$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Siano a e b due numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\min\{a,b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max\{a,b\}. \tag{1}$$

Dimostrare, inoltre, che il segno di uguaglianza vale se e solo se $a = b$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Osserviamo che se $a = b$ in (1) vale il segno di uguaglianza. Perciò nel dimostrare le disuguaglianze supponiamo che $a < b$. Allora abbiamo $a + b < 2b$ e quindi

$$\min\{a,b\} = a < a\frac{2b}{a+b} = \frac{2ab}{a+b},$$

ciò prova la prima delle disuguaglianze in (1). Proviamo la seconda

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab}\left(\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b}\right) = \sqrt{ab}\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a+b} > 0,$$

quindi

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

Per quanto riguarda, la terza disuguaglianza basta osservare che

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0.$$

Infine

$$\frac{a+b}{2} < b = \max\{a,b\}.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

Provare che se a, b, c, d sono numeri reali non negativi allora

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}. \tag{2}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Osserviamo che

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}.$$

Per l'esercizio precedente abbiamo che

$$\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)\right]=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

Sia a un numero reale, $a > 0$, dimostrare l'equivalenza delle seguenti relazioni

$$|x| < a, \tag{3}$$

$$-a < x < a. \tag{4}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Supponiamo che valga la (3). Si presentano i due casi seguenti

$$\begin{cases} |x| < a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} |x| < a \\ x < 0. \end{cases}$$

Poiché se $x \geq 0$ si ha $|x| = x$, il primo caso si riduce a

$$0 \leq x < a. \tag{5}$$

Inoltre, se $x < 0$ si ha $|x| = -x$, il secondo caso si riduce a

$$\begin{cases} -x < a \\ x < 0 \end{cases}$$

cioè

$$-a < x < 0. \tag{6}$$

Da (5) e da (6) segue che

$$-a < x < a.$$

Supponiamo, ora, che valga la (4), si presentano allora i due casi seguenti

$$\begin{cases} -a < x < a \\ x \geq 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} -a < x < a \\ x < 0. \end{cases}$$

Per $x \geq 0$, il primo caso si riduce a $-a < |x| < a$ e quindi $|x| < a$. Invece, il secondo caso è equivalente a

$$\begin{cases} -a < -x < a \\ x < 0 \end{cases}$$

da cui si ha $-a < |x| < a$. Quindi $|x| < a$. In entrambi i casi dalla (4) segue la (3).

$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}}$

Dimostrare che per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|\,,$$

$$|x-y| \geq ||x-z| - |z-y||$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Dimostriamo la prima disuguaglianza. Ricordando che $|a+b| \leq |a| + |b|$, abbiamo

$$|x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y|\,.$$

Dimostriamo la seconda disuguaglianza. Essendo $|a-b| \geq |a| - |b|$, abbiamo

$$|x-y| = |(x-z) - (y-z)| \geq ||x-z| - |y-z||\,.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 5}}$

Risolvere la disequazione

$$x^6 - 4x^3 + 3 \geq 0.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Poniamo $y = x^3$ e troviamo per quali y risulta

$$y^2 - 4y + 3 \geq 0.$$

Poiché $y^2 - 4y + 3 = 0$ per $y = 3$ e $y = 1$, si ha che

$$y^2 - 4y + 3 = (y-3)\,(y-1)\,,$$

pertanto $y^2 - 4y + 3 \geq 0$ se e solo se $y-3$ e $y-1$ hanno lo stesso segno, cioè, se e solo se $y \leq 1$ oppure $y \geq 3$. Ricordando che $y = x^3$, la disequazione $x^6 - 4x^3 + 3 \geq 0$ è soddisfatta per

$$x^3 \leq 1 \quad \text{oppure} \quad x^3 \geq 3.$$

La disequazione $x^3 \leq 1$ è equivalente a $x^3 - 1 \leq 0$ e quest'ultima è equivalente a $(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) \leq 0$ che è soddisfatta se e solo se $x \leq 1$. In modo analogo si verifica che la disequazione $x^3 \geq 3$ è soddisfatta se e solo se $x \geq \sqrt[3]{3}$. Quindi la disequazione proposta è soddisfatta se e solo se

$$x \leq 1 \;\text{ oppure }\; x \geq \sqrt[3]{3}.$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 6}}$

Risolvere la disequazione
$$\frac{7x-2}{8x-3}>0.$$

SOLUZIONE

La disequazione è equivalente ai due sistemi
$$\begin{cases} 7x-2>0 \\ 8x-3>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 7x-2<0 \\ 8x-3<0 \end{cases}$$
quindi è risolta per
$$\begin{cases} x>\dfrac{2}{7} \\ x>\dfrac{3}{8} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x<\dfrac{2}{7} \\ x<\dfrac{3}{8} \end{cases}.$$
Quindi, la disequazione proposta è soddisfatta se e solo se
$$x>\frac{3}{8} \quad \text{oppure} \quad x<\frac{2}{7}.$$

ESERCIZIO 7

Risolvere le disequazioni
$$\frac{6x-1}{3x-1}-\frac{1}{3x+1}>0,$$
$$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2+1}\geq 0.$$

SOLUZIONE

La prima disequazione ha per soluzioni $x<-\dfrac{1}{3}$ oppure $x>\dfrac{1}{3}$, la seconda disequazione ha per soluzioni $x\geq 2$ oppure $x\leq 1$.

ESERCIZIO 8

Risolvere la disequazione
$$|x-1|<|x-2|\,.$$

SOLUZIONE

Tenendo presente il significato geometrico del valore assoluto ($|x-y|=$ distanza di x da y), la disequazione proposta richiede di trovare i punti x della retta reale la cui distanza dal punto 1 è minore della distanza dal punto 2. Pertanto gli x che verificano $|x-1|<|x-2|$ sono quelli per cui $x<\dfrac{3}{2}$.

Si può procedere anche nel seguente modo: la disequazione $|x-1| < |x-2|$ è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} |x-1| < x-2 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} |x-1| < 2-x \\ x-2 < 0 \end{cases}.$$

A loro volta i precedenti sistemi sono equivalenti ai seguenti

$$\begin{cases} x-1 < x-2 \\ x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1-x < x-2 \\ x-1 \leq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 < 2-x \\ x-1 > 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1-x < 2-x \\ x-1 \leq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

e, poiché i primi due non sono mai verificati, la disequazione $|x-1| < |x-2|$

è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} 2x < 3 \\ 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

cioè $x < \dfrac{3}{2}$.

ESERCIZIO 9

Risolvere la disequazione

$$\frac{x+1}{x\,|x|+2} > 0.$$

SOLUZIONE

La disequazione proposta è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x\,|x|+2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x\,|x|+2 < 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2+2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ -x^2+2 > 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

e il secondo è equivalente a

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2+2 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x^2+2 < 0 \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema ha per soluzione $x > 0$, il secondo ha per soluzione $-1 < x \leq 0$. Il terzo non ha soluzione, mentre il quarto ha soluzione $x < -\sqrt{2}$.. Quindi la disequazione proposta è soddisfatta se e solo se $x > -1$ oppure .$x < -\sqrt{2}$.

ESERCIZIO 10

Risolvere la disequazione

$$\sqrt{2x^2 - 4x} \leq x - 1.$$

SOLUZIONE

La disequazione proposta è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 4x \leq (x-1)^2 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $2 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.

ESERCIZIO 11

Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} > x - 2.$$

SOLUZIONE

La disequazione proposta è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 > (x-2)^2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema ha per soluzioni $x > \frac{7}{2}$, il secondo ha per soluzioni $x \leq -1$. Le soluzioni della disequazione sono dunque $x \leq -1$ e $x > \frac{7}{2}$.

ESERCIZIO 12

Risolvere la disequazione

$$|x-1| - 3 > \sqrt{(x-1)(x-3)}.$$

SOLUZIONE

Per la realtà del secondo membro è necessario che $x \geq 3$ oppure $x \leq 1$ perché per $1 < x < 3$, si ha $(x-1)(x-3) < 0$, quindi la disequazione è equivalente a:

$$\begin{cases} x \geq 3,\ x \leq 1 \\ |x-1| - 3 \geq 0 \\ (|x-1| - 3)^2 > (x-1)(x-3) \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} x \geq 3, \ x \leq 1 \\ x - 4 \geq 0 \\ x > 1 \\ (x-4)^2 > (x-1)(x-3) \end{cases}, \tag{7}$$

oppure

$$\begin{cases} x \geq 3, \ x \leq 1 \\ -2 - x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ (x+2)^2 > (x-1)(x-3) \end{cases}. \tag{8}$$

Il sistema (7) è equivalente

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ -4x + 13 > 0 \end{cases}$$

che non ha soluzioni.
Il sistema (8) è equivalente

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ 8x + 1 > 0 \end{cases}$$

che non ha soluzioni. Quindi la disequazione proposta non ha soluzioni.

ESERCIZIO 13

Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\max\left\{x, x^2 - 1\right\} = 5x - 7.$$

SOLUZIONE

Osserviamo che x soddisfa la disequazione se e solo se

$$\begin{cases} x \leq x^2 - 1 \\ x^2 - 1 = 5x - 7 \end{cases} \tag{9}$$

oppure

$$\begin{cases} x^2 - 1 < x \\ x = 5x - 7 \end{cases}. \tag{10}$$

x verifica (9) se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} x \leq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \text{oppure} \quad x \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = 2 & \text{oppure} \quad x = 3 \end{cases},$$

poiché $\;2 > \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, per $\;x = 2\;$ e $\;x = 3\;$ la (9) è soddisfatta.
Inoltre $\;x\;$ verifica (10) se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{7}{4} \end{cases} .$$

Ora $\dfrac{7}{4} > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, quindi 2 e 3 sono le uniche soluzioni.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 14}}$

Dire quale dei seguenti insiemi sono limitati superiormente e/o inferiormente.
a) $[0, 1[$,
b) $]-\infty, 4[\cup]7, 10]$,
c) $]4, +\infty[$,
d) $]-\infty, 1[\cup [4, +\infty[$,
e) $]1, 2] \cup]3, 4] \cup]7, 10[$,
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2x - 1\}$,
g) $\left\{x = n - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

a) $[0, 1[$ è limitato superiormente (1 è un maggiorante) e inferiormente (0 è il minimo).
b) $]-\infty, 4[\cup]7, 10]$ è limitato superiormente e non inferiormente.
c) $]4, +\infty[$ è limitato inferiormente e non superiormente.
d) $]-\infty, 1[\cup [4, +\infty[$ non è limitato né inferiormente né superiormente.
e) $]1, 2] \cup]3, 4] \cup]7, 10[$ è limitato superiormente e inferiormente.
f) Osserviamo innanzitutto che

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2x - 1\} =]1, +\infty[\,.$$

Infatti, la disequazione $|x| < 2x - 1$ è equivalente a

$$\begin{cases} x < 2x - 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -x < 2x - 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 < 3x \\ x < 0 \end{cases} . \tag{11}$$

Poiché il secondo sistema non ha soluzioni, la disequazione $|x| < 2x - 1$ è soddisfatta da $x > 1$, da cui segue la (11).
Poiché $]1, +\infty[$ è limitato inferiormente ma non superiormente tale risulta l'insieme proposto in f).

g) L'insieme $\left\{x = n - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ è limitato inferiormente, ma non superiormente. È limitato inferiormente, infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$0 \leq n - \frac{1}{n}.$$

Non è limitato superiormente. Supponiamo, infatti, che esista un maggiorante k, detto n numero naturale maggiore di $k+1$ si ha

$$n - \frac{1}{n} \geq n - 1 > (k+1) - 1 = k.$$

Quindi l'insieme proposto in g) non è limitato superiormente.

ESERCIZIO 15

Sia $A =]0, 1[$. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A e per entrambi verificare le proprietà caratterizzanti.

SOLUZIONE

A è limitato, infatti $0 < x < 1$ per ogni $x \in A$. Per quello che riguarda l'estremo inferiore, consideriamo l'insieme $m(A)$ dei minoranti di A, esso è dato da $]-\infty, 0[$, infatti, se $x \in m(A)$ allora $x \leq 0$ quindi, per ogni y di A, si ha $x \leq 0 < y$. Viceversa, se x è un minorante di A allora $x \leq 0$. Infatti x non può essere maggiore di 0, perché se così fosse allora $\dfrac{x}{2}$, che appartiene ad A, non sarebbe minorato da x. Il massimo di $m(A) =]-\infty, 0]$ è 0. Quindi

$$\inf A = 0.$$

Verifichiamo che 0 soddisfa le proprietà dell'estremo inferiore.

1) Per ogni $x \in A$ si ha $x > 0$.

2) Sia $\varepsilon > 0$ allora se $\varepsilon < 1$ si ha $\varepsilon \in A$, $\dfrac{\varepsilon}{2} \in A$ e $\dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Se $\varepsilon \geq 1$ allora ogni x di A è tale che $x < \varepsilon$.

Per quanto riguarda l'estremo superiore si ha che l'insieme $M(A)$ dei maggioranti di A è dato da $[1, +\infty[$ (la verifica è lasciata al lettore) quindi

$$\sup A = 1.$$

Le verifiche delle proprietà che caratterizzano l'estremo superiore sono lasciate al lettore.

ESERCIZIO 16

Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ se $A \subset B$ allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

SOLUZIONE

Le uniche disuguaglianze da verificare sono $\sup A \leq \sup B$ e $\inf B \leq \inf A$. Infatti $\inf A \leq \sup A$ è un'immediata conseguenza della definizione. Dimostriamo che $\sup A \leq \sup B$. Indichiamo con

$$L_1 = \sup A \quad \text{e} \quad L_2 = \sup B.$$

Se fosse $L_1 > L_2$ allora per la proprietà b_2) della proposizione 2 si avrebbe che esiste $x \in A$ tale che $x > L_2$, ma allora per la proprietà b_1) si avrebbe che $x > L_2 \geq y$ per ogni $y \in B$, ma ciò implica che $x \notin B$, il che è assurdo perché $A \subset B$. La dimostrazione $\inf B \leq \inf A$ è analoga ed è lasciata al lettore.

ESERCIZIO 17

Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n^3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

SOLUZIONE

L'insieme A è limitato, infatti:

$$0 < \frac{1}{n^3} \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'estremo superiore di A è 1. Infatti 1 è il massimo di A.
Per quanto riguarda l'estremo inferiore, osserviamo che l'insieme $m\,(A)$ dei minoranti di A è $]-\infty, 0]$, ciò perché se $x \in m\,(A)$, cioè se $x \leq 0$ allora $x \leq 0 < \dfrac{1}{n^3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Viceversa, se x è un minorante di A allora $x \leq 0$. Se infatti $x > 0$ basta considerare un n tale che $\dfrac{1}{n^3} < x$, a tale scopo basta prendere $n > \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ e si contraddice l'assunto che x è minorante di A. Poiché $0 = \max\,]-\infty, 0] = \max m\,(A)$, si ha che

$$\inf A = 0.$$

ESERCIZIO 18

Riferendosi all'esercizio precedente, provare $0 = \inf A$ verificando che 0 soddisfa le proprietà dell'estremo inferiore.
La dimostrazione è lasciata al lettore.

ESERCIZIO 19

Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

SOLUZIONE

L'insieme A è limitato. L'estremo superiore è 1 che è il massimo. L'estremo inferiore è 0.