B)$$

esempio: lancio di un dado.
Evento A: "esce il 2 o il 3"
Evento B: "esce un numero pari"

Teorema di Bayes

Consideriamo una partizione (A_1, A_2, … A_k,) dello spazio campionario e un evento B



Risulta

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Ma, essendo gli eventi della partizione incompatibili si ha che

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

E quindi

Verosimiglianza

Probabilità a priori

Probabilità a posteriori

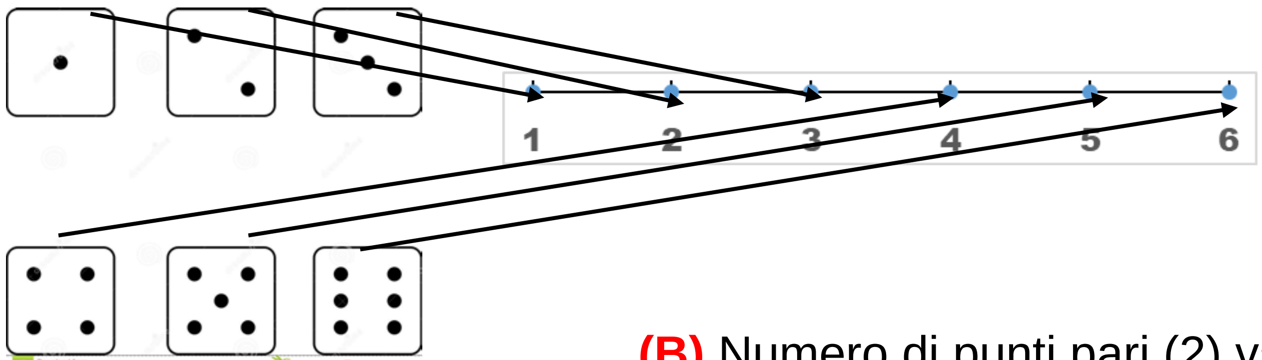
$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

esempio→vedi cartella excel probabilità foglio Bayes

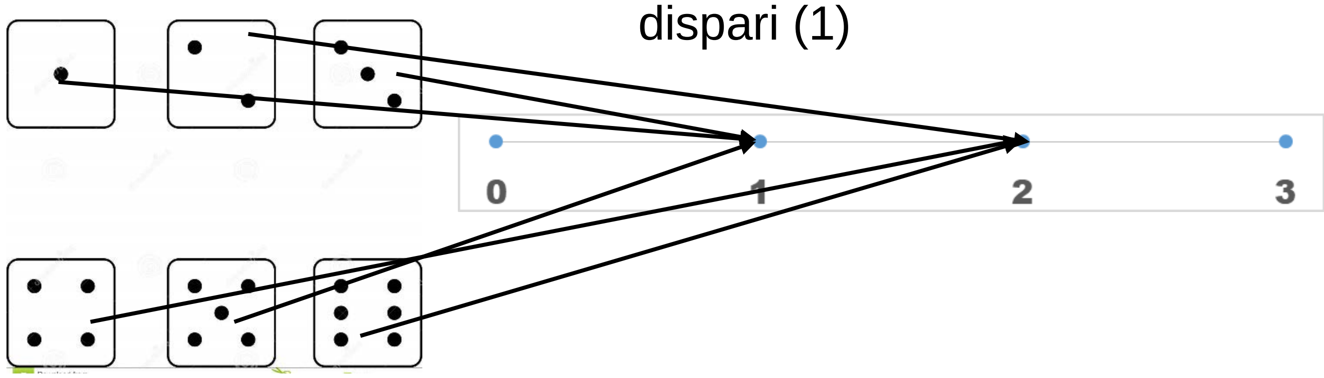
VARIABILE CASUALE DISCRETA

Regola (funzione) che associa ad ogni evento E⊂S un solo numero reale scelto in un insieme finito o numerabile di valori (trasformazione dello spazio degli eventi in uno spazio numerico).

(A) Numero di punti sulla faccia



(B) Numero di punti pari (2) vs dispari (1)



Ad ogni valore numerico corrisponde una probabilità pari alla somma delle probabilità degli eventi elementari che sono associati a quel valore

(A)

X:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f(x$_i$):	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**

(B)

X:	**1**	**2**
f(x$_i$):	**3/6**	**3/6**

VC come descrizione formalizzata di un esperimento

Con la lettera maiuscola X si indica la VC e con la minuscola x_i (i=1,2,…., k) la realizzazione della VC ovvero il valore assunto in una prova

L'affermazione "la prova ha dato un particolare risultato" (ad esempio è apparsa la faccia con 6 puntini) **equivale a "la VC *X* ha assunto un particolare valore x_i"** (la VC che descrive il lancio del dado ha assunto valore 6)

$f(x_i) = P(X=x_i)$ è detta funzione di probabilità

e rispetta gli assiomi $f(x_i) \geq 0 \quad \sum_i f(x_i) = 1$

$F(x_i) = \sum_{s=1}^{i} x_s = P(X \leq x_i)$ è detta funzione di ripartizione

Analogia tra VC discreta e Distribuzione di frequenza (relativa) di un carattere discreto

modalità di X	*Frequenza relativa*
x_1	n_1/N
…	…
x_i	n_i/N
…	…
x_k	n_k/N
	1

l'esperimento "estrazione casuale di una unità dalla popolazione e osservazione del carattere X" è descritto da una VC che si presenta formalmente come la distribuzione di frequenza relativa con
f(xi)= n_i/N
= casi favorevoli/casi possibili

Media (valore atteso) $E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$

Valore che mediamente mi aspetto in una prova

Varianza $Var(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 f(x_i)$

Dispersione dei risultati sperimentali

VARIABILE CASUALE CONTINUA

Se lo spazio campionario è formato da infiniti non numerabili valori, può convenire descrivere l'esperimento con una VC continua, che può assumere tutti i valori in un intervallo.

Non possiamo assegnare a tutti i valori una probabilità (la somma sarebbe infinita). Si definisce allora una funzione di densità di probabilità f(x)≥0 tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Probabilità che **X** assuma un valore in un intorno infinitesimo di **x**

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 1$$

ATTN $P(X = x) = \int_x^x f(u)dxu = 0$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \mu_x$$

Valore Atteso

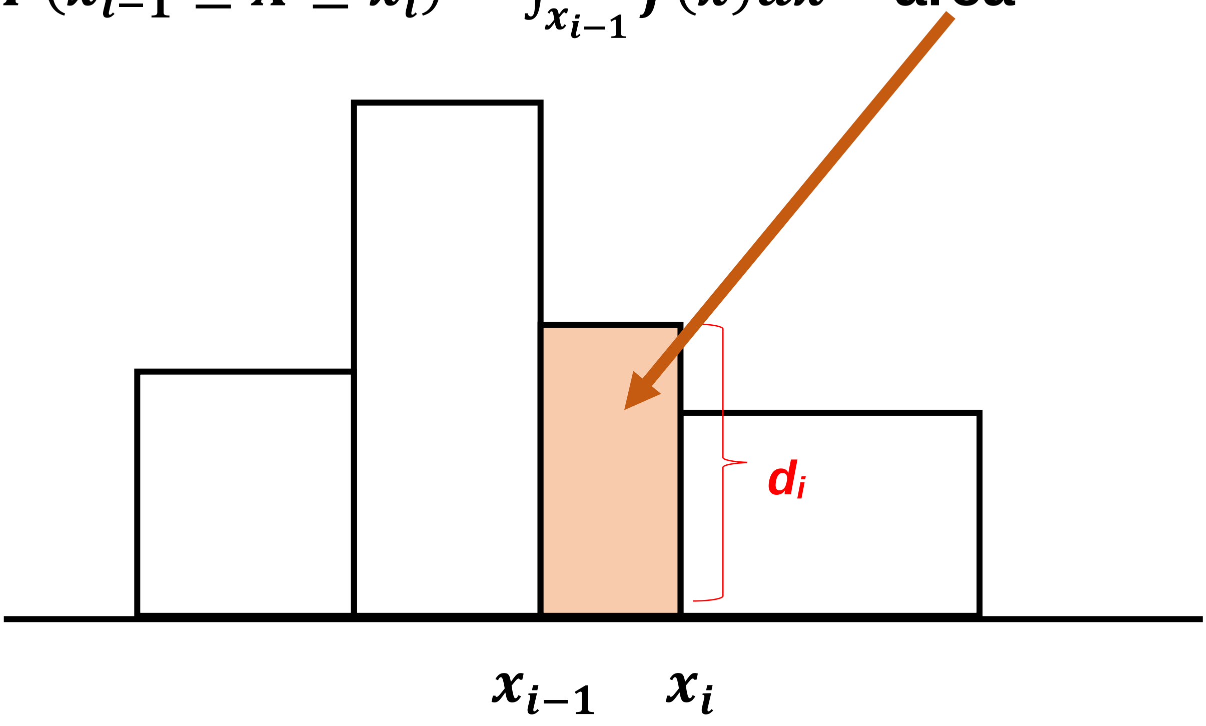
$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2\, f(x)dx = \sigma_x^2$$

Varianza

Analogia tra VC continua e Distribuzione di frequenza (relativa) di un carattere continuo

modalità di X	*Frequenza relativa*	*Densità*
$X_0 - x_1$	$fr_1=n_1/N$	$d_1=fr_1/(x_2 - x_1)$
…	…	…
$x_{i-1} - x_i$	$fr_i=n_i/N$	$d_i=fr_1/(x_i - x_{i-1})$
…	…	…
$x_{k-1} - x_k$	$fr_k=n_k/N$	$d_k=fr_1/(x_k - x_{k-1})$
	1	

$$P(x_{i-1} \leq X \leq x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \text{area}$$



ALCUNE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' PER VARIABILI CASUALI DISCRETE

VC di Bernoulli

Estrazione di <u>una</u> pallina da una urna con B palline bianche e (N-B) palline non bianche

X: 0 1

1 indica bianco (successo)
0 indica non bianco

f(x) $= p^x(1-p)^{1-x}$

E(X) $= p$

Var(x) $= p(1-p)$

VC Binomiale

Estrazione (<u>con ripetizione</u>) di <u>n</u> palline da una urna con B palline bianche e (N–B) palline non bianche e conteggio del numero di Bianche nelle n estratte

X: 0 1 2 .... n

f(x) $= p^x(1-p)^{n-x}$

E(X) $= np$

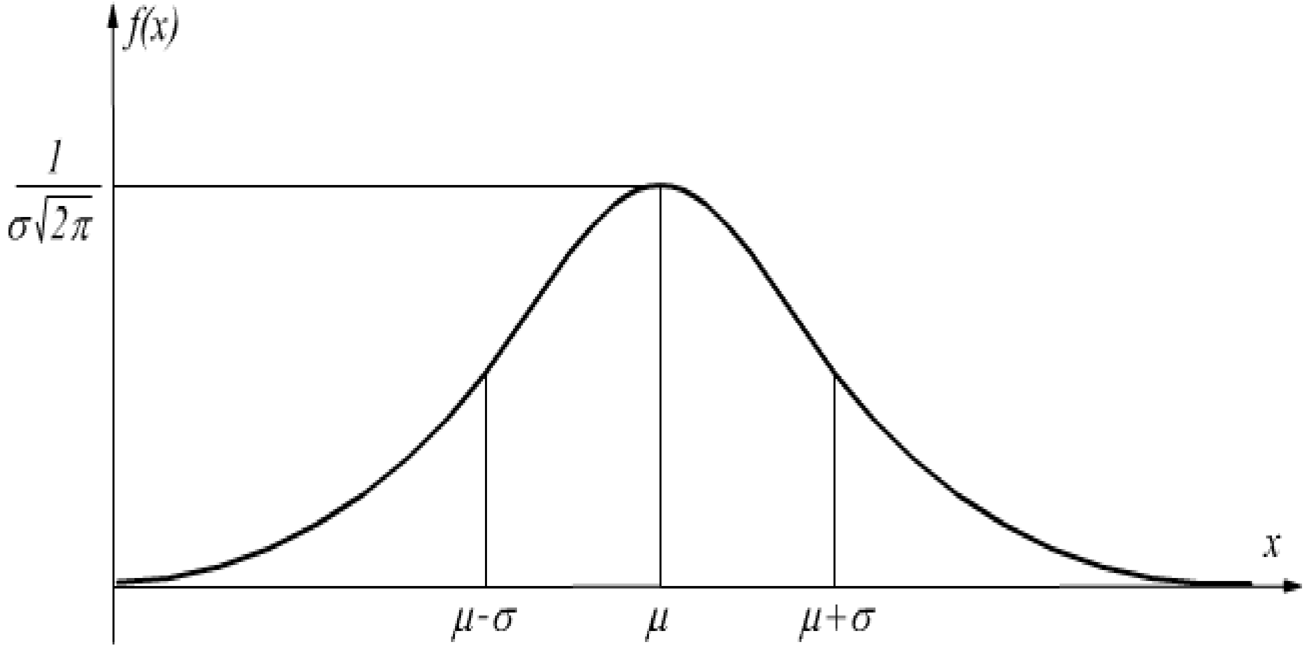
Var(x) $= np(1-p)$

ALCUNE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' PER VARIABILI CASUALI CONTINUE

VC Normale (Gauss): X: -∞ ≤ x ≤ +∞

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$E(X) = \mu \qquad\qquad Var(X) = \sigma^2$$



Standardizzazione $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

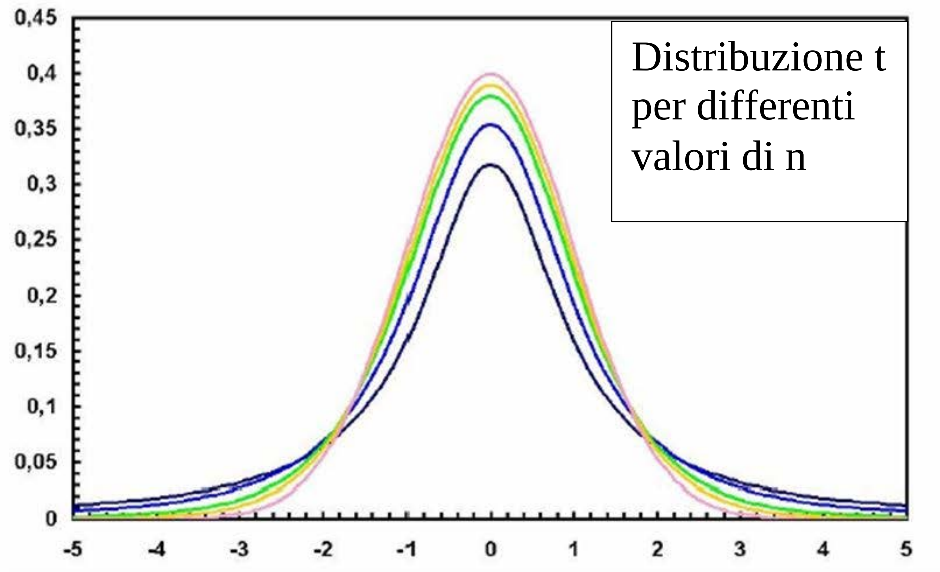
$$E(Z) = 0 \qquad\qquad Var(Z) = 1$$

VC t di Student: X: -∞ ≤ x ≤ +∞

$$f(t_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Dipende dal solo parametro *n* solitamente indicato col nome "gradi di libertà"

La distribuzione t-Student



Distribuzione t per differenti valori di n

E(T)=0

Var(T)=n/(n-2)