

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 dicembre 2017
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (11 punti)

Si studi

$$f(x) = \frac{e^{-2x^2+5x}}{x}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda della funzione.

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcolino i seguenti limiti

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 7x^4 - \ln(x)}{4 + 3x^2 + 11x^4}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin(x)} - 1 + 3 \tan(x)}{x},$$

Esercizio 3 (5 punti)

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

(a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in \mathbb{R} e $f(1) = f(8)$, allora esiste almeno un $x_0 \in (1, 8)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

(b) La funzione $f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 117x + 89$ è convessa nell'intervallo $(4, 7)$.

Esercizio 4 (5 punti)

Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \ln(4 - x)$$

indicato con A . Si determinino $\max A, \min A$, l'insieme dei punti interni di A .

Esercizio 5 (6 punti)

(a) Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si diano le definizioni di funzione derivabile in x_0 , derivata di f in x_0 , e retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

(b) Usando la definizione data al punto (a), si calcoli la derivata di $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto $x_0 = 2$.

Esercizio 6 (6 punti)

(a) Si diano le definizioni di funzione continua e di funzione iniettiva.

(b) Si utilizzi la definizione di funzione iniettiva per dimostrare che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(3 + |x - 5|)$ non è iniettiva. Si individui un intervallo I superiormente illimitato tale che la restrizione di f a I , indicata con f_I , è iniettiva.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 dicembre 2017
Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (11 punti)

Si studi

$$f(x) = \frac{e^{-x^2+3x}}{x}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda della funzione.

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcolino i seguenti limiti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \tan(x)} - 1 + 4 \sin(x)}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^4 + (\frac{2}{3})^x + \sqrt{x}}{\ln(x) + x^2 + 9x^4}$$

Esercizio 3 (5 punti)

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

- (a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in \mathbb{R} e monotona strettamente crescente, allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(b) La funzione $f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 81x + 100$ è concava nell'intervallo $(5, 10)$.

Esercizio 4 (5 punti)

Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 16} + \ln(5 - x)$$

indicato con A . Si determinino $\max A, \min A$, l'insieme dei punti di accumulazione di A .

Esercizio 5 (6 punti)

- (a) Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si diano le definizioni di funzione derivabile in x_0 , derivata di f in x_0 , e retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.
(b) Usando la definizione data al punto (a), si calcoli la derivata di $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto $x_0 = 4$.

Esercizio 6 (6 punti)

- (a) Si diano le definizioni di funzione monotona strettamente crescente e di funzione iniettiva.
(b) Si utilizzi la definizione di funzione iniettiva per dimostrare che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2 + |x - 1|}$ non è iniettiva. Si individui un intervallo I superiormente illimitato tale che la restrizione di f a I , indicata con f_I , è iniettiva.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 13 dicembre 2017
Testo d'esame C

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1 (11 punti)

Si studi

$$f(x) = \frac{e^{-4x^2+6x}}{x}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda della funzione.

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcolino i seguenti limiti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 + 2 \sin(x))}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^5 + \ln(x) + (\frac{1}{5})^x}{\sqrt[3]{x} + x + 9x^5}$$

Esercizio 3 (5 punti)

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

- (a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in \mathbb{R} e $f'(x) > x^2$ per ogni x , allora f è monotona strettamente crescente in \mathbb{R} .
(b) La funzione $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 101x + 77$ è concava nell'intervallo $(3, 5)$.

Esercizio 4 (5 punti)

Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 25} + \ln(6 - x)$$

indicato con A . Si determinino $\max A, \min A$, l'insieme dei punti di accumulazione di A .

Esercizio 5 (6 punti)

- (a) Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si diano le definizioni di funzione derivabile in x_0 , derivata di f in x_0 , e retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.
(b) Usando la definizione data al punto (a), si calcoli la derivata di $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto $x_0 = 6$.

Esercizio 6 (6 punti)

- (a) Si diano le definizioni di funzione monotona strettamente decrescente in un punto e di funzione iniettiva.
(b) Si utilizzi la definizione di funzione iniettiva per dimostrare che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (6 + |x - 5|)^3$ non è iniettiva. Si individui un intervallo I superiormente illimitato tale che la restrizione di f a I , indicata con f_I , è iniettiva.