

**Esercizio 1**

1) [10 pt] Sia dato un tasso annuale di interesse  $i$ , e sia  $d = iv = i/(1+i)$ . Si fornisca l'espressione del valore in  $t$  di (1 Eu,  $t=0$ ), al variare di  $t \in [0, 1/d]$ , secondo i 4 regimi di capitalizzazione visti a lezione: 1. semplice al tasso  $i$ , 2. sconto commerciale al tasso di sconto  $d$ , 3. mista con capitalizzazione degli interessi ogni 3 mesi e tasso  $i$ , 4. composta al tasso  $i$ .

Si disegnino poi i grafici delle 4 funzioni scritte su uno stesso piano cartesiano, giustificando le uguaglianze, le differenze e l'ordinamento, per  $t < 1$ , in  $t = 1$ , e per  $t > 1$ .

2) [4 pt] Si dimostri come la capitalizzazione composta possa essere ottenuta come limite di quella mista.

**Esercizio 2**

Alla data  $t = 0$  anni si è stipulato un contratto di mutuo di 130 mila Eu che prevede un ammortamento francese di 120 rate mensili, al tasso 4% annuo. In data  $t = 5^-$  anni si ha disponibilità di 70 mila Eu.

1) [4 pt] Calcolare  $R$  e valutare se si è in grado di estinguere il mutuo anticipatamente, sapendo che la banca di riferimento ci farebbe pagare il debito residuo più una penalità di 1.5% di tale debito.

2) [2 pt] A quanto ammonterebbero invece le rate  $R'_j$ ,  $j \geq 60$  se, lasciando invariato  $i$ , si rinegoziasse il mutuo abbattendo di 30 mila Eu il debito residuo, pagando  $R'_{60} = 30 + I_{60}$  al posto di  $R_{60}$ ?

3) [4 pt] Di quanto invece si accorcerebbe la durata dell'ammortamento abbattendo in  $t = 5$  il debito residuo di 30,28515654 mila Eu, mantenendo l'ammontare delle rate successive pari a  $R$ ?

**Esercizio 3**

1) [6,5 pt] Si descriva il funzionamento del BTP Euro i: tipo di scadenze, indice a cui è agganciato il titolo, rendimento garantito, taglio minimo acquistabile, possibilità di stripping. [1 pt]; funzionamento delle cedole, da quale momento è nota la generica cedola, [1 pt]; modalità di rimborso del nominale, [1 pt]; in quale senso viene protetto il potere di acquisto della cedola e del nominale, [2 pt]; quotazione e prezzo di acquisto, rateo interessi [1,5 pt].

2) [1,5 pt] In cosa differisce la rivalutazione del nominale nel BTP euro-i con quella nel BTP Italia?

## SOLUZIONI

**EX 1**

Si vedano le slide delle lezioni fatte in classe.

**EX 2**

1)  $S := 130$ ;  $n := 120$ ;  $i_{12} := 1.04^{1/12} - 1 = .003273740$ ;  $v_{12} := 1/(1.0 + i_{12}) = .9967369424$ ;  $a_n|i_{12} := (1 - v_{12}^n)/i_{12} = 99.10250933$ ;  $R = S/a_n|i_{12} = 1.311773041$ ;

$D_{60-} = \sum_{j=60}^{120} C_j = \sum_{j=60}^{120} C_{60} u_{12}^{j-60} = C_{60} \sum_{\ell=0}^{60} u_{12}^{\ell}$ , ma la sommatoria è il montante, alla data dell'ultimo pagamento, di una rendita unitaria di 61 rate, quindi  $D_{60-} = C_{60} s_{61|i_{12}}$ .

$u_{12} := 1 + i_{12} = 1.003273740$ ;  $C_1 := S i_{12} / (u_{12}^n - 1) = .8861868420$ ;  $C_{60} := C_1 u_{12}^{59} = 1.074663638$ ; allora  $D_{60-} := C_{60} (u_{12}^{61} - 1) / i_{12} = 72.42768357$ . Già qui si vede che non si è in grado di estinguere il mutuo in  $t = 5-$ . Ad ogni modo  $D_{60-} \cdot 1.015 = 73.51409882$ .

2)  $D'_{60} := D_{60-} - 30 = 42.42768357$ , allora  $R' := D'_{60} i_{12} / (1 - v_{12}^{60}) = .7800019071 \approx 0.78$  mila Eu

3)  $x := 30.28515651$ ;  $D''_{60} := D_{60-} - x = 42.14252706$ ; dal mese 61 al mese  $m$  si paga sempre  $R$ , perciò l'equità dell'operazione impone che  $D''_{60} = R a_{m-60|i_{12}}$ , ossia  $\frac{D''_{60}}{R} = \frac{1 - v_{12}^{m-60}}{i_{12}}$ ,  $v_{12}^{m-60} = 1 - \frac{D''_{60}}{R} i_{12}$ ,  $v_{12}^m = (1 - \frac{D''_{60}}{R} i_{12}) v_{12}^{60} := A = .7354822001$ ; quindi  $m = \ln(A) / (\ln(v_{12})) = 94.00000000$ , il che significa che la durata dell'ammortamento diventa di 94 mesi anziché 120, ossia si accorcia di  $120 - 94 = 26$  mesi, cosicché dopo la data  $t = 5$  anni si pagano altre  $94 - 60 = 34$  rate di importo  $R$ .

**EX 3**

Si vedano le slide delle lezioni.