Esame Algebra Lineare e geometria analitica

(Prof.ssa D. Bubboloni)
7 Febbraio 2018.

Avete due ore e mezza di tempo. Potete scegliere 6 esercizi fra i 7 proposti per avere punteggio pieno.

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f([x,y,z]^T) = \begin{pmatrix} x & +3y & \\ x & -y & +2z \\ & y & +4z \end{pmatrix}$$

provare che è lineare. Trovarne nucleo e immagine. Dire se f è biunivoca.

2. Discutere il seguente sistema sfruttando il teorema di Rouche-Capelli e la teoria del determinante (suggerimento: si parta da considerazioni sulla matrice incompleta) oppure la riduzione di Gauss

$$\begin{cases} ax + y - z & = & 0 \\ x - y + 2az & = & a+1 \\ x + z & = & 1 \end{cases}$$

3. Dati i vettori di $\mathbb{Q}^4$ seguenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

dire se costituiscono:

a) una base

b) un sistema di generatori per $\mathbb{Q}^4$.

4. Scrivere la forma quadratica Q_A su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x,y,z) = x^2 + 4xy + 6yz + 8xz + 2y^2 + z^2$$

e stabilire se è definita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che $p(x,y,z) > 0$ per ogni $x,y,z \in \mathbb{R}$?

5. Provare che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ammette 0 come autovalore di molteplicitá 2. Trovare i restanti autovalori. Dire se esiste una matrice invertibile e ortogonale C tale che $C^{-1}MC$ sia diagonale (non è richiesto di esplicitare C). Esibire, se esistono, due autovettori di M di norma 1 formanti un angolo di $\pi/3$.

6. Si consideri l' applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare $\mathrm{sp}(A)$ e trovare gli autospazi. Dire se $\mathbb{R}^3$ ammette una base di autovettori di L_A e in caso affermativo esibirla.

7. Sia

$$S := \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Giustificare il fatto che S sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e trovane una base e la dimensione. Determinare l'equazione cartesiana di S.

Svolgimento

1. La funzione f è tale che, posto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

si ha $f = L_A$ e quindi è lineare. Troviamo l'immagine cercandone l'equazione cartesiana. Da tale procedimento si evidenzierà bene anche il nucleo. Si tratta di capire per quali $X' = (x', y', z')^T \in \mathbb{R}^3$ sia compatibile il sistema $AX = X'$. Usiamo EG sulla matrice completa di tale sistema, ossia su

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & x' \\ 1 & -1 & 2 & y' \\ 0 & 1 & 4 & z' \end{array}\right)$$

ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & x' \\ 0 & -4 & 2 & y'-x' \\ 0 & 1 & 4 & z' \end{array}\right)$$

e poi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & x' \\ 0 & -4 & 2 & y'-x' \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & z' + \frac{1}{4}(y'-x') \end{array}\right).$$

Poiché non si è creato lo zoccolo di zeri in basso, si deduce che il sistema ammette soluzione per ogni X', ossia

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

Ora se prendiamo $X' = 0$ vediamo il nucleo. La matrice ha tre pivot e quindi si ha soluzione unica, ossia

$$\operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

Ne segue che f è sia suriettiva che invettiva e quindi biunivoca.

2. Calcoliamo il determinante della matrice incompleta. Si ha

$$\det(A) = a - 2.$$

Quindi, se $a \neq 2$ il rango della incompleta è 3. Ma anche quello della completa perché non può essere più grande di 3 e contiene come matrice minore l'incompleta. Quindi le due matrici hanno uguale rango e le soluzioni esistono per il teorema di Rouchè-Capelli. Esse sono $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$. Si ha insomma soluzione unica. Per $a = 2$ vediamo cosa diventa il sistema e analizziamolo con l'algoritmo di Gauss sulla matrice completa che è

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 9/2 & 3 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right).$$

Dividiamo per $-3/2$ la seconda riga e moltiplichiamo per 2 la terza ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Si vedono due righe uguali e quindi possiamo eliminarne una restando con

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

z è variabile libera e le soluzioni sono ∞^1.

Riassumendo: per $a \neq 2$, soluzione unica; per $a = 2$, ∞^1 soluzioni.

3. I vettori di $\mathbb{Q}^4$, essendo $4 = \dim\mathbb{Q}^4$, formano una base se e solo se sono un sistema di generatori. Quindi basta controllare che siano base. Ad esempio via riduzione di Gauss contando i pivot (che devono essere 4) oppure calcolando il determinante della matrice che li ha come colonne (che deve essere diverso da 0).

Calcoliamo

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

usando lo sviluppo di Laplace rispetto alla seconda riga. Otteniamo 0. Quindi

I vettori dati non sono né una base né un sistema di generatori.

4. Basta considerare la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

per avere $p(x, y, z) = X^T AX = Q_A(X)$, dove $X = (x, y, z)^T$. Guardando la matrice abbiamo sicuramente che Q_A non è semidefinita negativa. Potrà dunque essere semidefinita positiva (propria o no) o indefinita. Per capirlo dobbiamo trovare il segno degli autovalori. Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$p_A(x) = \det(A-xI) = (1-x)[(2-x)(1-x)-9]-2(2-2x-12)+4(6-8+4x) = \cdots$$

$$= -x^3 + 4x^2 + 24x + 5.$$

Si nota una variazione corrispondente, per il criterio di Cartesio, ad una radice positiva. Le altre due radici sono quindi negative e pertantoQ_A **è indefinita. E' quindi falso che risulti** $p(x,y,z) > 0$ **per ogni** $x,y,z \in \mathbb{R}$.

5. Troviamo gli autovalori di M, ossia le radici del polinomio caratteristico $p_M(x) = \det(M - xI)$. Si ha

$$\mathbf{p_M(x)} = \det \begin{pmatrix} 3-x & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (3-x)\det \begin{pmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix} - 3\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (3-x)^2[(1-x)^2-1]-9[(1-x)^2-1] = [(1-x)^2-1][(3-x)^2-9] = (x^2-2x)(x^2-6x) =$$

$$= \mathbf{x^2(x-2)(x-6)}.$$

La molteplicità algebrica di 0 in tale polinomio è 2. **Gli altri autovalori sono** 2 **e** 6. **La matrice** C **come richiesto esiste per il teorema spettrale.** Sappiamo che autovetture relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. Quindi se ne esistono due formanti invece angolo di $\pi/3$ stanno necessariamente in uno stesso autospazio. Se l'autospazio ha dimensione 1 non abbiamo speranze di trovarli dato che due autovettori entro uno stesso autospazio di dimensione 1 sono necessariamente proporzionali ossia formano angolo 0. Quindi la nostra ricerca va fatta nell'autospazio V_0 associato a 0. Troviamolo risolvendo il sistema omogeneo di matrice incompleta M. Essendoci righe ripetute abbiamo che basta risolvere il sistema di matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che è a scala e presenta due variabili libere. Abbiamo quindi che

$$V_0 = \{(x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 : x+y = 0, z+t = 0\} = \{(x,-x,z,-z)^T \in \mathbb{R}^4 : x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Prendiamo due elementi in V_0, $v = (a,-a,b,-b)^T$ e $w = (c,-c,d,-d)^T$ e chiediamo che abbiano norma 1, ossia $2a^2+2b^2 = 1$ e $2c^2+2d^2 = 1$. Semplificando, la richiesta è $a^2+b^2 = 1/2$ e $c^2+d^2 = 1/2$. Chiediamo ora anche che il coseno del loro angolo sia pari a $\cos(\pi/3) = 1/2$. questa richiesta, avendo a che fare con vettori di norma 1 significa semplicemente che il prodotto scalare fra v e w valga $1/2$.

Quindi abbiamo le seguenti tre richieste a sistema

$$\begin{cases} a^2+b^2 & = & 1/2 \\ c^2+d^2 & = & 1/2 \\ ac+ac+bd+bd & = & 1/2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} a^2+b^2 &= 1/2 \\ c^2+d^2 &= 1/2 \\ ac+bd &= 1/4 \end{cases}$$

Dato che non interessa trovare tutte le possibili soluzioni ma esibirne una, fissiamo una soluzione facile rispetto ad a e b per la prima richiesta e troviamo solo c, d in seguito. Prendiamo $b = 0$ e $a = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cerchiamo ora una soluzione per quello che resta, ossia per

$$\begin{cases} c^2+d^2 &= 1/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}c &= 1/4 \end{cases}$$

Si trova $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$ dalla seconda e, sostituendo nella prima equazione, si ottiene $d^2 = 1/2 - 1/8 = 3/8$. Quindi una scelta per d può essere $d = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Abbiamo così trovato i due vettori richiesti. Essi sono

$$v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^T, \qquad w = (\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4})^T.$$

6. $sp(A) = \{1, 3\}$ perché la matrice è triangolare. Notiamo che 1 ha molteplicità algebrica 2. Quindi l'esistenza di una base di autovettori dipende dall'essere o no anche la dimensione dell' autospazio associato a 1 anch'essa 2 oppure solo 1.

Troviamo V_1 risolvendo il sistema omogeneo di incompleta

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equivalente a quello di incompleta

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Essa è a scala ma si ha una sola variabile libera perché ci sono due pivot. Quindi $\dim V_1 = 1 < 2$. Pertanto **non esiste una base di autovettori di** L_A. Abbiamo

$$V_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = 0, 2x + 5y = 0\} = \{(-\frac{5}{2}y, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathrm{span}\{(-\frac{5}{2}, 1, 0)^T\}.$$

Troviamo ora V_3 risolvendo il sistema omogeneo di incompleta

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La prima colonna di zeri ci dice che la prima variabile x è libera. Dopodiché si ha (necessariamente) $z = 0$ e $y = 0$. Quindi

$$V_3 = \{(x, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, 0)^T\}.$$

7. Sappiamo che tutti gli span sono sottospazi e quindi anche quello proposto lo è. Volendo essere meno pigri si può notare che la combinazione lineare di due combinazioni lineari è ancora una combinazione lineari e che S è non vuoto contenendo la combinazione lineare con tutti i coefficienti 0 che produce il vettore nullo. Per rispondere alle domande conviene cercare direttamente l'equazione cartesiana. Durante il procedimento vedremo dove cadono i pivot e riconosceremo una base e la dimensione.

Vediamo per quali scelte di x', y', z' reali è compatibile il sistema di completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x' \\ 2 & 3 & 1 & y' \\ -1 & 1 & -3 & z' \end{array}\right).$$

Usiamo EG ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x' \\ 0 & 3 & -3 & y' - 2x' \\ 0 & 1 & -1 & z' + x' \end{array}\right)$$

e poi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x' \\ 0 & 1 & -1 & \frac{y'-2x'}{3} \\ 0 & 1 & -1 & z' + x' \end{array}\right)$$

e infine

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x' \\ 0 & 1 & -1 & \frac{y'-2x'}{3} \\ 0 & 0 & 0 & z' + x' - \frac{y'-2x'}{3} \end{array}\right)$$

Ora abbiamo che i pivot cadono solo sulle prime due colonne, quindi una base per S è data da

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e $\dim S = 2$. L'equazione cartesiana di S si ottiene azzerando il termine noto che fronteggia lo zoccolo di zeri ottenuto nella riduzione, ossia scrivendo

$$5x' - y' + 3z' = 0.$$