Homework 3 a.a. 2017/18

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 4 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-2 \\ 0}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 4 & 4 & y-2x \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & \frac{y-2x}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & \frac{y-2x}{4} - z \end{array}\right)$$

S_1 ha eq cartesiana $y - 2x - 4z = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-2 \\ 0}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & x \\ 0 & -12 & -9 & y-2x \\ 0 & -1 & 0 & z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & x \\ 0 & -1 & 0 & z \\ 0 & 12 & 9 & 2x-y \end{array}\right) \xrightarrow{12} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & x \\ 0 & -1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 9 & 2x-y+12z \end{array}\right)$$

$S_2 = \mathbb{R}^3$ perché non vi sono condizioni su x, y, z

Ovviamente $S_2 \supseteq S_1$.

2. Il sistema può scriversi in forma normale

$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ x - y - z - 2t = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Risolviamolo via eliminazione di Gauß

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ -2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice è a scala
e presenta 3 pivot
e z variabile libera

$$\boxed{t = 0}$$

$$3y + 2z + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{3} z}$$

$$x + \frac{2}{3} z - z = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3} z}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} z \\ -2/3\, z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Poiché S è uno span $\Rightarrow$ è un sottospazio

e una base è $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -a & a-2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c}-2\\-1\end{array} \xrightarrow[\text{EG}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1-2a & -a+2 & a-2 \\ 0 & -3-a & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{EG}]{C_2 \leftrightarrow C_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 2-a & -2a-1 & a-2 \\ 0 & 0 & -3-a & 0 \end{array}\right)$$

- Se $a \neq 2$ la matrice è a scala e ha

pivot certi: $1, 2-a$. Notiamo che $-3-a=0$ per $a=-3$. Pertanto se $a \neq -3$ c'è un terzo pivot e il sistema ha sol unica. Se $a=-3$ si ha $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$. Ora z è libera e si hanno ∞^1 sol.

- Se $a = 2$ la matrice è $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$

che non è ancora a scala. Tuttavia ci sono due righe uguali $\Rightarrow$ una può essere eliminata e si hanno ∞^1 soluzioni con y variabile libera.

MORALE: se $a \notin \{2,-3\}$ si ha soluzione unica
se $a \in \{2,-3\}$ si hanno ∞^1 soluzioni

Il sistema è omogeneo per $a=2$

Troviamo le soluzioni ricordando che y è libera:

$$\boxed{z=0}$$

$$x-y+0=0 \implies \boxed{x=y}$$

Quindi

$$S_{a=2} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 0 \\ -3 \\ \xrightarrow{EG} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & +1 & +1 & -2 & +2 \\ 0 & -8 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)^{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -17 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1/7 \\ -1/7 \\ \xrightarrow{EG\uparrow} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 17/7 & -6/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 7 & -17 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ \xrightarrow{EG\uparrow} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & -17/7 & 13/7 \end{array}\right)$$

$$-2 + \frac{1}{7}(+17) = \frac{-14+17}{7} = \frac{3}{7}$$

$$2 - \frac{1}{7}\cdot 13 = \frac{14-13}{7} = \frac{1}{7}$$

$$1 - \frac{1}{7}13 = \frac{7-13}{7} = -\frac{6}{7}$$

Quindi entrambi i sistemi hanno sol unica data da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3/7 \\ -17/7 \end{pmatrix}$ per il primo sistema e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/7 \\ 13/7 \end{pmatrix}$ per il secondo sistema.

5. TESTO ORIGINARIO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 21 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[EG]{=!} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 14 & 8 \end{array}\right)^{2} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right)$$

L'ultima eq è $0x + 0y + 0z + 0t = 16$

ossia $0 = 16$ impossibile.

Pertanto $S = \phi$

5.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 21 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{EG}]{\substack{-1 \\ -1}}$$

NUOVO TESTO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 14 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ci sono ∞^2 soluzioni ; v.l. z e t.

$$-2y = 3z + 7t + 4 \to \boxed{y = -\frac{3}{2}z - \frac{7}{2}t - 2}$$

$$x - \frac{3}{2}z - \frac{7}{2}t - 2 + 2z + 7t = 0$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}z - \frac{7}{2}t + 2}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2\, z + \frac{7}{2}t + 2 \\ -3/2\, z - \frac{7}{2}t - 2 \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6. I vettori sono $4 = \dim \mathbb{Q}^4$ quindi basta controllare che siano indipendenti per ottenere che siano una base.

Ordiniamoli in modo da utilizzare bene EG senza guai con 0 in posizione a_{11}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -3 \\ 1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 12 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

è a scala con 4 pivot $\Rightarrow$ nessuna V.L.

$\Rightarrow$ il S.O. di matrice A ha soluzione unica ossia la banale $\Rightarrow$ vettori INDIP.

7. $$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid xy = z^2 \right\}$$

Nota che $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono in W

ma la loro somma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W \Rightarrow W$ non è ssp.

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - 3z = 0,\; y + 2t = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3z \\ -2t \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{è ssp.}$$

Nota anche $\dim Z = 2$.