Homework 1 - Algebra Lineare e geometria analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)
assegnato 26 Settembre 2017 - consegna lunedì 2 Ottobre 2017.

1. Dimostra la seguente proposizione se la ritieni vera. Altrimenti esibisci due insiemi per cui essa è falsa.

Proposizione Siano A, B insiemi. Se

$$A \cap B = A \setminus B$$

allora $A = \varnothing$.

2. Aiutandosi con i diagrammi di Venn, costruire un esempio di tre insiemi finiti A, B, C tali che

$$(A \cup B) \cap (C \setminus A) \neq \varnothing.$$

3. Dire se sono corrette le seguenti uguaglianze fra insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \ : x^2 - 2x + 1 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \ : 6x + 7 > 0\} = \{-1\}.$$

$$\{x \in \mathbb{N} \ : 3 \text{ divide } x\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : 51 \text{ divide } x\} = \varnothing.$$

4. Dire se nell' universo $\mathbb{N}$ valgono le seguenti implicazioni logiche rispetto alla variabile x, motivando la risposta

1) $x \neq 4 \Longrightarrow x^2 \neq 16$;

2) $x > 3 \Longrightarrow x^3 \neq 27$.

Dire se valgono o no le implicazioni inverse

3) $x^2 \neq 16 \Longrightarrow x \neq 4$;

4) $x^3 \neq 27 \Longrightarrow x > 3$.

Ripetere, per ciascuna delle quattro, nell'universo $\mathbb{R}$ evidenziando le differenze.

5. Dimostra che per ogni A, B insiemi vale

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

6. Considera $A = \{1, 2, a\}$ e $B = \{2, 1, 3\}$. Dire quanti elementi contiene $A \times B$ e quali delle seguenti affermazioni è vera:

1) $(1, 1) \in A \times B$;

2) $(1, 1) \in B \times A$;

3) $(a, a) \in A \times B$;

4) $(a, a) \in A^2$;

5) $(A \times B) \cap (B \times A)$ è un singoletto.

Determina esprimendolo, se possibile, per elencazione

$$\{(x, y) \in A \times B : x \neq y\}.$$

Svolgimento

1. Facendo alcuni esperimenti sembra plausibile che la proposizione sia vera. Procediamo quindi alla sua dimostrazione dopo essere passati alla sua forma contronominale. In altre parole proviamo che

$$A = \varnothing \Rightarrow A \cap B \neq A \setminus B$$

Per ipotesi abbiamo dunque $A \neq \varnothing$. Pertanto esiste $x \in A$. Ci sono due possibilità per l'appartenenza di x a B e le dobbiamo contemplare entrambe.

Se $x \in B$ allora, per definizione di intersezione, $x \in A \cap B$. Contemporaneamente, per definizione di insieme differenza, si ha $x \notin A \setminus B$ in quanto non è soddisfatta la richiesta $x \notin B$. Quindi abbiamo che x sta in uno solo dei due insiemi in esame e concludiamo che $A \cap B \neq A \setminus B$.

Se $x \notin B$ allora, per definizione di intersezione, $x \notin A \cap B$. Contemporaneamente, per definizione di insieme differenza, si ha $x \in A \setminus B$. Quindi abbiamo che x sta in uno solo dei due insiemi in esame e concludiamo nuovamente che $A \cap B \neq A \setminus B$.

Osservazione Ci sono altri modi di provare la proposizione ma sono in sostanza identici a quello visto. Una possibilità potrebbe essere provare

$$A \cap B = A \setminus B \Rightarrow A = \varnothing.$$

ragionando per assurdo ed esordire così. Per assurdo valga $A \cap B = A \setminus B$ e, per assurdo, si supponga $A \neq \varnothing$.....

2. Ci sono tantissimi modi di costruire l'esempio richiesto ma siamo chiamati ad esibirne uno. Prendiamo

$$A = \varnothing, \qquad B = \{1\}, \qquad C = \{1, 2\}.$$

Otteniamo

$$A \cup B = \{1\}$$

e

$$C \setminus A = \{1, 2\}.$$

Quindi

$$(A \cup B) \cap (C \setminus A) = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \neq \varnothing.$$

3. Abbiamo

$$\{x \in \mathbb{R} \ : x^2 - 2x + 1 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : (x-1)^2 \leq 0\} = \{1\}$$

mentre

$$\{x \in \mathbb{R} \ : 6x + 7 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : x > -7/6\}$$

per cui

$$\{x \in \mathbb{R} \ : x^2 - 2x + 1 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \ : 6x + 7 > 0\} = \{1\} \neq \{-1\}.$$

Concludiamo che la prima uguaglianza non è corretta.

Passiamo alla seconda uguaglianza. Anch'essa non è corretta e per dimostrarlo basta trovare un elemento che sta in

$$A := \{x \in \mathbb{N} \ : 3 \text{ divide } x\}$$

e non sta in

$$B := \{x \in \mathbb{N} : 51 \text{ divide } x\}.$$

Questo è davvero semplice: prendiamo 3. Abbiamo che $3 \in A$ e $3 \notin B$. Infatti 3 è multiplo di 3 ma non di 51.

Osservazione Si ha

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ : 3 \text{ divide } x\} = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = 3k\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{N} : 51 \text{ divide } x\} = \{x \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = 51m\}.$$

Notiamo che se $x \in B$ allora $x = 51m = 3 \cdot 17 \cdot m = 3(17m) = 3k \in A$, dove $k = 17m$. Questo ci dice che $B \subseteq A$. Questo consente di capire meglio la "posizione reciproca" dei due insiemi da considerare. Aver lavorato un po' di più in questo modo consente di capire non solo che $A \setminus B$ è non vuoto (come fatto sopra per svolgere l'esercizio richiesto) ma di trovare una sua chiara e semplice proprietà caratteristica. Infatti possiamo dire

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \ : 3 \text{ divide } x, 17 \text{ non divide } x\}.$$

Vedete come più si lavora più conoscenze si possono acquisire sull'insieme in gioco. Tuttavia è importante capire cosa veramente ci venga richiesto ed evitare di fare "troppo". Per rispondere all'esercizio era sicuramente sufficiente (e preferibile!) notare solo $3 \in A \setminus B$.

4. Poniamoci in $\mathbb{N}$. Per la 1) lavoro in forma contronominale e provo che

$$x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4.$$

Questo perché lavorare col simbolo di $=$ è più semplice che col simbolo di $\neq$. Infatti sappiamo da sempre lavorare con le equazioni! Ora se $x^2 = 16$, abbiamo $x = -4, 4$ e l'unica soluzione fra le due che sta in $\mathbb{N}$ è 4. Pertanto abbiamo provato che in $\mathbb{N}$ la

$$x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4$$

è vera. Appare chiaro dal ragionamento fatto che invece in $\mathbb{R}$ la

$$x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4$$

è falsa.

Passiamo alla 2) cioè a

$$x > 3 \Longrightarrow x^3 \neq 27.$$

Poiché elevare al cubo è funzione crescente abbiamo che $x > 3 \Longrightarrow x^3 > 3^3$ ossia $x > 3 \Longrightarrow x^3 > 27$. Questo vale sia in $\mathbb{N}$ che in $\mathbb{R}$. Ora senza dubbio se $x > 27$, in particolare si ha $x \neq 27$. Quindi

$$x > 3 \Longrightarrow x^3 \neq 27$$

vera sia in $\mathbb{N}$ che in $\mathbb{R}$.

Osservazione La scrittura sopra non ha senso in $\mathbb{C}$ perché in $\mathbb{C}$ manca la nozione di $<$ e quindi non posso considerare la proprietà $x > 3$.

Passiamo ora alle cosiddette implicazioni inverse.

3) $x^2 \neq 16 \Longrightarrow x \neq 4$;

4) $x^3 \neq 27 \Longrightarrow x > 3$.

La 3) in forma contronominale diventa $x = 4 \Longrightarrow x^2 = 16$ che è sicuramente vera sia in $\mathbb{N}$ che in $\mathbb{R}$. Notate che intimisticamente sto dicendo

$$\{4\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 16\}$$

e tale inclusione vale perché l'unico elemento in $\{4\}$ sicuramente soddisfa la proprietà caratteristica $x^2 = 16$ essendo vero che $4^2 = 16$.

La 4) è falsa sia in $\mathbb{N}$ che in $\mathbb{R}$ perché preso $x = 1$ ho che è soddisfatta la proprietà $x^3 \neq 27$ in quanto $1^3 = 1 \neq 27$ e ovviamente non è invece soddisfatta la proprietà $x > 3$ in quanto $1 > 3$ è falso.

5. I diagrammi di Venn evidenziano la verità di quanto affermato. Procediamo con la dimostrazione lavorando per doppia inclusione. Iniziamo con

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Sia $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Allora $x \in A \cup B$ ma $x \notin A \cap B$. Pertanto x appartiene ad A oppure a B ma non ad entrambi. Pertanto o sta in A ma non in B, ossia $x \in A \setminus B$, oppure sta in B ma non in A, ossia $x \in B \setminus A$. Quindi $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Proseguiamo con

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Sia $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Allora $x \in A \setminus B$ oppure $x \in B \setminus A$. Nel primo caso abbiamo $x \in A$ e $x \notin B$. Pertanto $x \notin A \cap B$ ma certamente $x \in A \cup B$ dato che $A \cup B$ contiene A. Nel secondo caso abbiamo $x \in B$ e $x \notin A$. Pertanto $x \notin A \cap B$ ma certamente $x \in A \cup B$ dato che $A \cup B$ contiene B.

6. Si ha $|A \times B| = 9$ perché sia A che B contengono 3 elementi. Le affermazioni $1), 2)$ sono vere, la 3) no, la 4) è vera. La 5)è falsa perché $(1, 2)$ e

$(2, 1)$ sono due elementi distinti che appartengono sia a $A \times B$ che a $B \times A$ per cui l'intersezione di tali insiemi non è un singoletto.

Si ha

$$\{(x, y) \in A \times B : x \neq y\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (a, 2), (a, 1), (a, 3)\}.$$