I intermedia di Algebra Lineare

(Dott.ssa D. Bubboloni) 30 ottobre 2015

Avete due ore a disposizione. Potete scegliere 5 fra i 6 esercizi proposti. Giustificate e motivate le vostre risposte.

1. Scrivere come un opportuno *Span* l'insieme S delle soluzioni del seguente sistema.

$$\begin{cases} x-y &= 3z+2t \\ x-z &= 4y-t \end{cases}$$

Utilizzare il risultato ottenuto per dire se S è uno spazio vettoriale. In caso affermativo calcolarne la dimensione.

2. Trovare il rango della matrice al variare di $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} b & -1 & 4 \\ -2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

Dedurre per quale valore di b i vettori colonna della matrice sono linearmente indipendenti.

3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i sottoinsiemi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad xy = z^2 \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad y = x^2, z = 0 \right\}$$

e

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad z = 0 \right\}.$$

Si provi che, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite in $\mathbb{R}^3$, gli insiemi W, T non sono spazi vettoriali, mentre U lo è.

4. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x - y - az = a - 2 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Successivamente dire se:

- esistono valori di a per cui il sistema è omogeneo e in tal caso esplicitarne le soluzioni;
- è vera la proposizione: $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c. le soluzioni sono ∞^2.

5. Sia $M_2(\mathbb{R})$ e, per $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ si denoti con AB il loro prodotto righe per colonne. Dire quali proprietá sono vere e quali false fra le seguenti.

1) $\exists A \in M_2(\mathbb{R})$ tale che, $\forall B \in M_2(\mathbb{R})$, $AB = BA$;

2) $AB = 0 \Longrightarrow A = 0$ oppure $B = 0$;

3) Se il sistema

$$AX = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ammette soluzione $X \in \mathbb{R}^2$, allora $rank(A) = 2$;

4) $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R}),\ A(B + C) = AB + AC$.

6. Dati i vettori di $\mathbb{Q}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dire se costituiscono:

a) una base

b) un sistema di generatori

per $\mathbb{Q}^4$.