Homework 2 - Algebra Lineare e geometria analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)
Assegnato 20 Ottobre 2017 - consegna martedì 24 Ottobre 2017.

1. Provare che

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\14\\4\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

2. Dire perchè il vettore

$$\begin{pmatrix}7\\-1\\12\\6\end{pmatrix}$$

non è sicuramente esprimibile come combinazione lineare dei vettori

$$\begin{pmatrix}1\\4\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\8\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\4\\0\\13\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\-12\end{pmatrix}$$

3. Provare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono indipendenti

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo F e sia $v \in V \setminus \{0\}$. Provare che se $av = bv$ allora $a = b$.

5. Provare che

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$$

è una base di $\mathbb{R}^2$, mentre non lo è

$$\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right)$$

Si rappresenti la situazione geometrica e si spieghi anche in base ad essa i motivi del risultato ottenuto.

6. Provare che i seguenti vettori di $\mathbb{Q}^3$,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono dipendenti ed esprimerne uno come combinazione lineare dei restanti.

7. Elencare gli elementi dello spazio vettoriale $V = F_2^3$. Dire se in tale spazio vettoriale sono dipendenti o no i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento 1. Poniamo, per sintesi di scrittura

$$S_1 := \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\14\\4\end{pmatrix}\right\}$$

e

$$S_2 := \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Osserviamo che $\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} \in S_1$ in quanto

$$\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\14\\4\end{pmatrix}.$$

Ne segue subito $S_2 \subseteq S_1$. Infatti il generico elemento v in S_2 è dato da

$$v = a\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e quindi possiamo scrivere

$$v = a\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = a\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right) + b\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= (a+b)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \in S_1.$$

Analogamente se vediamo che

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\14\\4\end{pmatrix} \in S_2$$

otterremo l'altra inclusione $S_1 \subseteq S_2$ e quindi avremo $S_1 = S_2$. Ora si vede subito che

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

L'altro vettore va controllato con un po' più di lavoro. Chiediamoci se esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix}-1\\14\\4\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Ciò significa

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 4x+2y \\ x \end{pmatrix}.$$

Il corrispondente facile sistema che non stiamo a scrivere ha come soluzione $x = 4$, $y = -1$.

2. Tutti i vettori in lista hanno terza componente 0 e quindi una qualunque loro combinazione lineare avrà anch'essa terza componente 0. Ma il vettore

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

non ha terza componente 0. Quindi non può essere combinazione lineare dei vettori dati.

3. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e vediamo che necessariamente si ha $a = b = c = 0$. Deve aversi

$$\begin{pmatrix} -a+c \\ 4a+5b \\ a-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora l'uguaglianza a livello di prima componente comporta $a = c$ e quella a livello terza componente comporta $a = 2c$. Ne segue $c = 2c$ da cui $c = 0$ e quindi anche $a = 0$. Ora guardando la seconda componente si ha pure

$$b = -4/5a = -4/5 \cdot 0 = 0.$$

4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo F e sia $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $av = bv$. Allora sommando ai due membri l'opposto $-bv$ di bv si ottiene

$$av - bv = bv - bv$$

cioè usando uno degli assiomi di spazio vettoriale

$$(a-b)v = 0.$$

Ma sappiamo da un teorema dimostrato che se un prodotto fra uno scalare e un vettore è zero deve essere zero uno dei due. Quindi, dato che per ipotesi $v \neq 0$, deduciamo che $a - b = 0$ ossia $a = b$.

5. Consideriamo
$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right).$$
I due vettori in tale lista ordinata non sono proporzionali perché
$$\frac{\sqrt{2}}{1}\neq\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$
Infatti il primo di tali numeri è positivo mentre il secondo è negativo.

Quindi $\mathcal{B}$ è costituita da due vettori indipendenti. Poiché $\dim\mathbb{R}^2=2$ questa informazione è sufficiente a concludere che $\mathcal{B}$ sia una base di $\mathbb{R}^2$.

Si ha invece
$$\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{-1}{-\sqrt{2}/2}.$$
Infatti $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ e anche $\frac{-1}{-\sqrt{2}/2}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Quindi i vettori in $\mathcal{B}'$ sono proporzionali e quindi dipendenti. Pertanto non possono costituire una base.

6. I vettori di $\mathbb{Q}^3$ da considerare
$$\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$$
sono $4>\dim\mathbb{Q}^3=3$ e quindi sono sicuramente dipendenti. Vediamo quale (almeno uno ma non sappiamo chi...) possa esprimersi come combinazione lineare dei restanti. Troviamo una combinazione lineare non banale di essi che produca il vettore nullo.
$$x\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Si perviene al sistema omogeneo
$$\begin{cases}-x+z+3t=0\\4x-2y+z+t=0\\x+3y-2z+6t=0\end{cases}$$
Sappiamo ancor prima di cominciare che troveremo almeno una variabile libera. Usiamo l'algoritmo di Gauss (voi dovevate farlo per via elementare faticando un po'...) ma ormai abbiamo questo strumento. La matrice incompleta è
$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1&3\\4&-2&1&1\\1&3&-2&6\end{pmatrix}$$

la completa si ottiene aggiungendo una colonna di zeri che resta invariata durante l'algoritmo e quindi possiamo fare a meno di annotarla. Facciamo passo base con pivot -1 e moltiplicatori $4, 1$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Passiamo sulla seconda riga e facciamo passo base con pivot -2 e moltiplicatore $3/2$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 13/2 & 57/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice è già a scala. Conviene però semplificare l'ultima riga avvalendosi della possibilità di moltiplicare per 2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 57 \end{pmatrix}.$$

La matrice è ovviamente ancora a scala. Contiamo i pivot: sono 3 e precisamente $-1, -2, 13/2$. Nell'ultima colonna non cadono pivot quindi la corrispondente variabile è libera (t è libera). Assegnando t come vogliamo, purché non 0, otterremo una soluzione non banale per il nostro sistema. Prendiamo $t = 1$ e troviamo, $13z = -57$ da cui $z = -57/13$. Salendo sulla seconda equazione ricaviamo $-2y + 5 \cdot (-57/13) + 13 = 0$, ossia $y = -58/13$. Infine la prima equazione $-x - 57/13 + 3 = 0$ fornisce $x = -18/13$.

Abbiamo allora

$$-18/13 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 58/13 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 57/13 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scopriamo che ogni vettore può esprimersi come combinazione lineare degli altri perché nessuno fra gli x, y, z, t ottenuti è 0. Ricaviamo l'ultimo

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 18/13 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 58/13 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 57/13 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

7. Si ha

$$F_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

In particolare $|F_2^3| = 8$.

Scriviamo una combinazione lineare dei vettori dati ossia

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in F_2 = \{0, 1\}$. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} a+c \\ b+c \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$$

con le incognite che possono assumere solo i valori 0, 1. Ricaviamo dalla prima $a = -c$ e notiamo che dato cha siamo in F_2 si ha $-c = c$ per ogni $c \in F_2$. Infatti $0+0=0$ e anche $1+1=0$. Sostituisco nella terza equazione e ottengo $b+c=0$. Tale equazione è identica alla seconda e quindi è inutile e la possiamo eliminare. Si resta con $a = c, b = -c$ ossia $a = c, b = c$. Poiché su c non vi sono condizioni lo possiamo assegnare liberamente e determinare comunque una soluzione per il sistema. In altre parole l'insieme S di soluzioni del nostro sistema è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Fra esse ne abbiamo una non banale quindi i vettori sono **dipendenti**. Possiamo esplicitare che risulta

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In effetti questo era apparente da subito....