Matematica per le Applicazioni Economiche I, 3 settembre 2018
Testo d'esame A

La prova ha la durata di un'ora e 45 minuti. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (9 punti)
Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2+3}}.$$

Si ometta lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti)
Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + x - 1$.

(a) (1 punto) Si tracci il grafico di f (si osservi che si tratta di un grafico elementare).

(b) (2 punti) Usando il grafico, si calcolino $f([-1, 1])$ e $f^{-1}([-1, 1])$.

(c) (1 punto) Si stabilisca se f è iniettiva.

(d) (1 punto) Si stabilisca se f è illimitata superiormente.

(e) (1 punto) Si stabilisca se f ammette punti di minimo globale.

(f) (2 punti) Si stabilisca se l'immagine di f è un insieme aperto.

Esercizio 3 (9 punti)

(a) (2 punti) Si enunci il Teorema di Weierstrass.

Si stabilisca successivamente quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false. Si motivino le risposte.

(b) (2 punti) Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ non è continua, allora non ammette punti di massimo globale.

(c) (2 punti) Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora ammette punti di massimo globale.

(d) (3 punti) La funzione

$$h : \left[-\sqrt{2}, e^{23}\right] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \frac{e^x + \sin(x)}{x^2 + 1} \cos\left(x^5\right)$$

ammette almeno un punto di massimo globale.

Esercizio 4 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^4 & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$$

(a) (2 punti) Utilizzando la definizione di derivata si calcoli, se possibile, la derivata di f in 0.

(b) (2 punti) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(-1, 1)$.

(c) (2 punti) Si stabilisca se f è convessa nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Esercizio 5 (8 punti)
Si calcolino i seguenti limiti

(a) (4 punti) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

(b) (4 punti) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{5 + 2x^2 + x^6} - \sqrt{5 + 2x + x^6}\right)$.

Traccia delle soluzioni.

Esercizio 1 (9 punti)

$$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2+3}}.$$

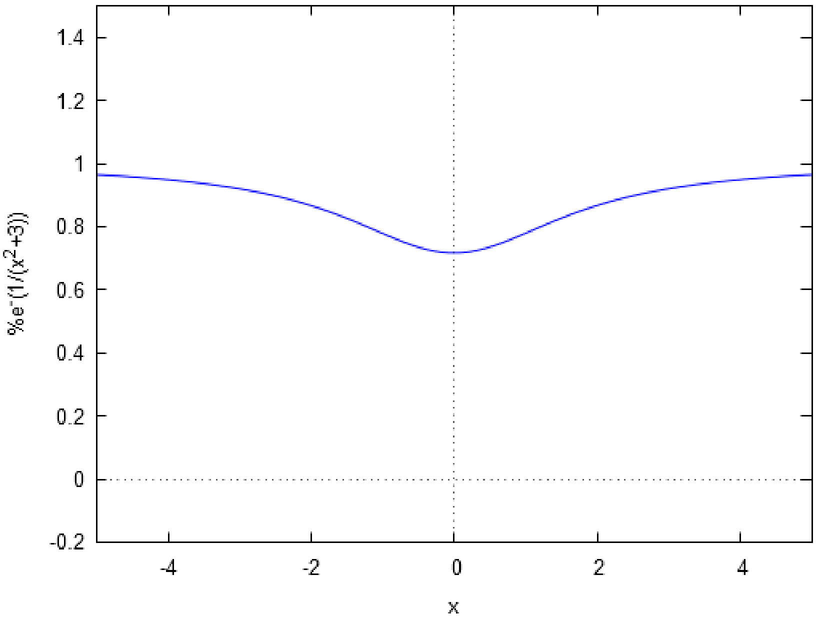

Figure 1:

(i) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Si osservi che la funzione è pari: $f(-x) = e^{\frac{-1}{(-x)^2+3}} = e^{\frac{-1}{x^2+3}} = f(x)$.
(ii) La funzione è strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$; $f(0) = e^{\frac{-1}{3}} \in (0, 1)$.
(iii) La funzione è derivabile e dunque continua su $\mathbb{R}$. La funzione non ammette asintoti verticali.
(iv) Studio del comportamento a $+\infty$ e $-\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{-1}{x^2+3}} = \text{"} e^{\frac{-1}{(+\infty)}} = \text{"} = e^0 = 1.$$

Dunque la funzione ammette $y = 1$ come asintoto orizzontale sia per x che tende a $+\infty$ sia per x che tende a $-\infty$.
(v) Poiché $f(x) = e^{-\frac{1}{(x^2+3)}}$, allora $f'(x) = e^{-\frac{1}{(x^2+3)}}(-1)\left(-\frac{1}{(x^2+3)^2}\right)2x$. Dunque $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$. Dunque f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Inoltre f ha un punto di minimo (globale) in 0.

Esercizio 2.
(a)

$$f(x) = \begin{cases} -x + x - 1 = -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ x + x - 1 = 2x - 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Si osservi che il grafico della funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, -1)$ e l'asse delle ascisse nel punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
(b) Poiché $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$, per la monotonia di f, ben chiara dal grafico, si ha che $f([-1, 1]) = [-1, 1]$. Si ha inoltre che $f^{-1}([-1, 1]) = (-\infty, 1]$.
(c) f è iniettiva se, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si ha che $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Abbiamo allora che f non è iniettiva, ossia esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$; in effetti è sufficiente scegliere $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$ e osservare che $f(-1) = f(0) = -1$.
(d) f è illimitata superiormente se, per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $x_k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_k) > k$. Abbiamo che la funzione f è illimitata superiormente. In effetti, se $k \leq 1$, si prenda, ad esempio, $x_k = 2$ e dunque $f(2) = 3 > k$; se $k > 1$, si prenda $x_k = k$ e dunque $f(k) = 2k - 1 > k$ se e solo se $k > 1$, come abbiamo assunto.

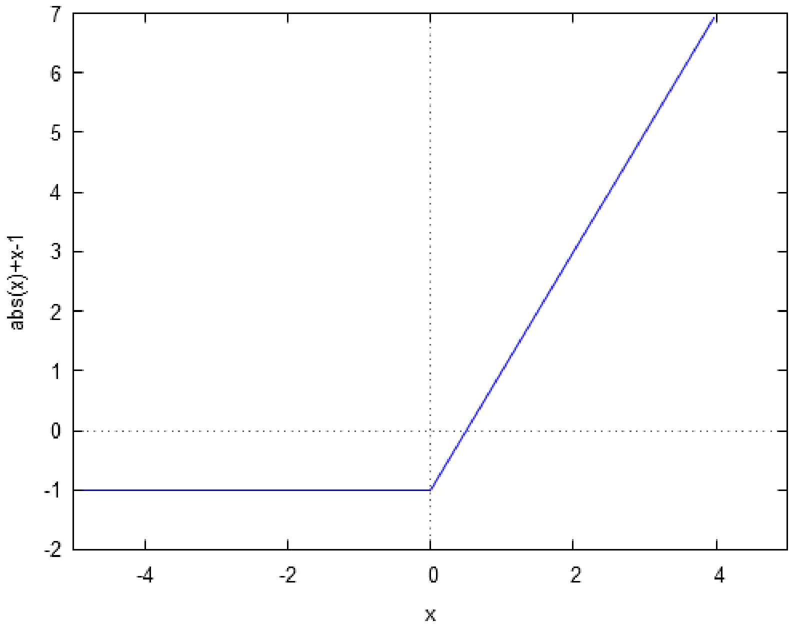

Figure 2:

(e) L'insieme dei punti di minimo globale è $(-\infty, 0]$.
(f) $\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty)$ e dunque non è un insieme aperto perché $-1 \in \mathrm{Im}(f)$, ma -1 non è punto interno di $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 3.
(a) Si veda il libro di testo.
(b) Falso. Si consideri, ad esempio, la funzione

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & se \quad x = 0, \end{cases}$$

Si ha che f non è continua in 0 e ha un punto di massimo globale in 0.
(c) Falso. Si consideri, ad esempio, la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$. Essa è continua ma non ha punti di massimo globale.
(d) Vero. La funzione soddisfa le ipotesi del Teorema di Weierstrass: $\left[-\sqrt{2}, e^{23}\right]$ è un intervallo chiuso e limitato e h è continua perchè somma, composizione e quoziente di funzioni continue con funzione al denominatore diversa da 0.

Esercizio 4.
(a) Poiché

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^4}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^3 = 0,$$

la funzione è derivabile in zero e $f'(0) = 0$.
(b) L'equazione cercata è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; poichè $\frac{df(x)}{dx}_{|x=-1} = 2x_{|x=-1} = -2$, si ha $y = 1 + -2(x+1)$, ovvero

$$y = -2x - 1.$$

(c) E' oppurtuno usare il risultato seguente: se f è derivabile due volte su un intervallo aperto, allora f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$. In effetti, per ogni $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Dunque f è convessa in $(-\infty, 0)$.

Esercizio 5

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{"}\infty\cdot 0\text{"}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x} = 2$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5+2x^2+x^6}-\sqrt{5+2x+x^6}\right) = \text{"}+\infty-\infty\text{"}$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5+2x^2+x^6}-\sqrt{5+2x+x^6}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5+2x^2+x^6}-\sqrt{5+2x+x^6}\right)\left(\sqrt{5+2x^2+x^6}+\sqrt{5+2x+x^6}\right)}{\sqrt{5+2x^2+x^6}+\sqrt{5+2x+x^6}}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5+2x^2+x^6-5-2x-x^6}{\sqrt{5+2x^2+x^6}+\sqrt{5+2x+x^6}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x}{\sqrt{5+2x^2+x^6}+\sqrt{5+2x+x^6}} \overset{(1)}{=}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{5}{x^6}+\frac{2}{x^4}+1}+\sqrt{\frac{5}{x^6}+\frac{2}{x^5}+1}} = \text{"}0\cdot\frac{2}{2}\text{"} = 0$

(1) Si osservi che per x positivo $\sqrt{x^6}=x^3$

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 3 settembre 2018
Testo d'esame B

La prova ha la durata di un'ora e 45 minuti. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (9 punti)
Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2+5}}.$$

Si ometta lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti)
Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - x - 2$.

(a) (1 punto) Si tracci il grafico di f (si osservi che si tratta di un grafico elementare).

(b) (2 punti) Usando il grafico, si calcolino $f([-1, 1])$ e $f^{-1}([-2, 2])$.

(c) (1 punto) Si stabilisca se f è iniettiva.

(d) (1 punto) Si stabilisca se f è illimitata superiormente.

(e) (1 punto) Si stabilisca se f ammette punti di minimo globale.

(f) (2 punti) Si stabilisca se l'immagine di f è un insieme aperto.

Esercizio 3 (9 punti)

(a) (2 punti) Si enunci il Teorema di Weierstrass.

Si stabilisca successivamente quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false. Si motivino le risposte.

(c) (2 punti) Se $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è continua, allora ammette punti di minimo globale.

(b) (2 punti) Se $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ non è continua, allora non ammette punti di minimo globale.

(d) (3 punti) La funzione

$$h : \left[-\frac{e}{27}, \sqrt{e+12}\right] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \frac{3e^x + x^3 - \sin(x)}{x^2+8} \cos(2x+3)$$

ammette almeno un punto di minimo globale.

Esercizio 4 (6 punti)
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$$

(a) (2 punti) Utilizzando la definizione di derivata si calcoli, se possibile, la derivata di f in 0.

(b) (2 punti) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(-1, -1)$.

(c) (2 punti) Si stabilisca se f è concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Esercizio 5 (8 punti)
Si calcolino i seguenti limiti

(a) (4 punti) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan(x)}{x^3}$;

(b) (4 punti) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3 + 2x^2 + x^4} - \sqrt{7 + 2x + x^4}\right)$.

Traccia delle soluzioni.

Esercizio 1 (9 punti)

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2+5}}.$$

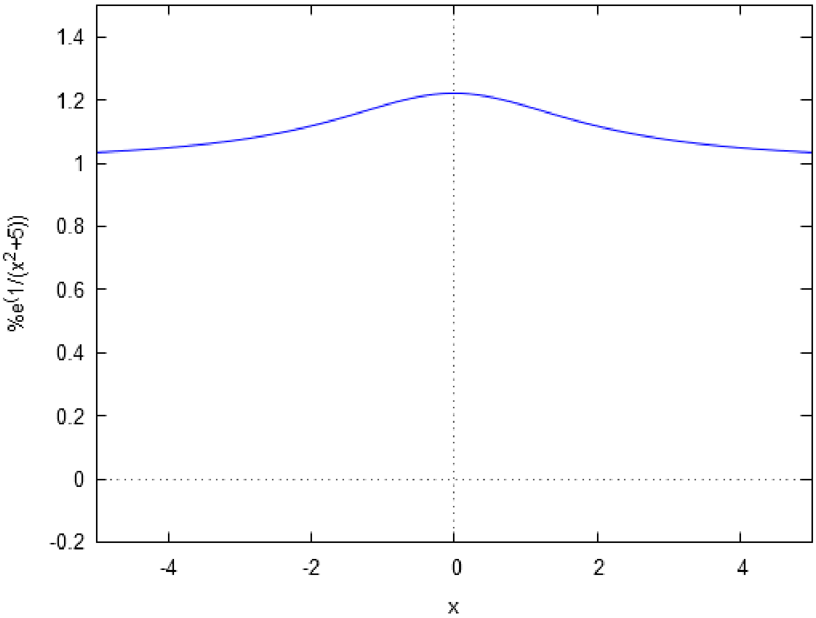

Figure 3:

(i) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Si osservi che la funzione è pari: $f(-x) = e^{\frac{1}{(-x)^2+5}} = e^{\frac{1}{x^2+5}} = f(x)$.
(ii) La funzione è strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$; $f(0) = e^{\frac{1}{5}} > 1$.
(iii) La funzione è derivabile e dunque continua su $\mathbb{R}$. La funzione non ammette asintoti verticali.
(iv) Studio del comportamento a $+\infty$ e $-\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x^2+5}} = \text{"} e^{\frac{1}{(+\infty)}} = \text{"} = e^0 = 1.$$

Dunque la funzione ammette $y = 1$ come asintoto orizzontale sia per x che tende a $+\infty$ sia per x che tende a $-\infty$.
(v) Poiché $f(x) = e^{\frac{1}{(x^2+5)}}$, allora $f'(x) = e^{\frac{1}{(x^2+5)}} \left(-\frac{1}{(x^2+5)^2}\right) 2x$. Dunque $f'(x) > 0$ per ogni $x < 0$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Dunque f è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente decrescente in $[0, +\infty)$. Inoltre f ha un punto di massimo (globale) in 0.

Esercizio 2.
(a)

$$f(x) = \begin{cases} -x - x - 2 = -2x - 2 & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ x - x - 2 = -2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Si osservi che il grafico della funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, -2)$ e l'asse delle ascisse nel punto $(-1, 0)$.
(b) Poiché $f(-1) = 0$ e $f(1) = -2$, per la monotonia di f, ben chiara dal grafico, si ha che $f([-1, 1]) = [-2, 0]$. Si ha inoltre che $f^{-1}([-2, 2]) = [-2, +\infty)$.
(c) f è iniettiva se, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si ha che $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Abbiamo allora che f non è iniettiva, ossia esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$; in effetti è sufficiente scegliere $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$ e osservare che $f(1) = f(0) = -2$.
(d) f è illimitata superiormente se, per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $x_k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_k) > k$. Abbiamo che la funzione f è illimitata superiormente. In effetti, se $k \leq 2$, si prenda, ad esempio, $x_k = -3$ e dunque $f(-3) = 4 > k$; se $k > 2$, si prenda $x_k = -k$ e dunque $f(k) = 2k - 2 > k$ se e solo se $k > 2$, come abbiamo assunto.

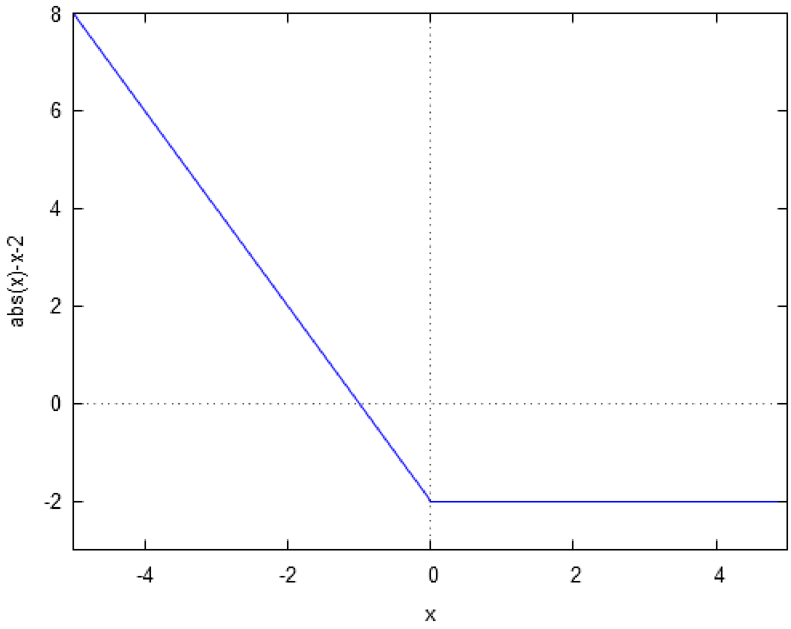

Figure 4:

(e) L'insieme dei punti di minimo globale è $[0, +\infty)$.
(f) $\text{Im}(f) = [-2, +\infty)$ e dunque non è un insieme aperto perché $-2 \in \text{Im}(f)$, ma -2 non è punto interno di $\text{Im}(f)$.

Esercizio 3.
(a) Si veda il libro di testo.
(b) Falso. Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = \ln(x)$: essa continua in $(0, +\infty)$ ma non ammette minimo globale.
(c) Falso. Si consideri, ad esempio, la funzione

$$g : [0, 3] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0, \end{cases}$$

Si ha che g non è continua in 0 e ha un punto di minimo globale in 0.
(d) Vero. La funzione soddisfa le ipotesi del Teorema di Weierstrass: $\left[-\frac{e}{27}, \sqrt{e+12}\right]$ è un intervallo chiuso e limitato e f è continua perchè somma, composizione e quoziente di funzioni continue con funzione al denominatore diversa da 0.

Esercizio 4.
(a) Poiché

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^2 = 0,$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1,$$

la funzione non è derivabile in zero.
(b) L'equazione cercata è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; poiché $\frac{df(x)}{dx}_{|x=-1} = 3x^2_{|x=-1} = 3$, si ha $y = -1 + 3(x + 1)$, ovvero

$$y = 3x + 2.$$

(c) E' oppurtuno usare il risultato seguente: se f è derivabile due volte su un intervallo aperto, allora f è concava se e solo se $f'' \leq 0$. In effetti, per ogni $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x < 0$. Dunque f è concava in $(-\infty, 0)$.

Esercizio 5

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x^3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{\cos^2(x)}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{3x^2\cos^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2(x)}{3x^2\cos^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = -\frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{3+2x^2+x^4} - \sqrt{7+2x+x^4}\right) = \text{"}+\infty-\infty\text{"}$$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3+2x^2+x^4} - \sqrt{7+2x+x^4}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3+2x^2+x^4}-\sqrt{7+2x+x^4}\right)\left(\sqrt{3+2x^2+x^4}+\sqrt{7+2x+x^4}\right)}{\sqrt{3+2x^2+x^4}+\sqrt{7+2x+x^4}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+2x^2+x^4-7-2x-x^4}{\sqrt{3+2x^2+x^4}+\sqrt{7+2x+x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4+2x^2-2x}{\sqrt{3+2x^2+x^4}+\sqrt{7+2x+x^4}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{2-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{7}{x^4}+\frac{2}{x^3}+1}} = \text{"}1\cdot\frac{2}{2}\text{"} = 1$