Homework 2 - Algebra Lineare e geometria analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)
Assegnato 20 Ottobre 2017 - consegna martedì 24 Ottobre 2017.

1. Provare che

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\14\\4\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

2. Dire perchè il vettore

$$\begin{pmatrix}7\\-1\\12\\6\end{pmatrix}$$

non è sicuramente esprimibile come combinazione lineare dei vettori

$$\begin{pmatrix}1\\4\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\8\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\4\\0\\13\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\-12\end{pmatrix}$$

3. Provare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono indipendenti

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo F e sia $v \in V \setminus \{0\}$. Provare che se $av = bv$ allora $a = b$.

5. Provare che

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$$

è una base di $\mathbb{R}^2$, mentre non lo è

$$\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right)$$

Si rappresenti la situazione geometrica e si spieghi anche in base ad essa i motivi del risultato ottenuto.

6. Provare che i seguenti vettori di $\mathbb{Q}^3$,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono dipendenti ed esprimerne uno come combinazione lineare dei restanti.

7. Elencare gli elementi dello spazio vettoriale $V = F_2^3$. Dire se in tale spazio vettoriale sono dipendenti o no i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$