**Homework 4 - Algebra Lineare e geometria analitica**

(Dott.ssa D. Bubboloni)
assegnato 26 Novembre 2014 - consegna il 5 Dicembre 2014

**1.** Dati i vettori di $\mathbb{Q}^4$ seguenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) giustificare il fatto che non costituiscano una base per $\mathbb{Q}^4$;

b) estrarne un insieme di vettori indipendenti di ordine massimo e completarlo a base di $\mathbb{Q}^4$.

**2.** Si dica se sono parallele le seguenti sottovarietà lineari affini di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} \qquad \{ \; x + z = 6$$

Interpretare geometricamente l'accaduto in ambiente $\mathbb{R}^3$.

**3.** Calcolare, se esiste, l'inversa $M^{-1}$ di

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

usando l'algoritmo di Gauss. Controllare il risultato ottenuto provando che $MM^{-1} = I_4$.

**4.** Trovare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è diverso da 0 il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & a & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

Utilizzare il lavoro appena fatto per determinare, al variare di $a$, il rango della matrice $A$. Esistono valori di $a$ tali che il rango sia 2? Dire per quali $a$ la matrice è invertibile. Dire quante soluzioni ammettono i sistemi $AX = 0$ e $AX = (1, 2, 0, -1)^T$ dove $X = (x, y, z, t)^T$ al variare di $a$.