

# Sistemi reticolari



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.





## Equazioni di congruenza per sistemi materiali puntuali

1. Si consideri un sistema materiale puntuale a vincoli
  - bilaterali
  - lisci
  - olonomi (geometrico o di posizione, non limita le velocità)
2. Si ipotizzi che gli spostamenti siano 'piccoli' (le configurazioni iniziale e attuale 'praticamente' coincidono – ipotesi di piccoli spostamenti).

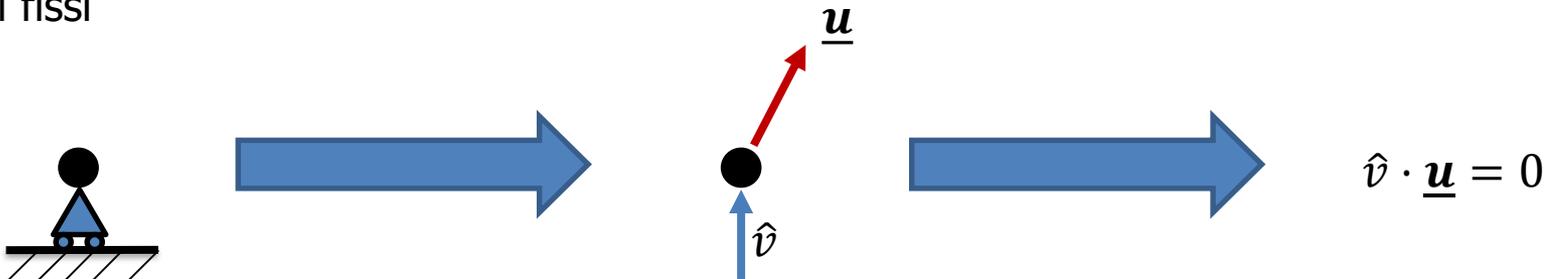
Si consideri un vincolo generico, il cui effetto sia quello di imporre all'*i*-esimo punto del sistema che il suo spostamento  $\underline{u}$  nella direzione (orientata) individuata (nella configurazione iniziale – ipotesi di piccoli spostamenti) dal versore  $\hat{v}$  sia pari a un valore assegnato  $\Delta$ . È facile verificare che tale vincolo può essere espresso come segue:

$$\hat{v} \cdot \underline{u} = \Delta$$

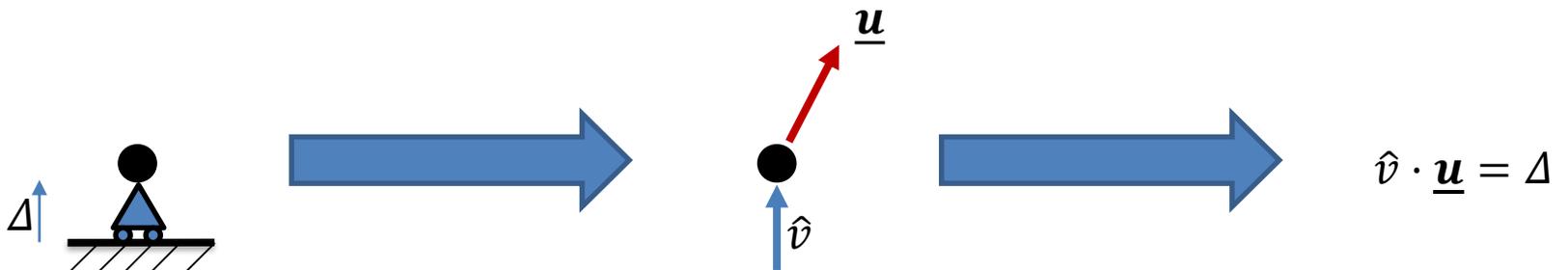


# Equazioni di congruenza per sistemi materiali puntuali

Es. punto materiale vincolato da un carrello  
vincoli fissi



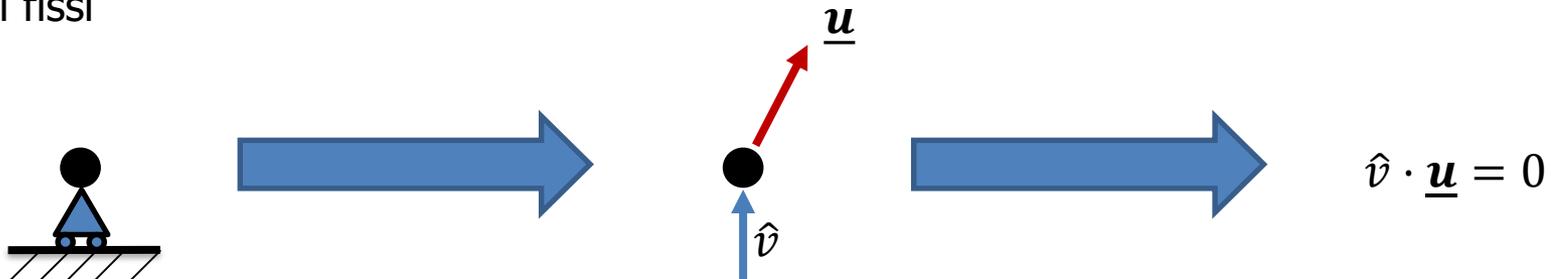
vincoli cedevoli



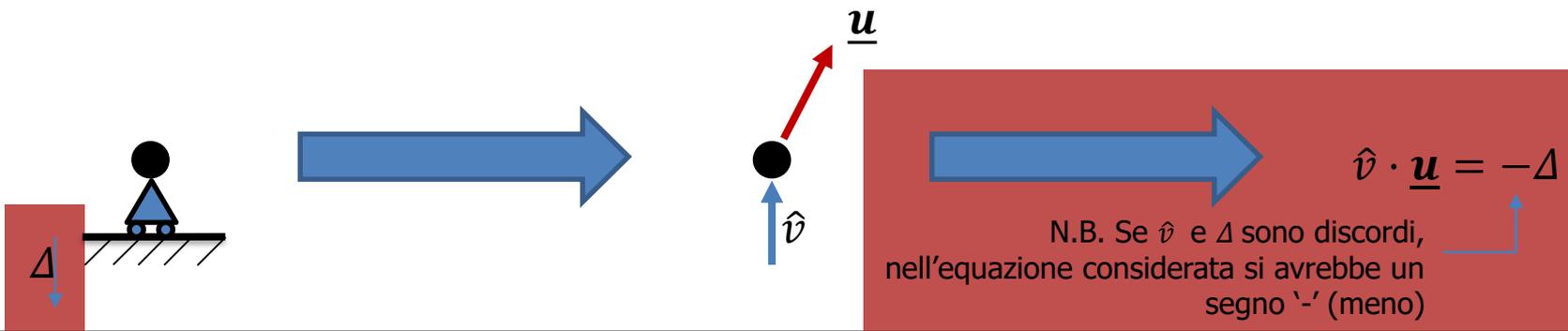


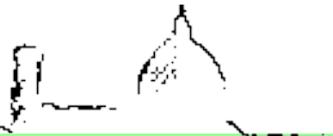
# Equazioni di congruenza per sistemi materiali puntuali

Es. punto materiale vincolato da un carrello  
vincoli fissi



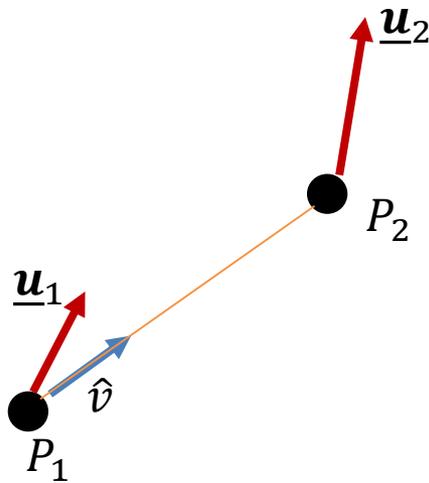
vincoli cedevoli



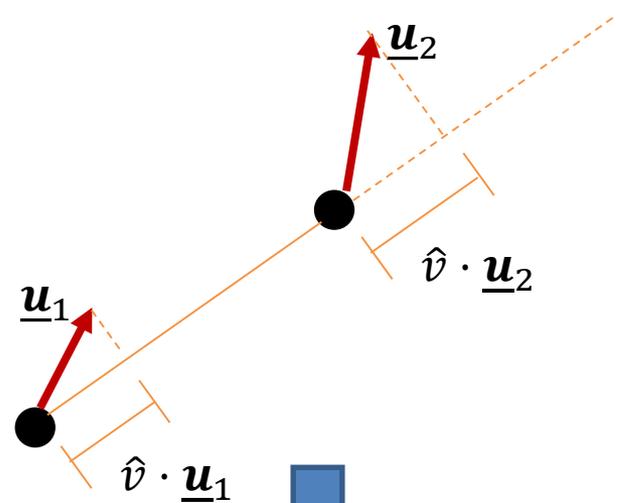


## Equazioni di congruenza per sistemi materiali puntuali

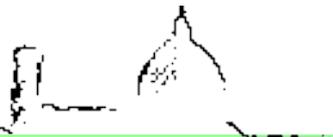
Es. due punti materiali vincolati da un pendolo 'rigido' (vincolo di rigidità)



$$\hat{v} = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$$

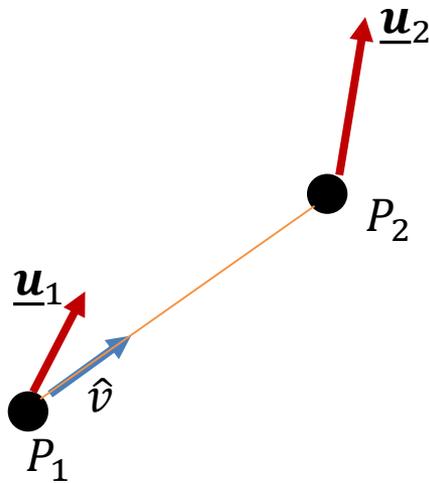


$$\hat{v} \cdot (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) = 0$$

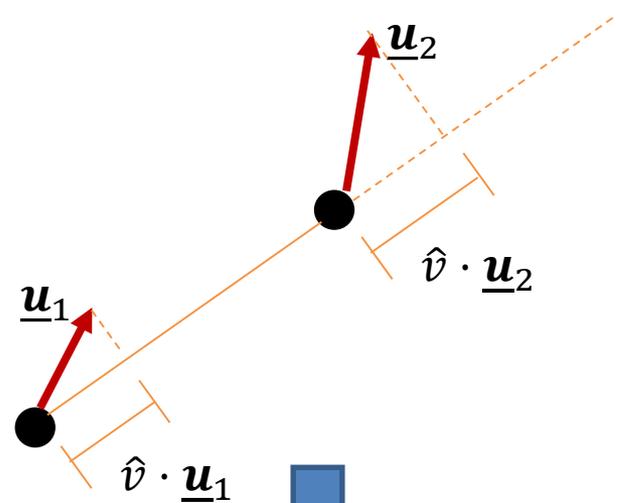


# Equazioni di congruenza per sistemi materiali puntuali

Es. due punti materiali vincolati da un pendolo deformabile



$$\hat{v} = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$$



$$\hat{v} \cdot (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) = \delta$$

Positivo se di allungamento



Facoltà di Architettura

## Equazioni di congruenza per sistemi reticolari

Consideriamo un sistema reticolare, formato da un numero  $n$  di nodi, collegati tra loro da un numero  $b$  di bielle e soggetto a un numero  $v$  di vincoli esterni.

Sia  $f$  la differenza tra i gradi di libertà totali del sistema ( $gdl=2n$  per problemi piani e  $gdl=3n$  per sistemi tridimensionali) e il numero di vincoli  $v$ . gli spostamenti nodali possono essere raccolti e ordinati come segue

$$\underline{u} = \left. \begin{array}{c} \underline{u}_f \\ \dots \\ \underline{u}_v \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Array degli spostamenti nodali non vincolati esternamente} \\ \text{Array degli spostamenti nodali vincolati esternamente} \end{array}$$

Ordiniamo gli allungamenti delle aste nel seguente array

$$\left. \begin{array}{c} \underline{\delta} \end{array} \right\} \text{Array degli allungamenti assiali}$$

Le equazioni di congruenza possono essere espresse nella seguente forma compatta

$$\underline{\delta}_{[b \times 1]} = [C]_{[b \times gdl]} \underline{u}_{[gdl \times 1]} = \left[ \begin{array}{c} [C_f] \\ [b \times f] \end{array} \right] \vdots \left[ \begin{array}{c} [C_v] \\ [b \times v] \end{array} \right] \begin{array}{c} \underline{u}_f \\ \dots \\ \underline{u}_v \end{array} = \begin{array}{c} [C_f] \\ [b \times f] \end{array} \underline{u}_f + \begin{array}{c} [C_v] \\ [b \times v] \end{array} \underline{u}_v$$

$$\underline{u}_v = \underline{\Delta}$$

Spost. impressi, eventualm. nulli per sistemi a vincoli fissi



## Equazioni di congruenza per sistemi reticolari

Un sistema di spostamenti-deformazioni si dice congruente se rispetta le equazioni di congruenza

$$\begin{matrix} \underline{\delta} \\ [b \times 1] \end{matrix} = \begin{matrix} [C_f] \\ [b \times f] \end{matrix} \begin{matrix} \underline{u}_f \\ [f \times 1] \end{matrix} + \begin{matrix} [C_v] \\ [b \times v] \end{matrix} \begin{matrix} \underline{u}_v \\ [v \times 1] \end{matrix}$$

$$\underline{u}_v = \underline{\Delta}$$

Spost. impressi, eventualm. nulli  
per sistemi a vincoli fissi

Si noti che gli operatori di congruenza  $\begin{matrix} [C_f] \\ [b \times f] \end{matrix}$  e  $\begin{matrix} [C_v] \\ [b \times v] \end{matrix}$  dipendono solo dalla geometria iniziale del sistema (ip. piccoli spostamenti) e dalla condizione di vincolo

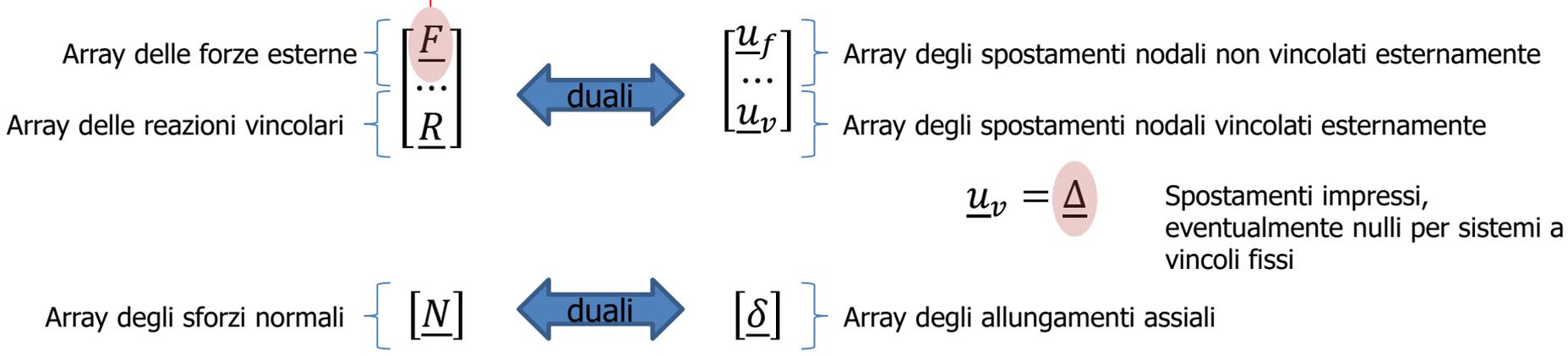


# Il problema strutturale per i sistemi reticolari - definizioni

- $n$  numero di nodi
- $b$  numero di aste
- $v$  vincoli esterni
- $f = gdl - v$   $gdl$  non vincolati esternamente

Ordiniamo opportunamente le forze esterne  $\underline{F}$ , le reazioni vincolari esterne  $\underline{R}$  e gli sforzi normali  $\underline{N}$  come indicato di seguito

Si ipotizza che le forze esterne possano al più essere applicate in corrispondenza dei gradi di libertà non vincolati (principio di mutua esclusione)





## Equazioni di equilibrio via PLV

Consideriamo un sistema di spostamenti-deformazioni congruenti (ossia rispettosi delle equazioni di congruenza)

$$\begin{matrix} \underline{\tilde{\delta}} \\ [b \times 1] \end{matrix} = \begin{matrix} [C_f] \\ [b \times f] \end{matrix} \begin{matrix} \underline{\tilde{u}}_f \\ [f \times 1] \end{matrix} + \begin{matrix} [C_v] \\ [b \times v] \end{matrix} \begin{matrix} \underline{\tilde{u}}_v \\ [v \times 1] \end{matrix} \qquad \underline{\tilde{u}}_v = \underline{\Delta}$$

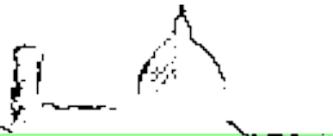
Il Principio dei Lavori Virtuali afferma che un generico sistema di forze (F), reazioni vincolari (R) e sforzi normali (N) è equilibrato se e solo se il loro lavoro è uguale a zero, **per ogni** campo di spostamento / deformazione congruente (anche indipendente dalle forze/sollecitazioni in esame), ossia

$$L_v = \underline{F}^T \underline{\tilde{u}}_f - \underline{N}^T \underline{\tilde{\delta}} + \underline{R}^T \underline{\tilde{u}}_v = 0 \qquad \forall \{ \underline{\tilde{u}}_f, \underline{\tilde{\delta}}, \underline{\tilde{u}}_v \}: \begin{matrix} \underline{\tilde{\delta}} = [C_f] \underline{\tilde{u}}_f + [C_v] \underline{\tilde{u}}_v \\ \underline{\tilde{u}}_v = \underline{\Delta} \end{matrix} \quad (#1)$$

Si ha un segno 'meno' in quanto è stato assunto:

- $\delta$  positivo se di allungamento
- $N$  positivo se di trazione  $\rightarrow$  forze che 'tirano' i nodi.

Pertanto il lavoro tra le precedenti entità è negativo se entrambe sono positive



## Equazioni di equilibrio via PLV

Dim. (parte 1: se vale #1, allora il sistema  $\{F, N, R\}$  è equilibrato)

Sia:

$$L_v = \underline{F}^T \underline{\tilde{u}}_f - \underline{N}^T \underline{\tilde{\delta}} + \underline{R}^T \underline{\tilde{u}}_v = 0$$

$$\forall \{\underline{\tilde{u}}_f, \underline{\tilde{\delta}}, \underline{\tilde{u}}_v\}: \begin{aligned} \underline{\tilde{\delta}} &= [C_f] \underline{\tilde{u}}_f + [C_v] \underline{\tilde{u}}_v \\ \underline{\tilde{u}}_v &= \underline{\Delta} \end{aligned}$$

Si ha, quindi:

$$L_v = \underline{F}^T \underline{\tilde{u}}_f - \underline{N}^T [C_f] \underline{\tilde{u}}_f - \underline{N}^T [C_v] \underline{\Delta} + \underline{R}^T \underline{\Delta} = 0$$

$$\forall \{\underline{\tilde{u}}_f\}; \underline{\Delta} \text{ generico}$$

$$L_v = \underbrace{(\underline{F}^T - \underline{N}^T [C_f])}_{=0 \text{ per l'arbitrarietà di } \underline{\tilde{u}}_f} \underline{\tilde{u}}_f + \underbrace{(\underline{R}^T - \underline{N}^T [C_v])}_{=0 \text{ per la genericità di } \underline{\Delta}} \underline{\Delta} = 0$$

$$\forall \{\underline{\tilde{u}}_f\}; \underline{\Delta} \text{ generico}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \underline{F} & = & [C_f]^T \underline{N} \\ [f \times 1] & & [f \times b] [b \times 1] \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \underline{R} & = & [C_v]^T \underline{N} \\ [v \times 1] & & [v \times b] [b \times 1] \end{matrix}}$$

Equazioni di equilibrio dei nodi, alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

Equazioni di equilibrio dei nodi, alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente



Facoltà di Architettura

# Equazioni di equilibrio via PLV

Dim. (parte 2: se il sistema  $\{F, N, R\}$  è equilibrato, allora vale #1)

Sia:

$$L_v = \underline{F}^T \underline{\tilde{u}}_f - \underline{N}^T \underline{\tilde{\delta}} + \underline{R}^T \underline{\tilde{u}}_v = 0$$

Si ha, quindi:

$$L_v = \underline{F}^T \underline{\tilde{u}}_f - \underline{N}^T [C_f] \underline{\tilde{u}}_f - \underline{N}^T [C_v] \underline{\Delta} + \underline{R}^T \underline{\Delta} = 0$$

$$\forall \{\underline{\tilde{u}}_f, \underline{\tilde{\delta}}, \underline{\tilde{u}}_v\}: \underline{\tilde{\delta}} = [C_f] \underline{\tilde{u}}_f + [C_v] \underline{\tilde{u}}_v$$
$$\underline{\tilde{u}}_v = \underline{\Delta}$$

$$\forall \{\underline{\tilde{u}}_f\}; \underline{\Delta} \text{ generico}$$

$$L_v = (\underline{F}^T - \underline{N}^T [C_f]) \underline{\tilde{u}}_f + (\underline{R}^T - \underline{N}^T [C_v]) \underline{\Delta} = 0$$

$$\forall \{\underline{\tilde{u}}_f\}; \underline{\Delta} \text{ generico}$$

=0 per  $\underline{\tilde{u}}_f$  arbitrario

=0  $\underline{\Delta}$  generico

$$\underline{F} = [C_f]^T \underline{N}$$

$[f \times 1] \quad [f \times b] \quad [b \times 1]$

$$\underline{R} = [C_v]^T \underline{N}$$

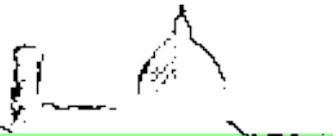
$[v \times 1] \quad [v \times b] \quad [b \times 1]$



**Ipotizziamo che il sistema  $\{F, N, R\}$  in esame sia equilibrato, ossia che siano soddisfatte del seguenti relazioni. Allora, la precedente dimostrazione può essere percorsa dal basso verso l'alto**

Equazioni di equilibrio dei nodi, alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

Equazioni di equilibrio dei nodi, alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente



## Equazioni di congruenza via PLV

Il Principio dei Lavori Virtuali può essere utilizzato anche come verifica di congruenza.

Enunciato.

Un generico sistema di spostamenti  $\underline{u}_f$ ,  $\underline{u}_v$  e deformazioni  $\underline{\delta}$  è congruente (ossia tale che  $\underline{\delta} = [C_f]\underline{u}_f + [C_v]\underline{u}_v$ ;  $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$ ) se e soltanto se l'equazione dei lavori virtuali è soddisfatta **per ogni** campo di forze/reazioni/sforzi normali equilibrati (anche indipendente dalle forze/sollecitazioni in esame), ossia

$$L_v = \underline{\tilde{F}}^T \underline{u}_f - \underline{\tilde{N}}^T \underline{\delta} + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\Delta} = 0 \quad \forall \{\underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{N}}\}: \begin{cases} \underline{\tilde{F}} = [C_f]^T \underline{\tilde{N}} \\ \underline{\tilde{R}} = [C_v]^T \underline{\tilde{N}} \end{cases} \quad (\#2)$$



### Equazioni di congruenza via PLV

Dim. (parte 1: se vale #2, allora  $\underline{u}_f$ ,  $\underline{u}_v$  e  $\underline{\delta}$  soddisfano le equazioni di congruenza)

Sia:

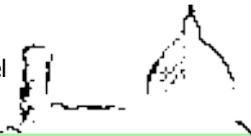
$$L_v = \underline{\tilde{F}}^T \underline{u}_f - \underline{\tilde{N}}^T \underline{\delta} + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\Delta} = 0 \quad \forall \{ \underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{N}} \}: \begin{cases} \underline{\tilde{F}} = [C_f]^T \underline{\tilde{N}} \\ \underline{\tilde{R}} = [C_v]^T \underline{\tilde{N}} \end{cases}$$

Si ha, quindi:

$$L_v = \underline{\tilde{N}}^T [C_f] \underline{u}_f - \underline{\tilde{N}}^T \underline{\delta} + \underline{\tilde{N}}^T [C_v] \underline{\Delta} = 0 \quad \forall \{ \underline{\tilde{N}} \}$$

$$L_v = \underline{\tilde{N}}^T ([C_f] \underline{u}_f - \underline{\delta} + [C_v] \underline{\Delta}) = 0 \quad \forall \{ \underline{\tilde{N}} \}$$

$$[C_f] \underline{u}_f - \underline{\delta} + [C_v] \underline{\Delta} = \underline{0} \rightarrow \underline{\delta} = [C_f] \underline{u}_f - \underline{\delta} + [C_v] \underline{\Delta}$$



## Equazioni di congruenza via PLV

Dim. (parte 1: se  $\underline{u}_f$ ,  $\underline{u}_v$  e  $\underline{\delta}$  soddisfano le equazioni di congruenza, allora vale la #2)

Sia:

$$L_v = \underline{\tilde{F}}^T \underline{u}_f - \underline{\tilde{N}}^T \underline{\delta} + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\Delta} = 0$$

$$\forall \{\underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{N}}\}: \begin{aligned} \underline{\tilde{F}} &= [C_f]^T \underline{\tilde{N}} \\ \underline{\tilde{R}} &= [C_v]^T \underline{\tilde{N}} \end{aligned}$$

Si ha, quindi:

$$L_v = \underline{\tilde{N}}^T [C_f] \underline{u}_f - \underline{\tilde{N}}^T \underline{\delta} + \underline{\tilde{N}}^T [C_v] \underline{\Delta} = 0 \quad \forall \{\underline{\tilde{N}}\}$$

$$L_v = \underline{\tilde{N}}^T ([C_f] \underline{u}_f - \underline{\delta} + [C_v] \underline{\Delta}) = 0 \quad \forall \{\underline{\tilde{N}}\}$$

$$[C_f] \underline{u}_f - \underline{\delta} + [C_v] \underline{\Delta} = \underline{0} \rightarrow \underline{\delta} = [C_f] \underline{u}_f - \underline{\delta} + [C_v] \underline{\Delta}$$

**Ipotizziamo che il sistema  $\{\underline{u}_f$ ,  $\underline{u}_v$  e  $\underline{\delta}\}$  in esame sia congruente, ossia che siano soddisfatte del seguenti relazioni. Allora, la precedente dimostrazione può essere percorsa dal basso verso l'alto**



## Equazione dei lavori virtuali

Infine, l'equazione dei lavori virtuali è soddisfatta da un generico sistema  $\{\underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{N}}\}$  equilibrato per un arbitrario sistema  $\{\underline{\overline{u}}_f, \underline{\overline{\delta}}, \underline{\overline{u}}_v\}$  congruente. I due sistemi possono essere assolutamente indipendenti l'uno dall'altro.

Enunciato.

Dato un generico sistema di spostamenti e deformazioni  $\{\underline{\overline{u}}_f, \underline{\overline{\delta}}, \underline{\overline{u}}_v\}$ , arbitrario purché congruente, e un sistema di forze, reazioni vincolari e sforzi normali  $\{\underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{N}}\}$ , arbitrario purché equilibrato, il lavoro virtuale tra i due sistemi è nullo.

$$\forall \{\underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{N}}\}: \begin{cases} \underline{\tilde{F}} = [C_f]^T \underline{\tilde{N}} \\ \underline{\tilde{R}} = [C_v]^T \underline{\tilde{N}} \end{cases} \quad \forall \{\underline{\overline{u}}_f, \underline{\overline{\delta}}, \underline{\overline{u}}_v\}: \begin{cases} \underline{\overline{\delta}} = [C_f] \underline{\overline{u}}_f + [C_v] \underline{\overline{u}}_v \\ \underline{\overline{u}}_v = \underline{\Delta} \end{cases}$$

Dim.

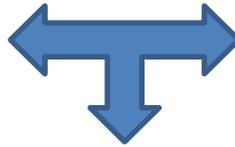
$$\begin{aligned} L_v &= \underline{\tilde{F}}^T \underline{\overline{u}}_f - \underline{\tilde{N}}^T \underline{\overline{\delta}} + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\Delta} = \underline{\tilde{N}}^T [C_f] \underline{\overline{u}}_f - \underline{\tilde{N}}^T ([C_f] \underline{\overline{u}}_f + [C_v] \underline{\Delta}) + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\Delta} = \\ &= \underline{\tilde{N}}^T [C_f] \underline{\overline{u}}_f - \underline{\tilde{N}}^T [C_f] \underline{\overline{u}}_f - \underline{\tilde{R}}^T \underline{\Delta} + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\Delta} = 0 \end{aligned}$$



## Equazione dei lavori virtuali

Nell'equazione dei lavori virtuali, alcuni termini dipendono dalle forze esterne e dalle reazioni vincolari, altri dalle forze interne (sforzi normali). Pertanto, l'equazione dei lavori virtuali può anche essere espressa come segue:

$$\forall \{\underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{N}}\}: \begin{aligned} \underline{\tilde{F}} &= [C_f]^T \underline{\tilde{N}} \\ \underline{\tilde{R}} &= [C_v]^T \underline{\tilde{N}} \end{aligned}$$

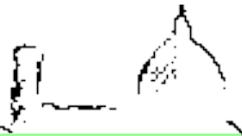


$$\forall \{\overline{\underline{u}}_f, \overline{\underline{\delta}}, \overline{\underline{u}}_v\}: \begin{aligned} \overline{\underline{\delta}} &= [C_f] \overline{\underline{u}}_f + [C_v] \overline{\underline{u}}_v \\ \overline{\underline{u}}_v &= \underline{\underline{\Delta}} \end{aligned}$$

$$L_v = \underline{\tilde{F}}^T \overline{\underline{u}}_f - \underline{\tilde{N}}^T \overline{\underline{\delta}} + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\underline{\Delta}} = 0$$



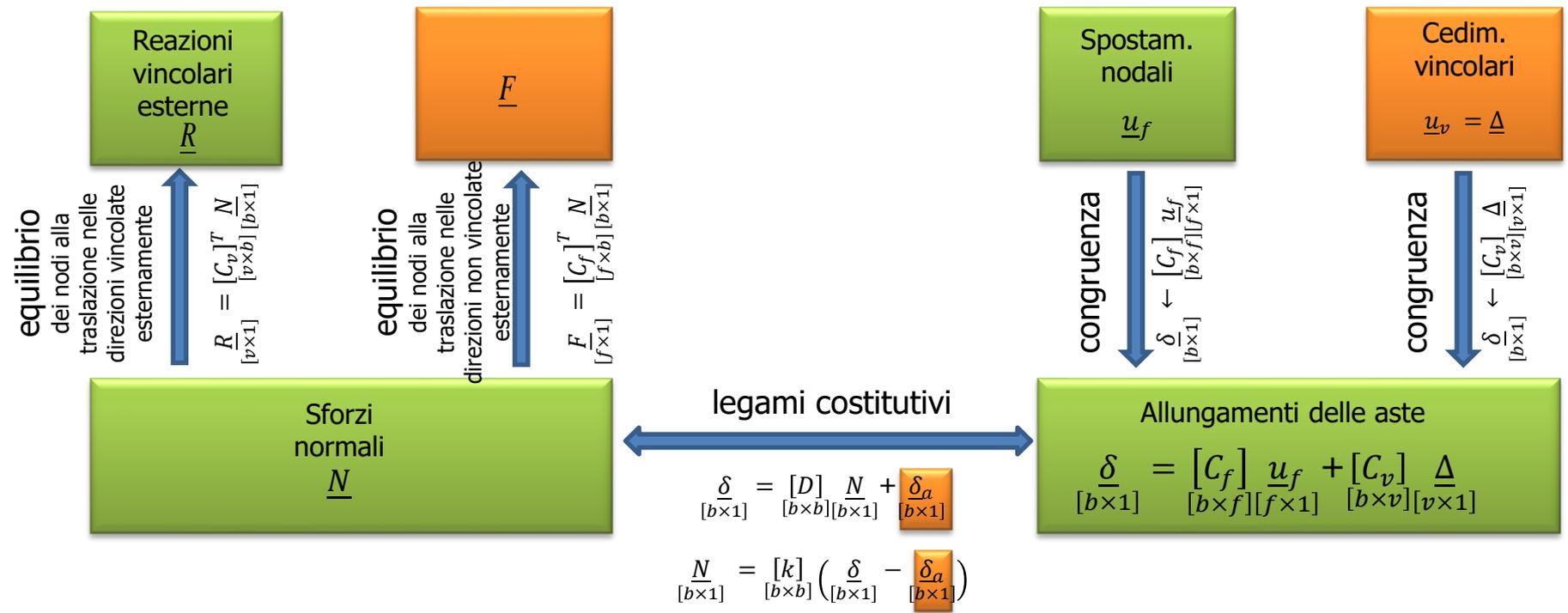
$$\begin{cases} L_{ve} = \underline{\tilde{F}}^T \overline{\underline{u}}_f + \underline{\tilde{R}}^T \underline{\underline{\Delta}} \\ L_{vi} = \underline{\tilde{N}}^T \overline{\underline{\delta}} \end{cases} \longrightarrow L_{ve} = L_{vi}$$



# Il problema strutturale per i sistemi reticolari (generici)

$n$  numero di nodi  
 $b$  numero di aste  
 $v$  vincoli esterni  
 $f=gdl-v$   $gdl$  non vincolati esternamente

 Dati  
 Incognite





*Università degli Studi di Firenze*

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)  
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni  
Docente: Mario Fagone  
Argomento: Sistemi reticolari: definizione del problema strutturale



Facoltà di Architettura

# Strutture sollecitate assialmente

Il problema strutturale per i  
sistemi reticolari



## Sintesi

Nella precedente lezione

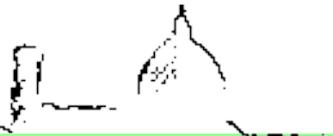
- sono state (sommariamente) definite le caratteristiche della sollecitazione per un sistema strutturale piano
- è stato confrontato il tipo di sollecitazione presente in due sistemi strutturali piani di cui uno sollecitato solo da sforzo normale
- sono stati definiti i sistemi reticolari come quei sistemi strutturali composti da aste (elementi monoassiali rettilinei incernierati agli estremi) e caricati da forze concentrate in corrispondenza dei nodi (cerniere) della struttura



## Sintesi

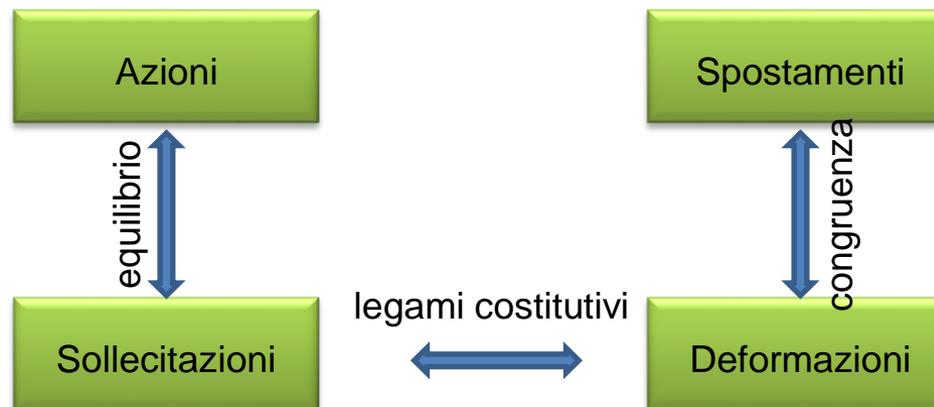
Nella presente lezione

- il problema strutturale generale definito nella quinta lezione del corso sarà semplificato e particolarizzato ai sistemi reticolari piani a vincoli fissi
- sarà risolto un semplice sistema strutturale reticolare piano



## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

Come descritto nelle precedenti lezioni del corso, il problema strutturale è definito da un sistema di equazioni di equilibrio, di congruenza e compatibilità e dalle leggi costitutive, che legano le azioni, le sollecitazioni presenti negli elementi strutturali, il campo di deformazione e di spostamento per tutti i punti materiali della struttura. Tale problema può essere schematizzato come segue:





## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

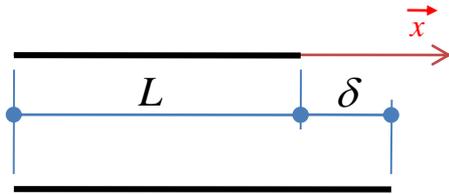
Nel presente ciclo di lezioni ci riferiamo ai sistemi reticolari. Supponiamo inoltre che le aste che formano il sistema strutturale abbiano sezione costante e siano realizzate in materiale uniforme. Ovviamente diverse aste possono avere sezione trasversale differente ed essere realizzate in materiali differenti. La costanza della sezione trasversale e l'omogeneità di materiale è ipotizzata allora per la singola asta.

Per tali sistemi le variabili del problema strutturale si particolarizzano come segue:

- azioni: forze concentrate nei nodi della struttura, ossia in corrispondenza dei collegamenti a cerniera interna fra le aste che compongono la struttura in esame. Quanto detto vale sia per le forze esterne, sia per le reazioni vincolari: i vincoli esterni nei sistemi reticolari sono delle cerniere esterne o dei carrelli esterni posizionati in corrispondenza dei nodi della struttura
- sollecitazioni: sulle aste è presente solo sforzo normale costante

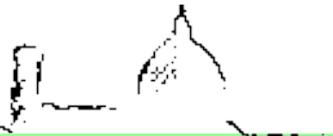


## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

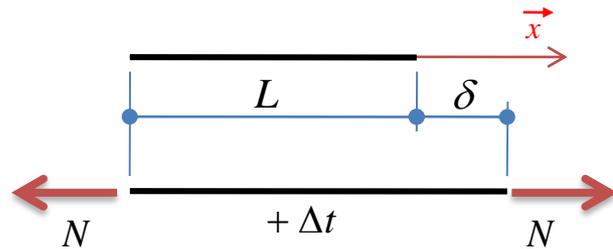


$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L}$$

- deformazioni: per quanto esposto nella sesta lezione del corso, ogni punto materiale di un'asta omogenea a sezione trasversale costante inizialmente lunga  $L$  per la quale gli estremi hanno avuto uno spostamento relativo  $\delta$ , subisce una deformazione assiale  $\varepsilon_x = \delta/L$ .



## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

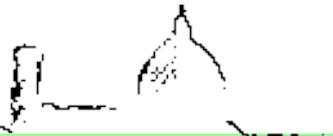


$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{N}{EA} + \alpha\Delta t$$

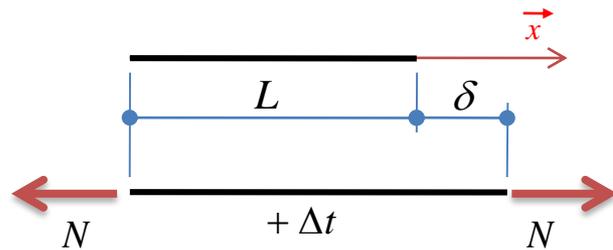
$A$  = area della sezione trasversale  
 $\alpha$  = coefficiente di dilatazione termica del materiale  
 $E$  = modulo di Young del materiale

- deformazioni: per quanto esposto nella sesta lezione del corso, ogni punto materiale di un'asta omogenea a sezione trasversale costante inizialmente lunga  $L$  per la quale gli estremi hanno avuto uno spostamento relativo  $\delta$ , subisce una deformazione assiale  $\varepsilon_x = \delta/L$ .

Se sull'asta in esame vi è uno sforzo normale  $N$  costante ed è presente anche una distorsione termica  $\Delta t$ , tale deformazione è pari alla somma di una componente elastica e di una anelastica come mostrato in figura.



## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani



$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{N}{EA} + \alpha\Delta t$$

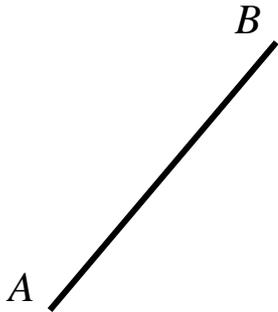
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{N}{EA} + \alpha\Delta t$$

$A$  = area della sezione trasversale  
 $\alpha$  = coefficiente di dilatazione termica del materiale  
 $E$  = modulo di Young del materiale  
 $\nu$  = coefficiente di Poisson del materiale

- deformazioni: per quanto esposto nella sesta lezione del corso, ogni punto materiale di un'asta omogenea a sezione trasversale costante inizialmente lunga  $L$  per la quale gli estremi hanno avuto uno spostamento relativo  $\delta$ , subisce una deformazione assiale  $\varepsilon_x = \delta/L$ .  
 Se sull'asta in esame vi è uno sforzo normale  $N$  costante ed è presente anche una distorsione termica  $\Delta t$ , tale deformazione è pari alla somma di una componente elastica e di una anelastica come mostrato in figura.  
 Anche le deformazioni trasversali sono pari alla somma di una componente elastica più una anelastica



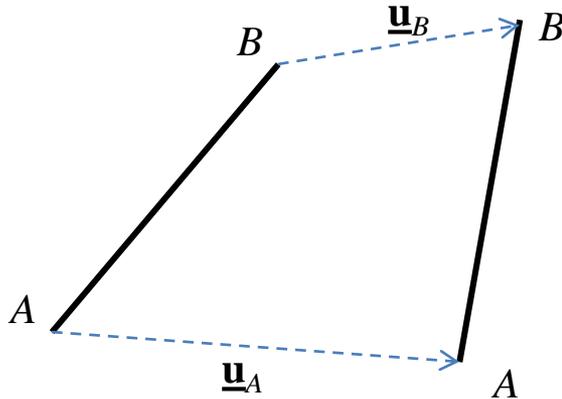
## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani



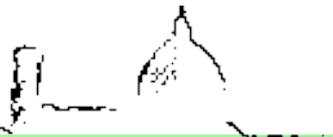
- spostamenti: gli spostamenti di tutti i punti del sistema strutturale sono determinabili a partire dagli spostamenti dei nodi di estremità delle aste.



## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

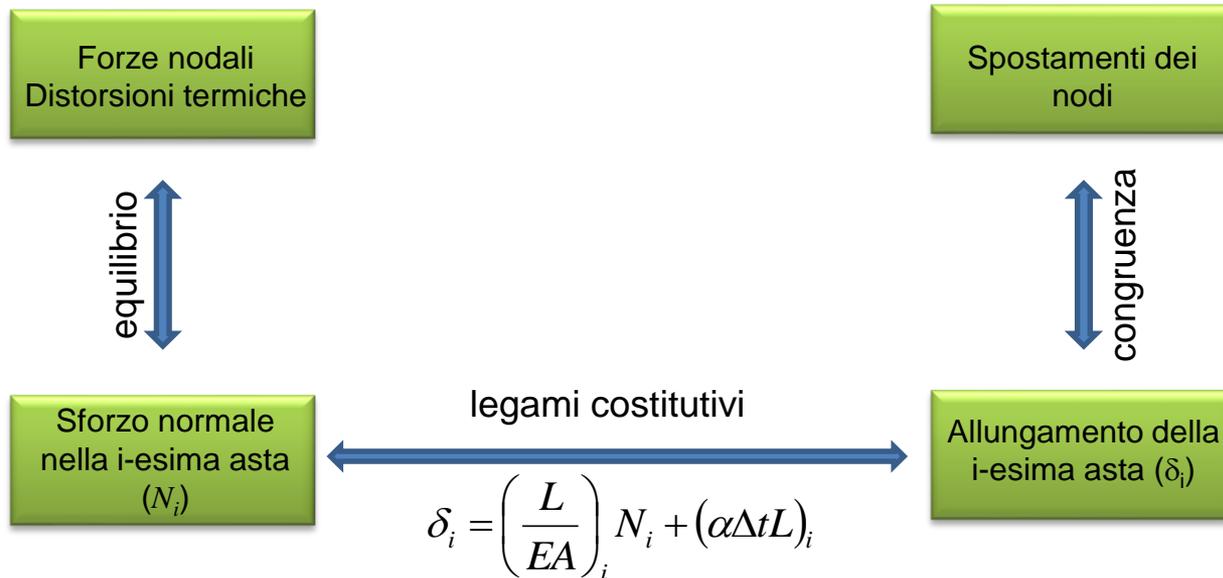


- spostamenti: gli spostamenti di tutti i punti del sistema strutturale sono determinabili a partire dagli spostamenti dei nodi di estremità delle aste. Anche a deformazione avvenuta, infatti, l'asse delle aste che compongono il sistema si mantiene rettilineo



## Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

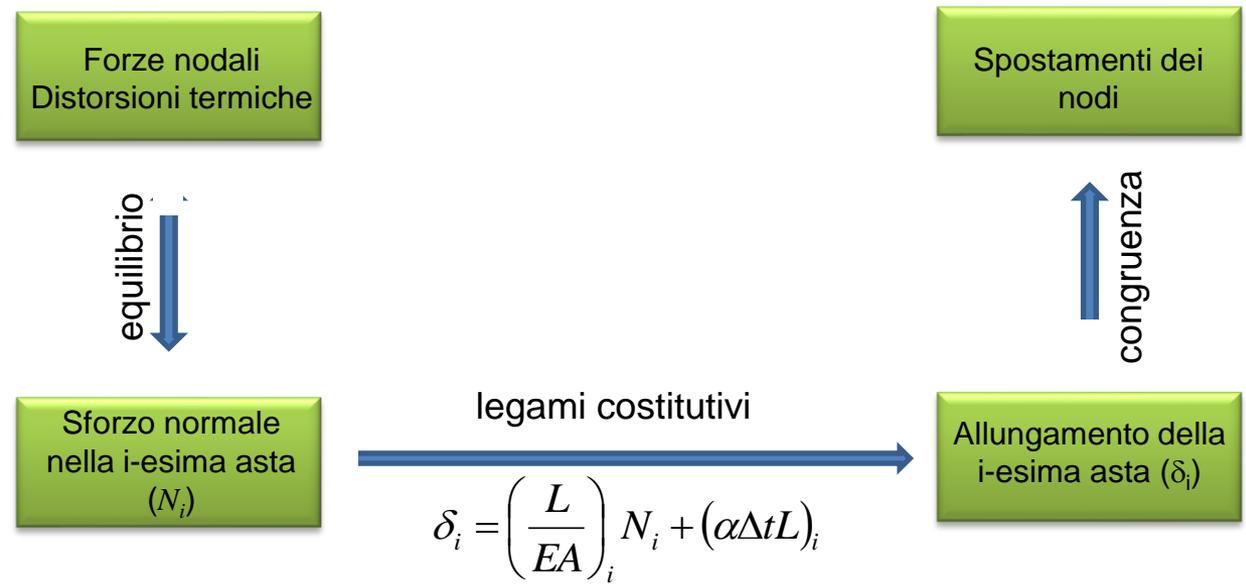
Nella parte iniziale del presente ciclo di lezioni tratteremo dei sistemi reticolari staticamente determinati. Per tali sistemi, come è noto, le equazioni che governano il sistema strutturale sono disaccoppiate.





# Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

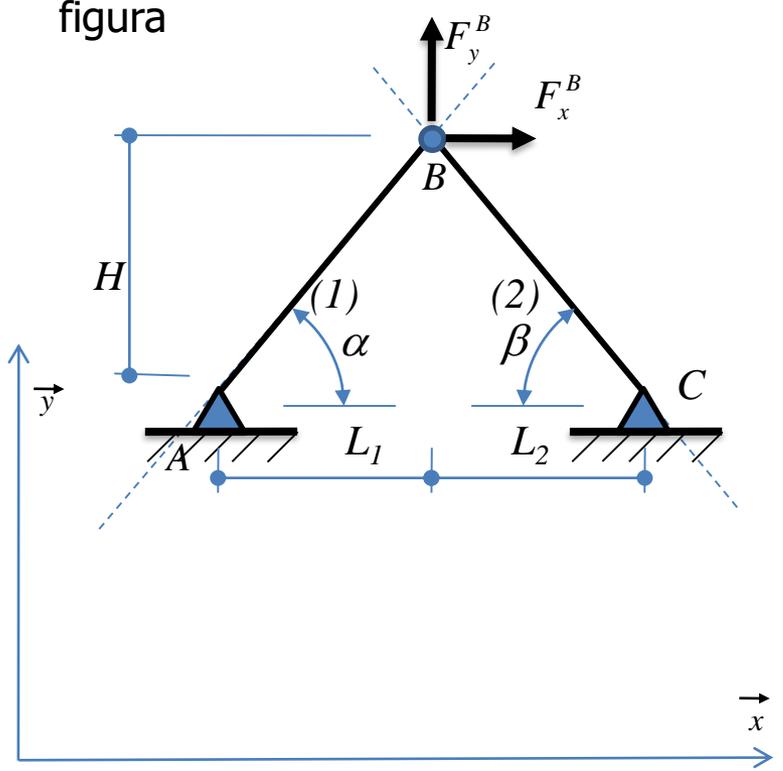
Nella parte iniziale del presente ciclo di lezioni tratteremo dei sistemi reticolari staticamente determinati. Per tali sistemi, come è noto, le equazioni che governano il sistema strutturale sono disaccoppiate. Si procederà allora imponendo inizialmente le condizioni di equilibrio, poi i legami costitutivi e le equazioni di congruenza (si procederà percorrendo lo schema in figura in senso antiorario).





## Esempio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$$F_x = 1 \text{ kN} \quad L_1 = 1,5 \text{ m} \quad H = 1,5 \text{ m}$$

$$F_y = 2 \text{ kN} \quad L_2 = 2,0 \text{ m}$$

Si effettua adesso la risoluzione del problema strutturale relativo al semplice sistema schematizzato in figura.

Tale struttura è un sistema reticolare in quanto formato da aste rettilinee incernierate agli estremi e caricato da forze concentrate nei nodi.

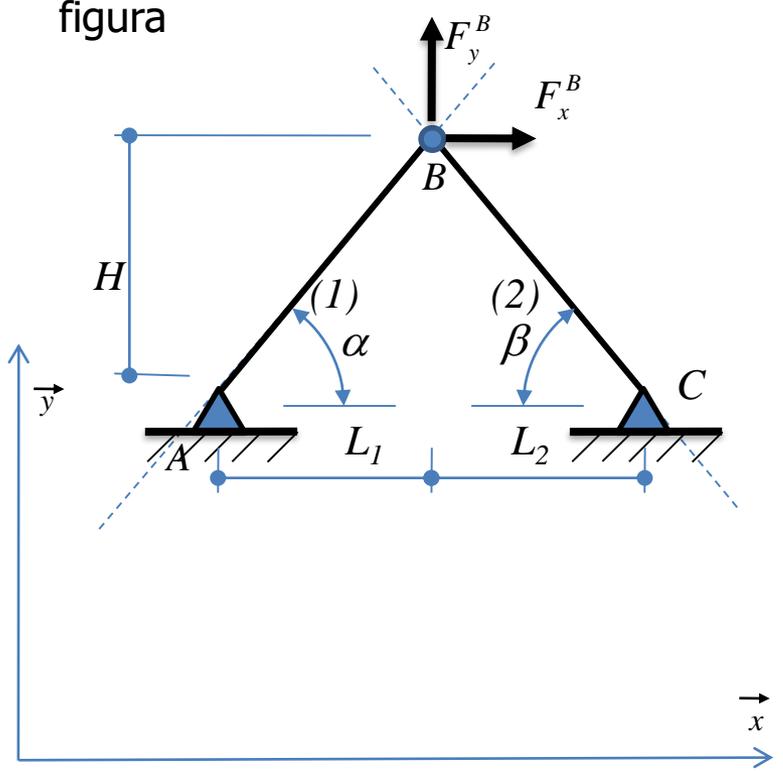
Il calcolo delle reazioni vincolari può essere effettuato seguendo la strategia di soluzione proposta nella sessione teorica dell'undicesima lezione. Per i sistemi reticolari è però possibile applicare procedure semplificate basate sull'equilibrio dei nodi.

Per il sistema in esame sarebbe immediato imporre graficamente l'equilibrio del nodo B. Nella presente lezione si vuole seguire però un approccio analitico



## Esempio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

### 1. Verifica dell'isostaticità del sistema

Gradi di vincolo g.d.v.	Gradi di libertà g.d.l.
$2+2+2=6$	$3 \times 2=6$

$$g.d.l - g.d.v. = l - i \quad \rightarrow \quad 6 - 6 = l - i = 0$$

$$\rightarrow \quad l = i$$

in maniera analoga a quanto fatto nella sessione teorica della decima lezione, si può dimostrare che il nodo B, appartenente sia al tratto AB che al tratto BC, non può avere spostamenti (rigidi) compatibili con i vincoli esterni. Pertanto il sistema non ha labilità e si ha

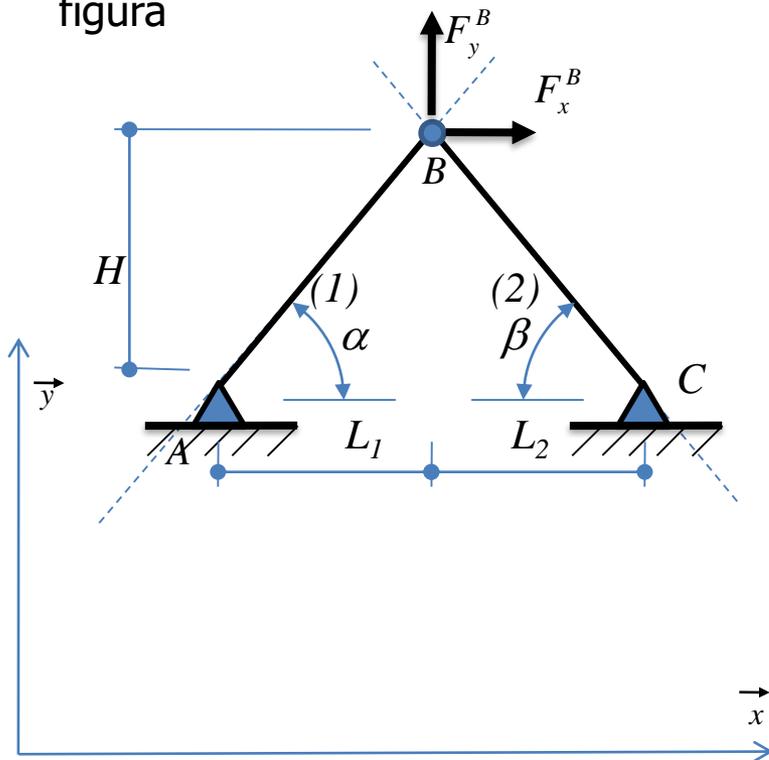
$$l = 0 \quad \rightarrow \quad i = l = 0$$

Il sistema è allora isostatico



## Esempio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$$F_x = 1 \text{ kN} \quad L_1 = 1,5 \text{ m} \quad H = 1,5 \text{ m}$$

$$F_y = 2 \text{ kN} \quad L_2 = 2,0 \text{ m}$$

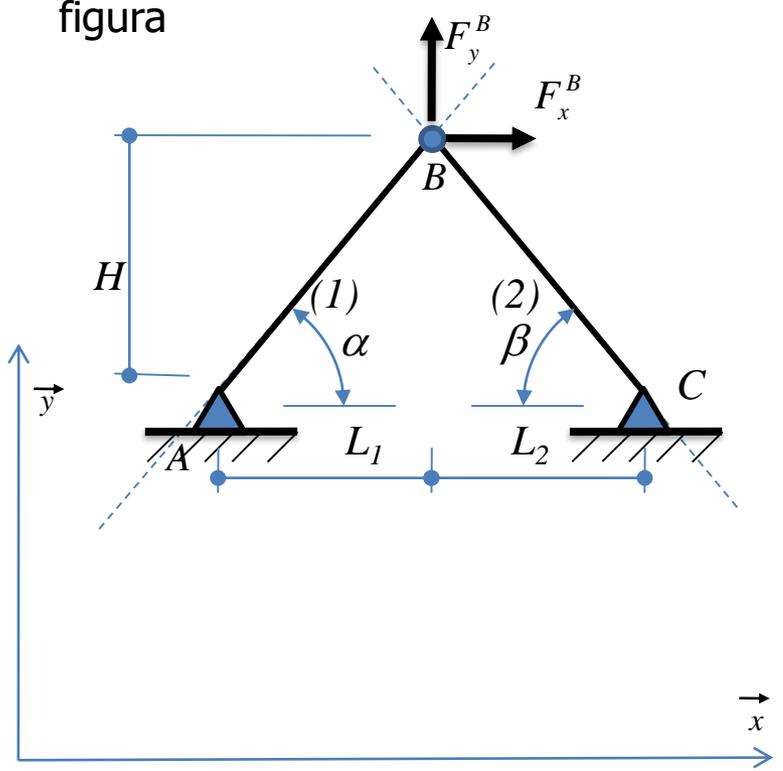
1. Metodo alternativo per la verifica dell'isostaticità del sistema

Dimostrata l'uguaglianza fra i gradi di libertà e di vincolo del sistema, l'assenza di labilità può essere verificata come segue: gli elementi  $AB$  e  $BC$  rappresentano delle bielle (seppur deformabili assialmente) e quindi possono essere interpretati come dei vincoli semplici alla traslazione nella direzione del loro asse. Il punto  $B$  (che in quanto tale ha nel piano solo due gradi di libertà traslazionali) è allora vincolato alla traslazione in due direzioni indipendenti tra loro. Per esso non sono allora possibili moti rigidi e quindi neanche gli elementi  $AB$  e  $BC$  possono spostarsi rigidamente. Il sistema è allora privo di labilità e quindi anche di iperstaticità (è allora isostatico).



## Esempio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

1. Metodo alternativo per la verifica dell'isostaticità del sistema

Per quanto detto nella slide precedente, i sistemi reticolari possono essere pensati come una serie di nodi cerniera (diciamo un numero  $n$  di nodi) collegati da bielle (*vincoli semplici*) e vincolati da un numero  $v$  di vincoli esterni. I gradi di libertà totali di un sistema reticolare sono allora pari a  $2n$  (ogni nodo ha due gradi di libertà traslazionali)

$$g.d.l = 2n$$

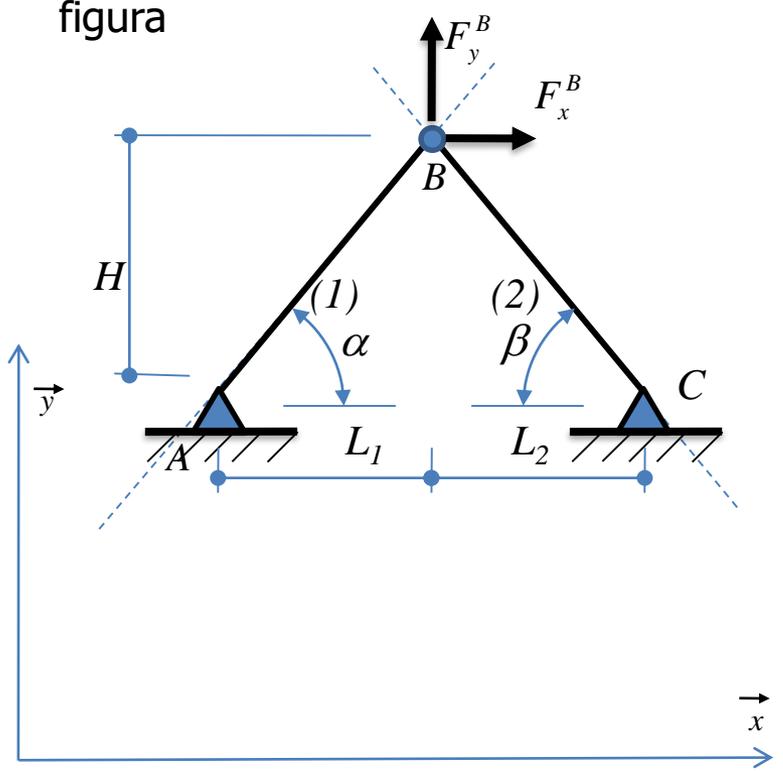
mentre il grado di vincolo complessivo è pari alla somma del numero di bielle ( $b$ ) più il numero di vincoli esterni ( $v$ )

$$g.d.v. = b + v$$



## Esempio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

1. Metodo alternativo per la verifica dell'isostaticità del sistema  
 Per i sistemi reticolari vale allora la seguente relazione

$$g.d.l - g.d.v. = 2n - b - v = l - i$$

La precedente relazione sarà sempre utilizzata nel seguito per la verifica dell'isostaticità dei sistemi reticolari.

Per il sistema in esame si ha

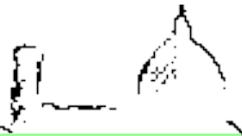
$$n=3; \quad b=2; \quad v=4$$

e quindi

$$2 \times 3 - 2 - 4 = l - i \quad \rightarrow \quad l - i = 0$$

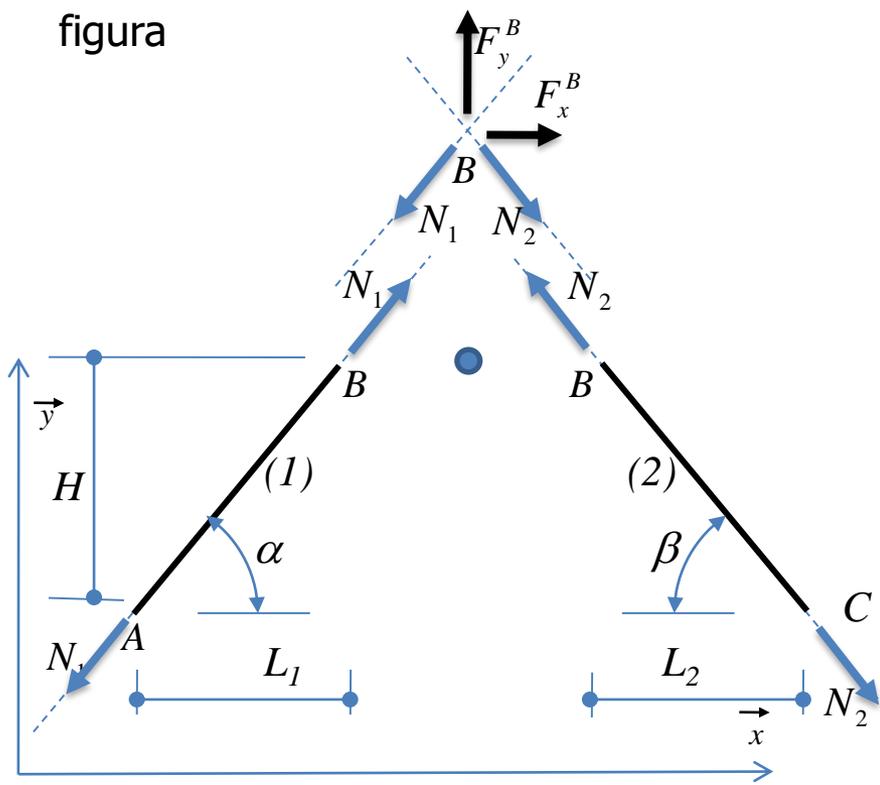
$$\rightarrow \quad l = i$$

tale relazione coincide (come ci si aspettava) con quanto emerso applicando la relazione generale



## Esempio – equilibrio

Si risolve la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

2.a Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo degli sforzi normali nelle aste



Si supponga che i due tratti siano entrambi tesi.

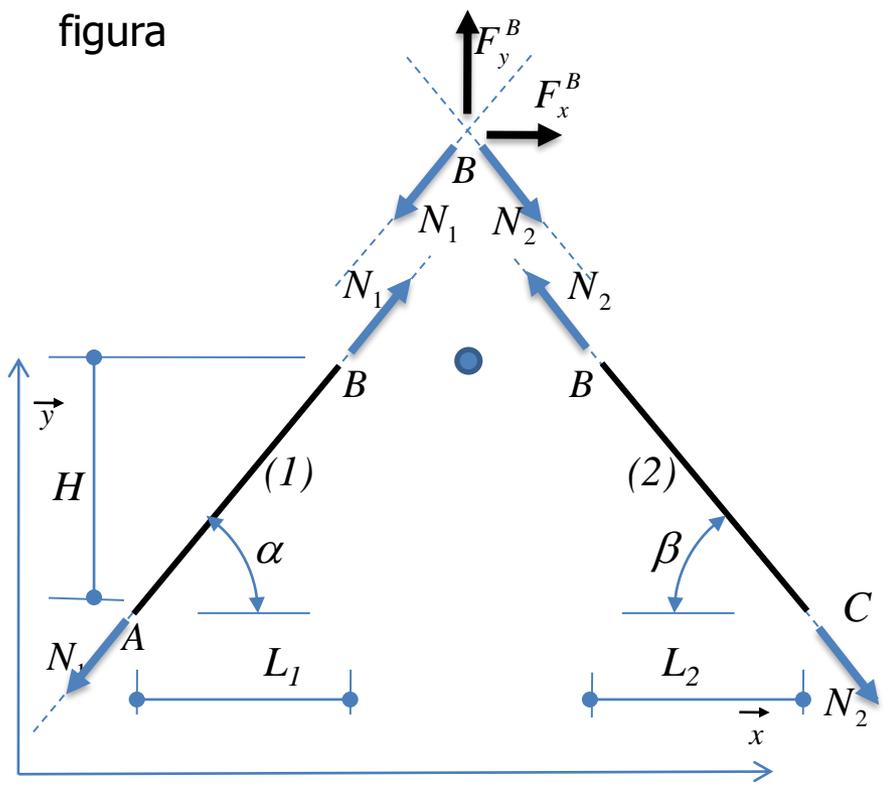
Si impongono inizialmente le equazioni di equilibrio alla traslazione dei nodi nelle direzioni dei gradi di libertà non vincolati esternamente. Per il sistema in esame si deve imporre allora l'equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale della cerniera interna B (l'equilibrio alla rotazione delle forze confluenti in B è identicamente soddisfatto)

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow -N_1 \cos(\alpha) + N_2 \cos(\beta) + F_x^B = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow -N_1 \sin(\alpha) - N_2 \sin(\beta) + F_y^B = 0 \end{cases}$$



## Esempio – equilibrio

Si risolve la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

2.a Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo degli sforzi normali nelle aste



In forma matriciale le equazioni di equilibrio si scrivono come segue

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & \sin(\beta) \end{bmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}}_{\underline{N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_x^B \\ F_y^B \end{bmatrix}}_{\underline{F}}$$

Sinteticamente si scrive

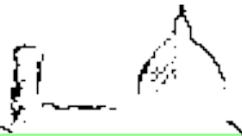
$$[B]\underline{N} = \underline{F}$$

dove sono stati introdotti i seguenti operatori algebrici

$[B]$  = operatore di equilibrio

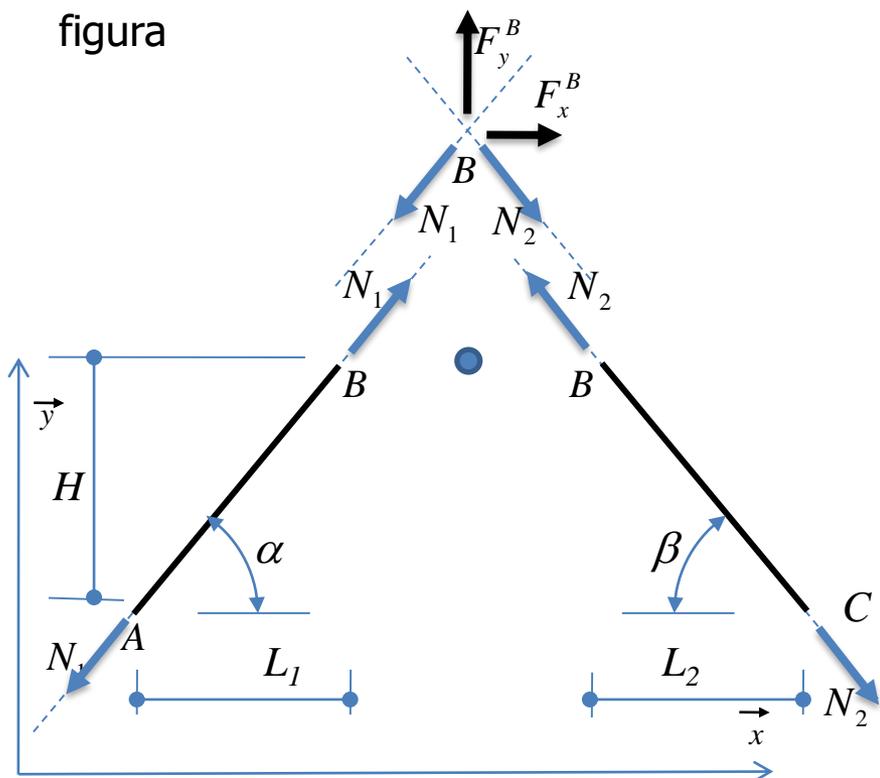
$\underline{N}$  = vettore degli sforzi normali

$\underline{F}$  = vettore dei carichi esterni



## Esempio – equilibrio

Si risolve la struttura schematizzata in figura



$$F_x = 1 \text{ kN} \quad L_1 = 1,5 \text{ m} \quad H = 1,5 \text{ m}$$

$$F_y = 2 \text{ kN} \quad L_2 = 2,0 \text{ m}$$

2.a Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo degli sforzi normali nelle aste



Risolvendo il sistema di equazioni di equilibrio si ha

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2,22 \\ 0,71 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

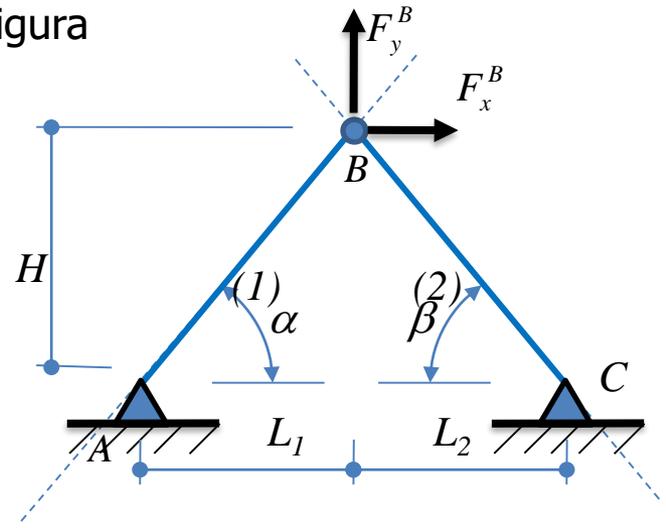
Entrambi i valori sono positivi e quindi le due aste sono entrambe dei tiranti. Per i sistemi reticolari è conveniente sintetizzare i valori degli sforzi normali presenti nelle aste come segue

Asta	N	Tirante Puntone
(1)	2,22kN	T
(2)	0,71kN	T



## Esempio – equilibrio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



2.a Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo degli sforzi normali nelle aste

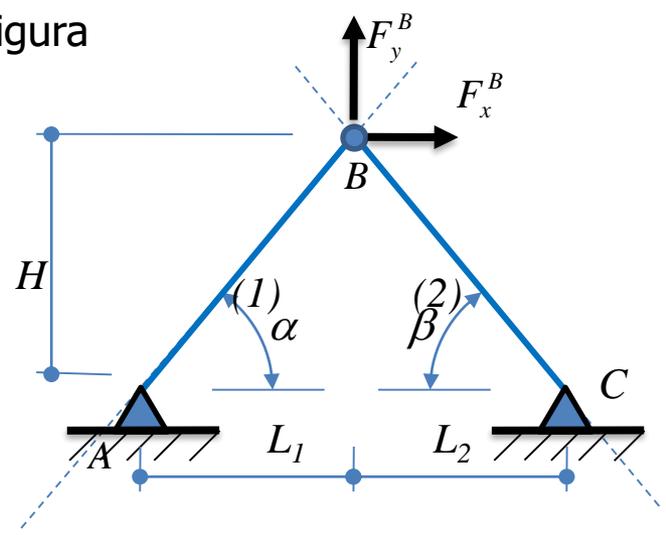


Dopo aver determinato gli sforzi normali, nella struttura di partenza si indicheranno in blu i puntoni ed in rosso i tiranti.



## Esempio – osservazione

Si risolva la struttura schematizzata in figura

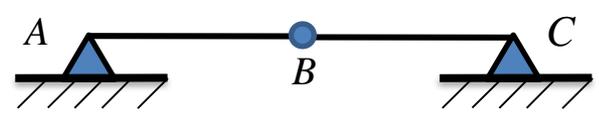


Si osservi che il determinante della matrice dei coefficienti è pari a

$$\det[B] = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha)$$

e si annulla quando  $\alpha = \beta = 0$

In tal caso le tre cerniere della struttura si allineano ed il sistema diviene labile



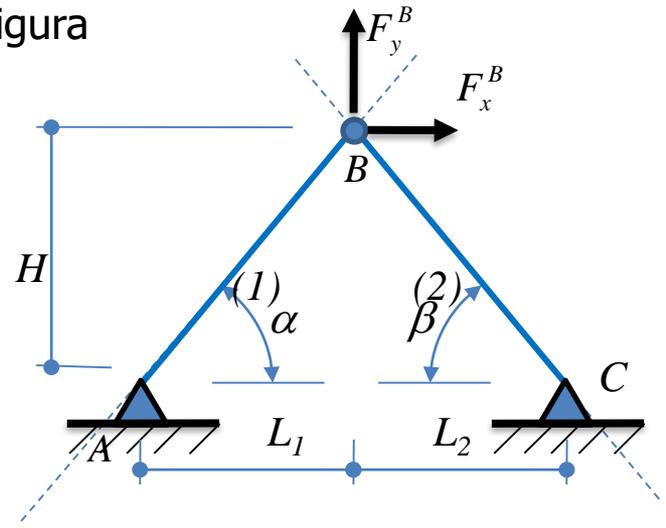
sono infatti possibili in tal caso atti di moto in cui il nodo B ha spostamenti (infinitesimi) verticali.

**UN ARCO A TRE CERNIERE ALLINEATE E' ALLORA UN SISTEMA LABILE**



## Esempio – equilibrio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



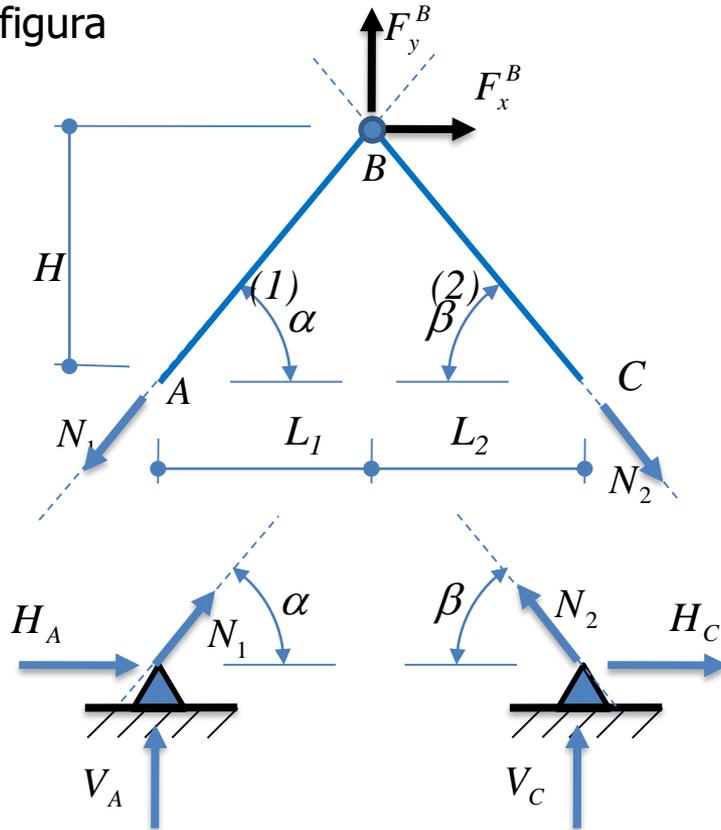
2.b Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo delle reazioni vincolari esterne

Per il calcolo delle reazioni vincolari esterne si impongono le equazioni di equilibrio alla traslazione dei nodi nelle direzioni dei gradi di libertà vincolati esternamente.



## Esempio – equilibrio

Si risolve la struttura schematizzata in figura



2.b Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo delle reazioni vincolari esterne

Per il calcolo delle reazioni vincolari esterne si impongono le equazioni di equilibrio alla traslazione dei nodi nelle direzioni dei gradi di libertà vincolati esternamente. Per il sistema in esame si impone allora l'equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale dei nodi A e C.

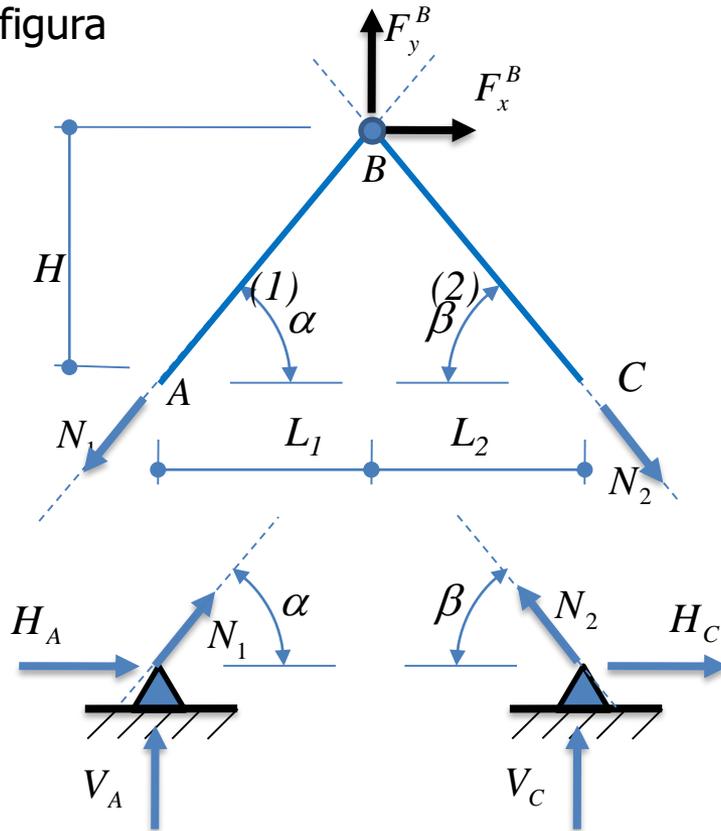
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\text{nodo A}} F_x = 0 \rightarrow H_A + N_1 \cos(\alpha) = 0 \\ \sum_{\text{nodo A}} F_y = 0 \rightarrow V_A + N_1 \sin(\alpha) = 0 \\ \sum_{\text{nodo C}} F_x = 0 \rightarrow H_C - N_2 \cos(\beta) = 0 \\ \sum_{\text{nodo C}} F_y = 0 \rightarrow V_C + N_2 \sin(\beta) = 0 \end{array} \right.$$





## Esempio – equilibrio

Si risolve la struttura schematizzata in figura



2.b Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo delle reazioni vincolari esterne

In forma matriciale le precedenti equazioni si scrivono come segue

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_C \\ V_C \end{bmatrix}}_{\underline{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) \end{bmatrix}}_{[B_v]} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}}_{\underline{N}}$$

dove sono stati introdotti i seguenti operatori algebrici

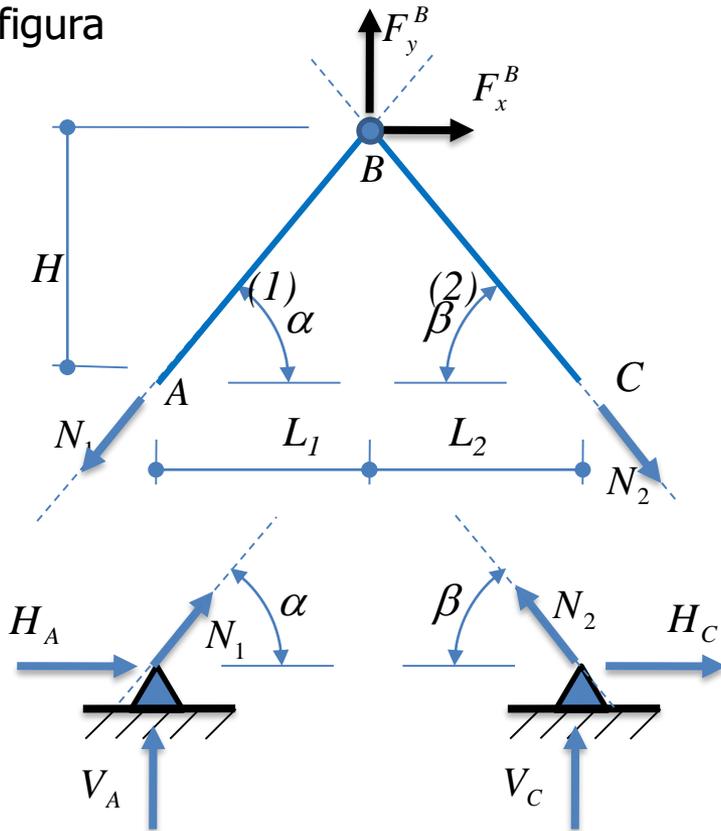
$[B_v]$  = operatore di equilibrio g.d.l. vincolati

$\underline{R}$  = vettore delle reazioni vincolari



## Esempio – equilibrio

Si risolve la struttura schematizzata in figura



2.b Imposizione delle equazioni di equilibrio per il calcolo delle reazioni vincolari esterne

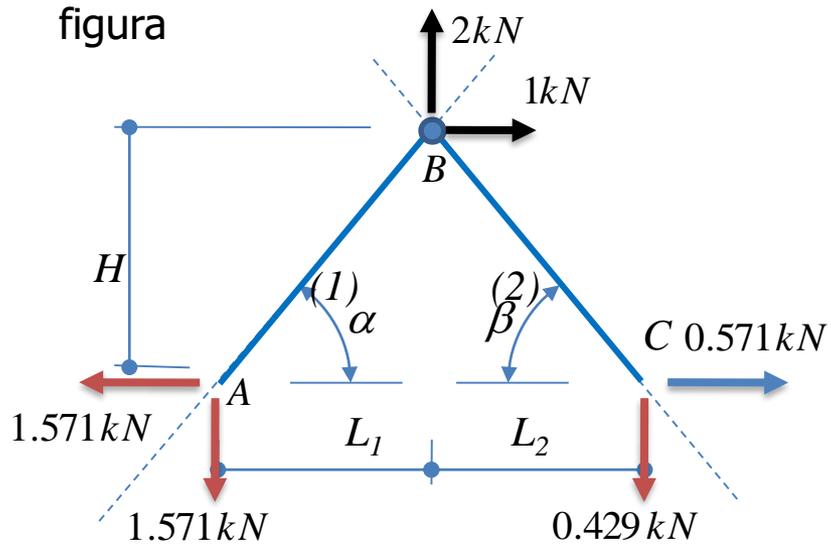
Noti allora gli sforzi normali nelle aste, si calcolano allora direttamente le reazioni vincolari come segue

$$\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_C \\ V_C \end{bmatrix} = [B_v] \underline{N} = \begin{bmatrix} -1.571 \\ -1.571 \\ 0.571 \\ -0.429 \end{bmatrix} kN$$



## Esempio – equilibrio

Si risolva la struttura schematizzata in figura



### 2.c Verifica dell'equilibrio globale della struttura

Determinate le reazioni vincolari esterne si disegna un diagramma di corpo libero del sistema in cui si evidenziano i versi corretti delle reazioni esterne e si verifica l'equilibrio globale.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow -1.571 + 1 + 0.571 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow -1.571 - 0.429 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ \sum M_{(B)} = 0 \text{ identicamente soddisfatta} \end{cases}$$

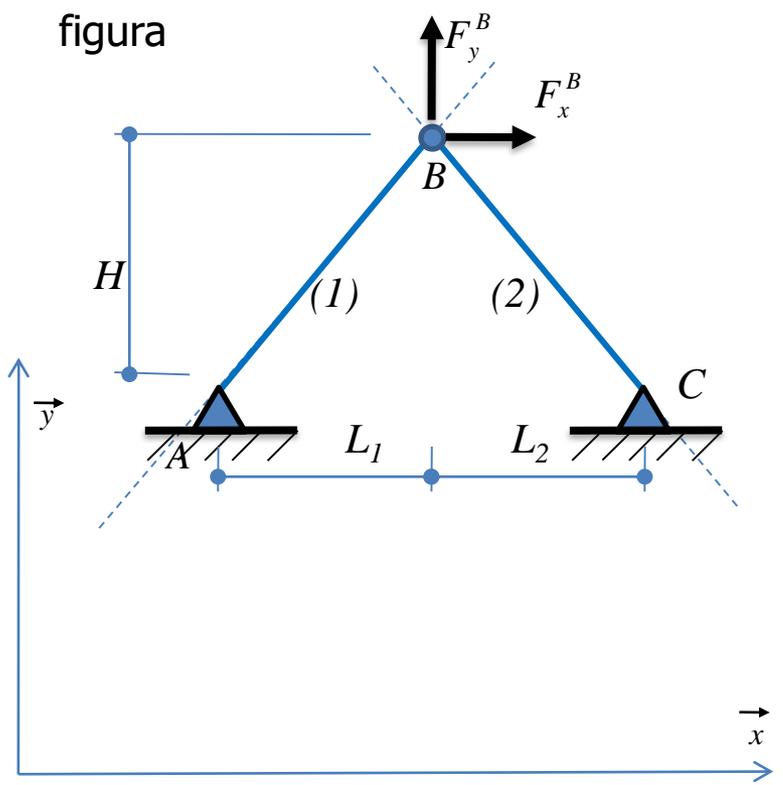


$$\begin{matrix} F_x = 1 \text{ kN} & L_1 = 1,5 \text{ m} & H = 1,5 \text{ m} \\ F_y = 2 \text{ kN} & L_2 = 2,0 \text{ m} & \end{matrix}$$



## Esempio – legami costitutivi

Si risolve la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

### 3. Legami costitutivi

Gli allungamenti delle due aste possono essere determinati attraverso la seguente relazione

$$\delta_1 = \left( \frac{L}{EA} \right)_1 N_1 + (\alpha \Delta T)_1$$

$$\delta_2 = \left( \frac{L}{EA} \right)_2 N_2 + (\alpha \Delta T)_2$$

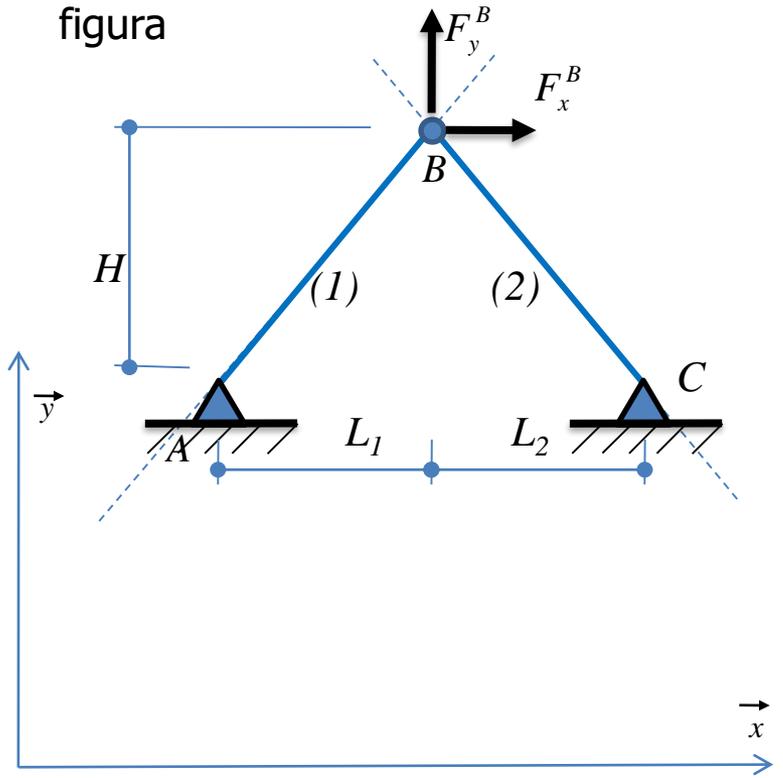
In forma matriciale si ha

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \underline{\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left( \frac{L}{EA} \right)_1 & 0 \\ 0 & \left( \frac{L}{EA} \right)_2 \end{bmatrix}}_{[D]} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \underline{N} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\alpha \Delta T)_1 \\ (\alpha \Delta T)_2 \\ \underline{\delta}_a \end{bmatrix}}_{\underline{\delta}_a}$$



## Esempio – legami costitutivi

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

### 3. Legami costitutivi

Sinteticamente allora i legami costitutivi si possono esprimere come segue

$$\underline{\delta} = [D] \underline{N} + \underline{\delta}_a$$

dove sono stati introdotti i seguenti elementi

$\underline{\delta}$  = vettore degli allungamenti assiali

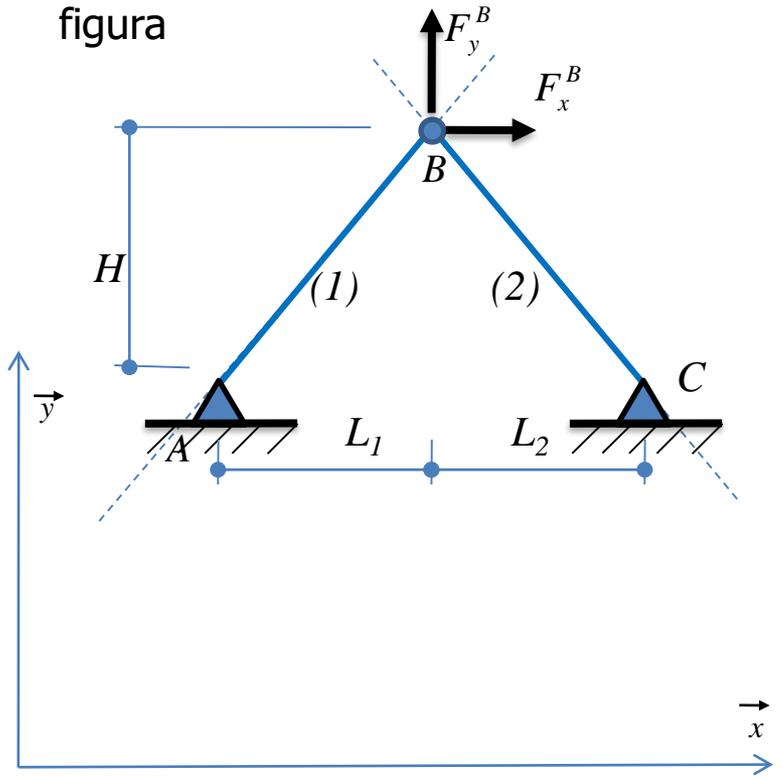
$[D]$  = matrice delle deformabilità assiali

$\underline{\delta}_a$  = vettore degli allungamenti anelastici



## Esempio – legami costitutivi

Si risolve la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

### 3. Legami costitutivi

Ipotizzando che le due aste abbiano la stessa sezione trasversale

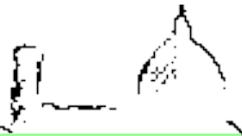
$$A_1 = A_2 = 100 \text{ mm}^2$$

e che siano realizzate in acciaio

$$E = 210 \text{ GPa}$$

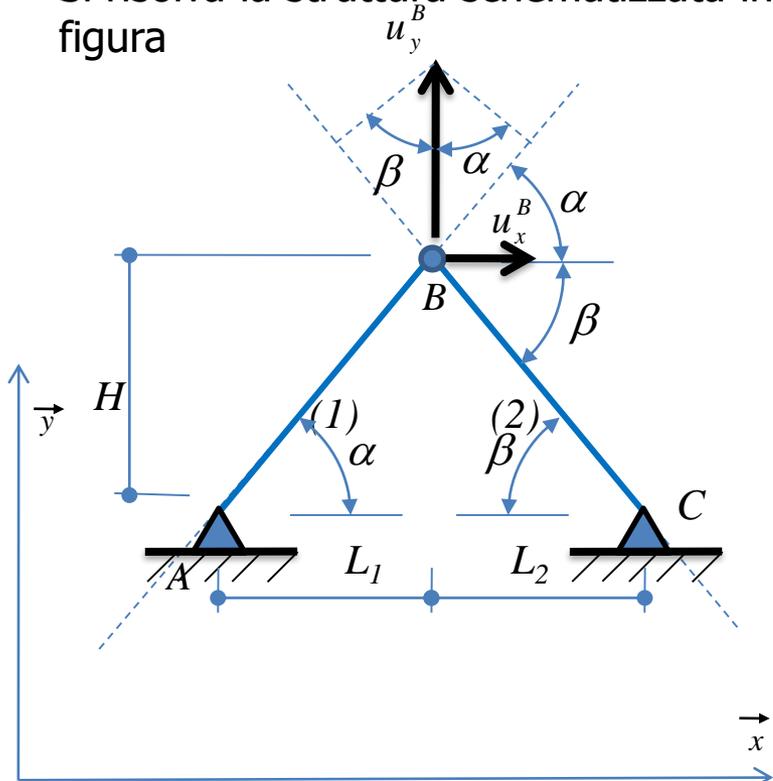
dalla precedente relazione si calcola

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.224 \\ 0.085 \end{bmatrix} \text{ mm}$$



### Esempio – equazioni di congruenza

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$F_x = 1 \text{ kN}$        $L_1 = 1,5 \text{ m}$        $H = 1,5 \text{ m}$   
 $F_y = 2 \text{ kN}$        $L_2 = 2,0 \text{ m}$

4. Equazioni di congruenza  
 Siano  $u_x^B$  e  $u_y^B$  le componenti verticali ed orizzontali dello spostamento della cerniera B. È possibile esprimere gli allungamenti delle due aste costituenti il sistema in funzione di tali componenti di spostamento come segue

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\cos(\beta) & \sin(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^B \\ u_y^B \end{bmatrix}$$

$\underline{\delta}$                        $[C]$                        $\underline{u}$

sinteticamente si scrive allora

$$\underline{\delta} = [C] \underline{u}$$

dove sono stati introdotti

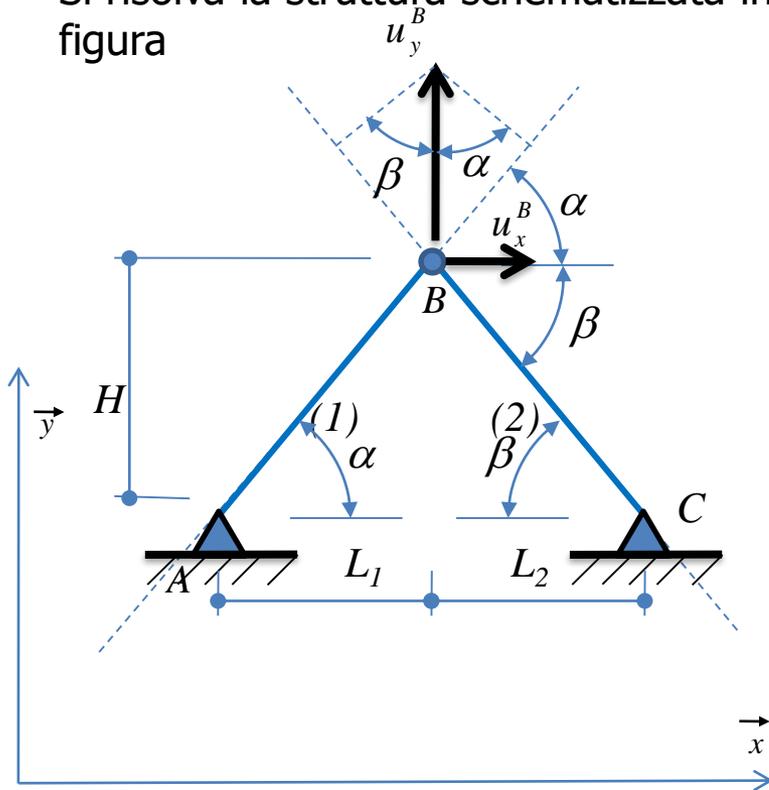
$[C]$  = matrice di congruenza

$\underline{u}$  = vettore degli spostamenti nodali



## Esempio – equazioni di congruenza

Si risolva la struttura schematizzata in figura



$$F_x = 1 \text{ kN} \quad L_1 = 1,5 \text{ m} \quad H = 1,5 \text{ m}$$

$$F_y = 2 \text{ kN} \quad L_2 = 2,0 \text{ m}$$

### 4. Equazioni di congruenza

Si noti che la matrice di equilibrio  $[B]$  è uguale alla trasposta della matrice di congruenza  $[C]$

$$[B] = [C]^T$$

Si dimostra che la precedente è una proprietà generalizzabile a tutte le strutture reticolari.

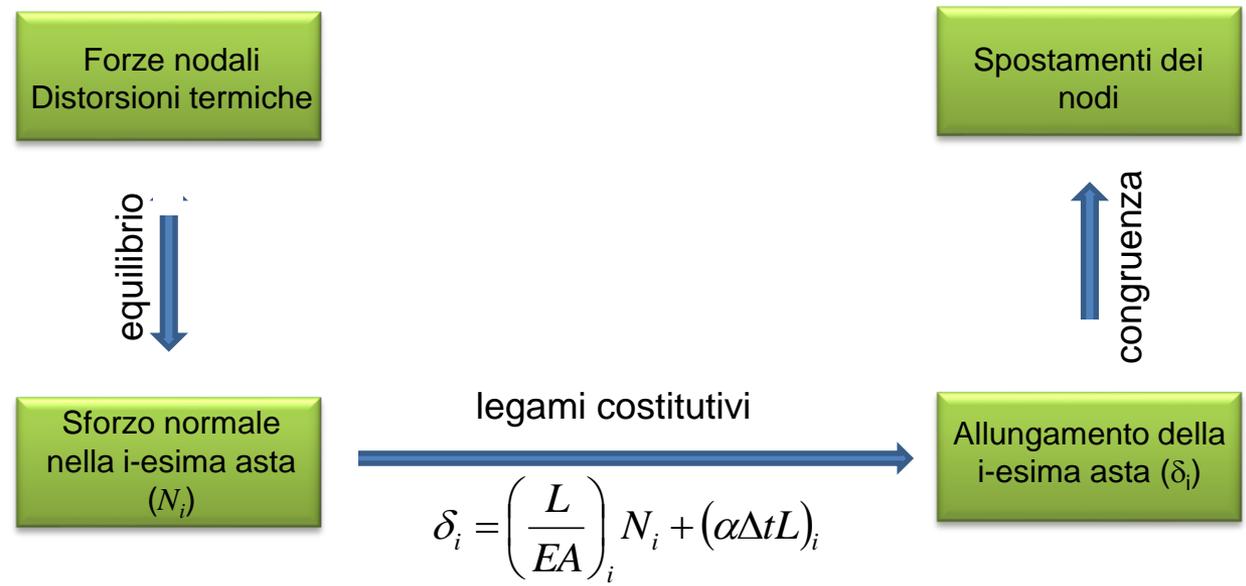
Utilizzando la precedente relazione e visto che la matrice di equilibrio è invertibile (il sistema è isostatico) è possibile invertire le equazioni di congruenza e calcolare gli spostamenti del nodo  $B$  come segue

$$\begin{bmatrix} u_x^B \\ u_y^B \end{bmatrix} = [C]^{-1} \underline{\delta} = \begin{bmatrix} 0,075 \\ 0,242 \end{bmatrix} \text{ mm}$$



# Il problema strutturale per i sistemi reticolari piani

La procedura di analisi descritta nella presente lezione sarà generalizzata nella prossima lezione in modo da poter essere applicata ad un qualunque sistema reticolare piano a vincoli fissi.





*Università degli Studi di Firenze*

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)  
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni  
Docente: Mario Fagone  
Argomento: Sistemi reticolari: definizione del problema strutturale



Facoltà di Architettura

# Strutture sollecitate assialmente

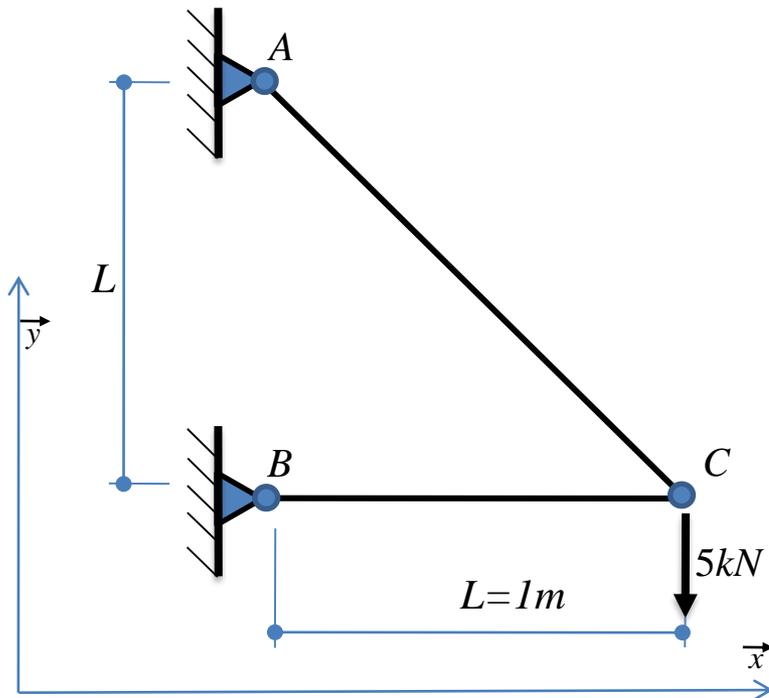
Sistema reticolare piano isostatico



## Esercizio

Il sistema reticolare in figura è realizzato mediante due aste in legno ( $E=10GPa$ ) aventi sezione trasversale rettangolare delle seguenti dimensioni:  $A_{AC} = 10 \times 10 cm$   
 $A_{BC} = 5 \times 10 cm$

Seguendo la metodologia di soluzione indicata nella sessione teorica della presente lezione si risolve il sistema reticolare piano schematizzato in figura





*Università degli Studi di Firenze*

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)  
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni  
Docente: Mario Fagone  
Argomento: Sistemi reticolari: definizione del problema strutturale



Facoltà di Architettura

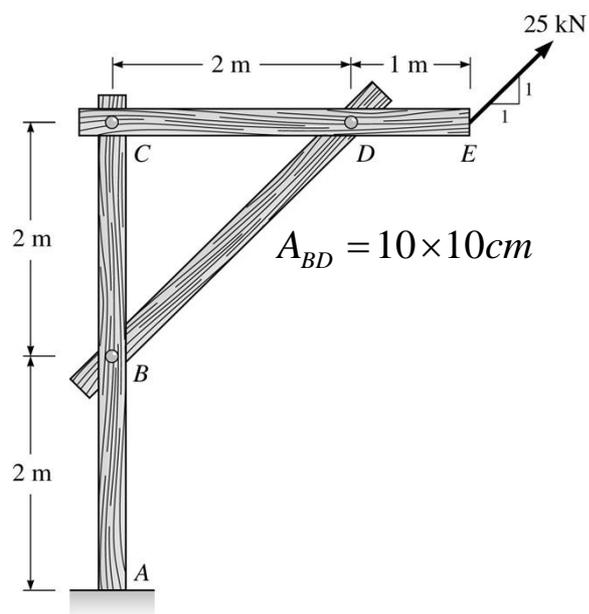
# Strutture sollecitate assialmente

Tensione e deformazione  
nelle aste



## Esercizio

Il sistema strutturale in legno schematizzato in figura ( $E=10GPa$ ) è caricato da una forza di  $25kN$  applicata in corrispondenza del baricentro della sezione in  $E$



Per tale sistema

- si verifichi la condizione di isostaticità
- si determinino le reazioni dei vincoli interni ed esterni

Per la biella  $BD$  si determini inoltre

- il valore della tensione normale
- lo spostamento relativo tra i nodi B e D



*Università degli Studi di Firenze*

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)  
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni  
Docente: Mario Fagone  
Argomento: Sistemi reticolari: definizione del problema strutturale



Facoltà di Architettura

# Strutture sollecitate assialmente

Sistema reticolare piano isostatico



## Esercizio

La barra in alluminio  $BC$  dello schema in figura ha una sezione trasversale circolare di diametro pari a  $30\text{mm}$ . Essa è caricata da una forza parallela al suo asse applicata in corrispondenza del nodo  $C$  ed è collegata in corrispondenza dell'estremo  $B$  ad una camicia in acciaio avente sezione trasversale a corona circolare di raggio interno pari a  $75\text{mm}$ .

Si determini il valore minimo dello spessore del tratto  $BA$  tale che lo spostamento verticale del nodo  $C$  sia inferiore a  $3\text{mm}$ .

( $E_{acc}=210\text{GPa}$ ;  $E_{Al}=70\text{GPa}$ )

