

Sistemi reticolari piani



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

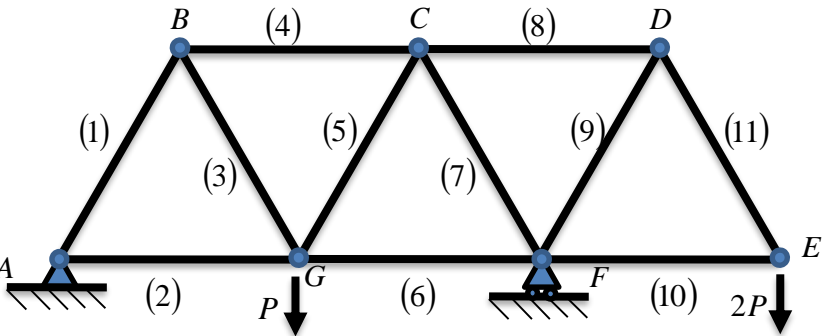
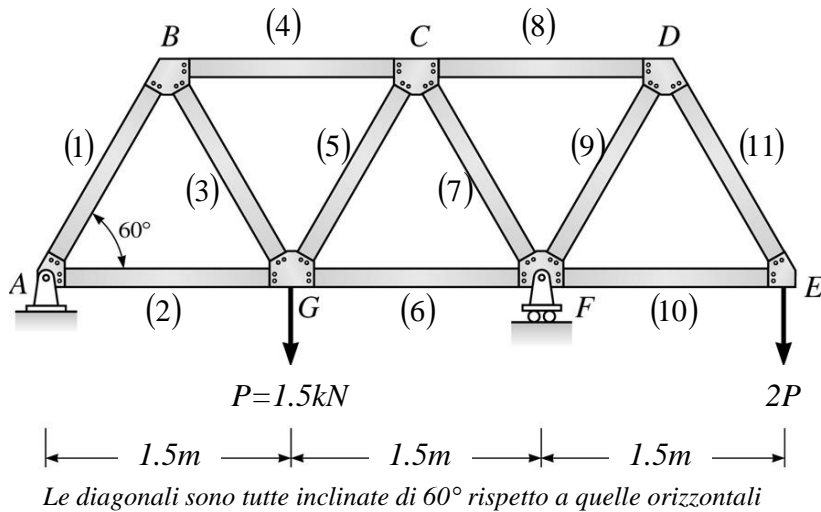


Analisi di sistemi isostatici attraverso il
metodo dell'equilibrio dei nodi



Il metodo "dell'equilibrio dei nodi"

Si consideri il sistema reticolare piano schematizzato in figura. Per tale sistema si ha



$$n=7; \quad b=11; \quad v=3$$

$$\rightarrow \ell - i = 2n - b - v = 14 - 11 - 3 = 0 \rightarrow \ell = i$$

Esso è realizzato affiancando maglie triangolari e quindi è internamente isostatico. Inoltre tutti i gradi di libertà globali sono impediti dai vincoli esterni per cui si ha

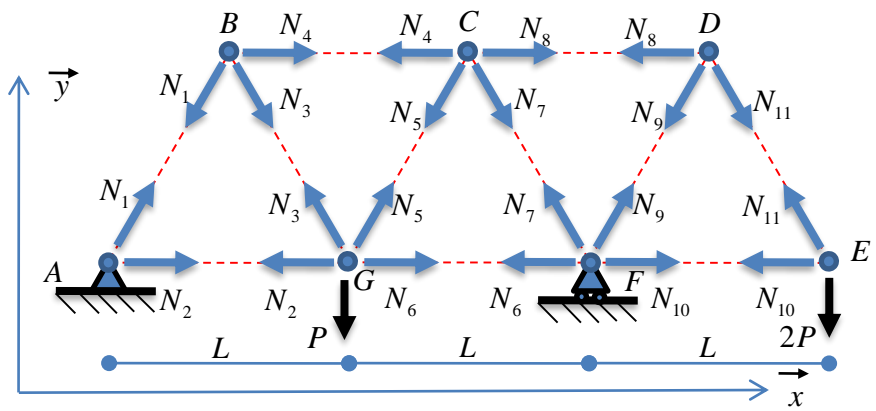
$$\ell = 0 \rightarrow i = 0$$

Il sistema in esame è allora isostatico.

Lo schema strutturale per il sistema in esame è quello riportato a fianco



Il metodo " dell'equilibrio dei nodi "



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

Si ipotizzi inizialmente che tutte le aste del sistema siano dei tiranti. Le loro azioni sui nodi sono allora quelle riportate nello schema a fianco.

A titolo di esempio si imponi l'equilibrio alla traslazione del nodo E

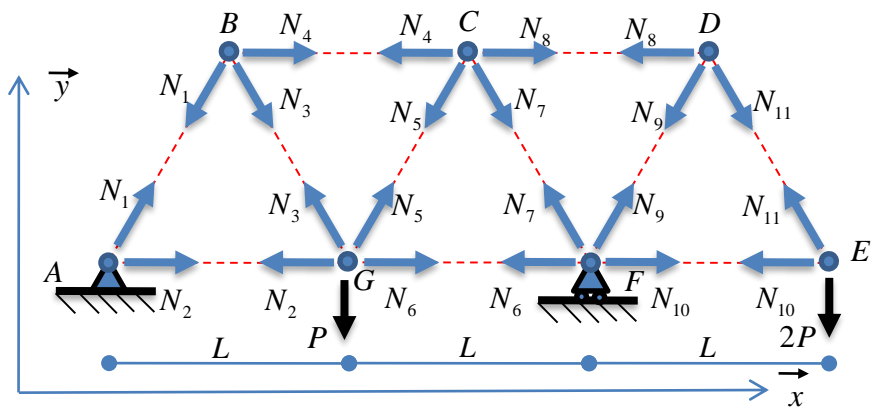
$$\begin{cases} \sum_{nodo E} F_x = 0 \rightarrow -N_{10} - N_{11} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sum_{nodo E} F_y = 0 \rightarrow -2P + N_{11} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

Il precedente è un sistema di due equazioni in due incognite e quindi da esso si ricavano univocamente i seguenti valori di sforzo normale

$$\begin{cases} N_{10} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} P & (puntone) \\ N_{11} = \frac{4\sqrt{3}}{3} P & (tirante) \end{cases}$$

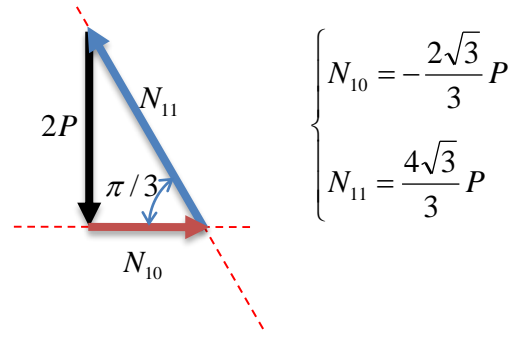


Il metodo " dell'equilibrio dei nodi "



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

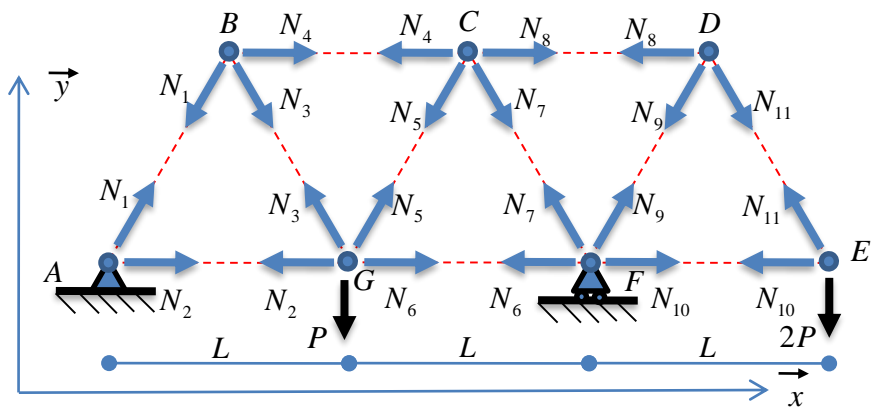
Si osservi che avremmo potuto agevolmente imporre l'equilibrio del nodo E attraverso un procedimento grafico. Si ha infatti



Dal precedente poligono di equilibrio sono confermati i moduli ed i versi degli sforzi presenti nelle aste coinvolte nell'equilibrio del nodo in esame



Il metodo " dell'equilibrio dei nodi "



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

Si imposti adesso l'equilibrio del nodo D . Si ha il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \sum_{nodo D} F_x = 0 \rightarrow -N_8 - N_9 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + N_{11} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sum_{nodo D} F_y = 0 \rightarrow -N_9 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - N_{11} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

Il precedente è un sistema di due equazioni in tre incognite e quindi non è risolvibile.

Se però si utilizza il valore dello sforzo normale presente nell'asta (11) determinato attraverso l'equilibrio del nodo E , da esso possono essere determinati gli sforzi normali N_8 ed N_9 .

Tali considerazioni suggeriscono una procedura per la determinazione degli sforzi normali presenti nelle aste del sistema, basata sull'imposizione sequenziale delle equazioni di equilibrio alla traslazione di nodi nei quali confluiscono al più due forze incognite. Al fine di ridurre al minimo le incognite presenti in dette equazioni di equilibrio, è conveniente determinare inizialmente le reazioni dei vincoli esterni.



Il metodo " dell'equilibrio dei nodi " – strategia di soluzione

La procedura operativa attraverso la quale possono essere determinati gli sforzi normali presenti nelle aste, mediante sottosistemi di equazioni di equilibrio dei nodi, può essere schematizzata come segue:

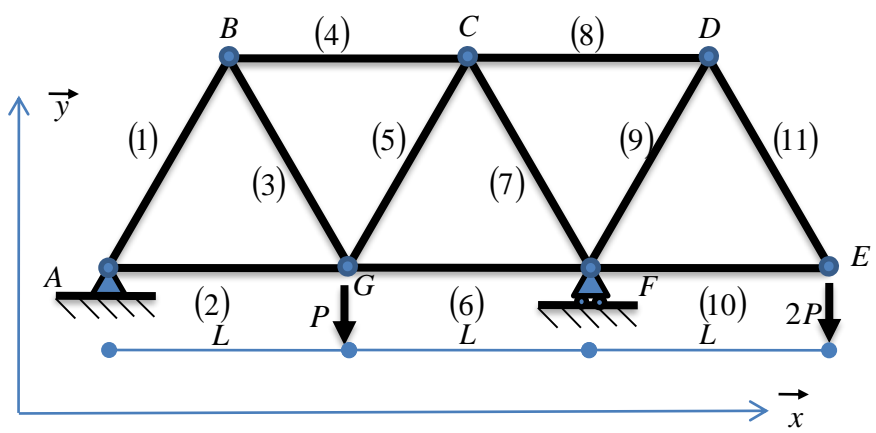
1. verifica dell'isostaticità del sistema
2. calcolo delle reazioni vincolari esterne
3. calcolo degli sforzi normali nelle aste attraverso l'imposizione sequenziale delle equazioni di equilibrio su nodi in cui si hanno al più due sforzi normali incogniti (nodi canonici)
4. verifica



Esempio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ($E=210GPa$, $\alpha=11.6 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$) aventi tutte sezione trasversale circolare di area pari a $50mm^2$. Si risolva il sistema strutturale

1. verifica dell'isostaticità del sistema
Tale verifica deve essere sempre effettuata prima di risolvere i sistemi strutturali. L'isostaticità della struttura in esame è stata effettuata nella prima parte della lezione.



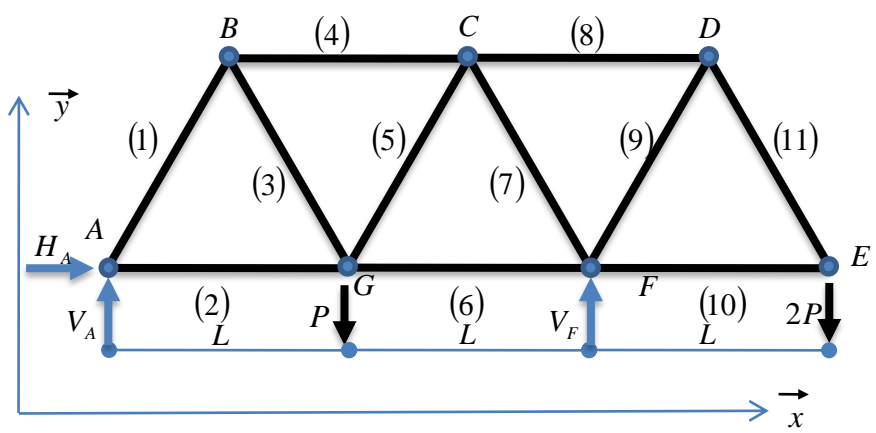
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$



Esempio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ($E=210GPa$, $\alpha=11.6 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$) aventi tutte sezione trasversale circolare di area pari a $50mm^2$. Si risolva il sistema strutturale

2. calcolo delle reazioni vincolari esterne
 Si traccia un diagramma di corpo libero del sistema in cui si evidenziano le reazioni vincolari esterne. Le equazioni globali di equilibrio si scrivono come segue



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

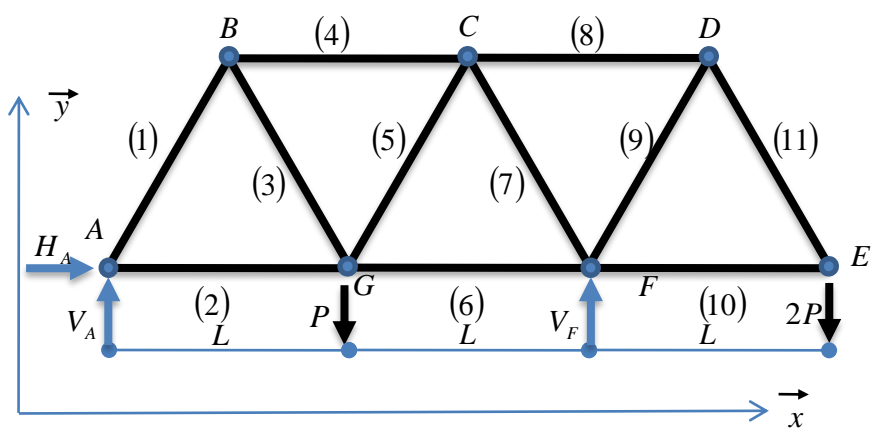
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_F - 3P = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \rightarrow -PL + V_F 2L - 2P3L = 0 \end{cases}$$





Esempio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ($E=210GPa$, $\alpha=11.6 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$) aventi tutte sezione trasversale circolare di area pari a $50mm^2$. Si risolva il sistema strutturale



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

2. calcolo delle reazioni vincolari esterne
 Si traccia un diagramma di corpo libero del sistema in cui si evidenziano le reazioni vincolari esterne. Le equazioni globali di equilibrio si scrivono come segue

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_F - 3P = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \rightarrow -PL + V_F \cdot 2L - 2P \cdot 3L = 0 \end{cases}$$

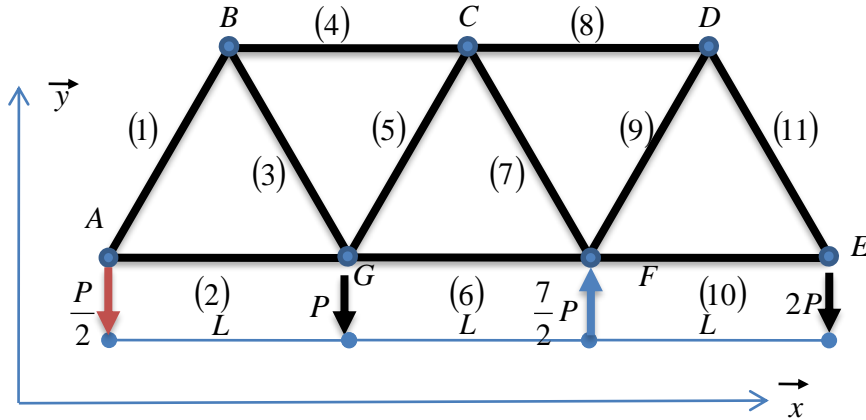


Da esse si ottengono le reazioni dei vincoli esterni

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A &= -\frac{1}{2}P \\ V_F &= \frac{7}{2}P \end{aligned}$$



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Alla struttura si applicano sia le forze esterne, sia le reazioni vincolari esterne. Predisponiamo inoltre una matrice in cui riporteremo gli sforzi normali che saranno determinati.

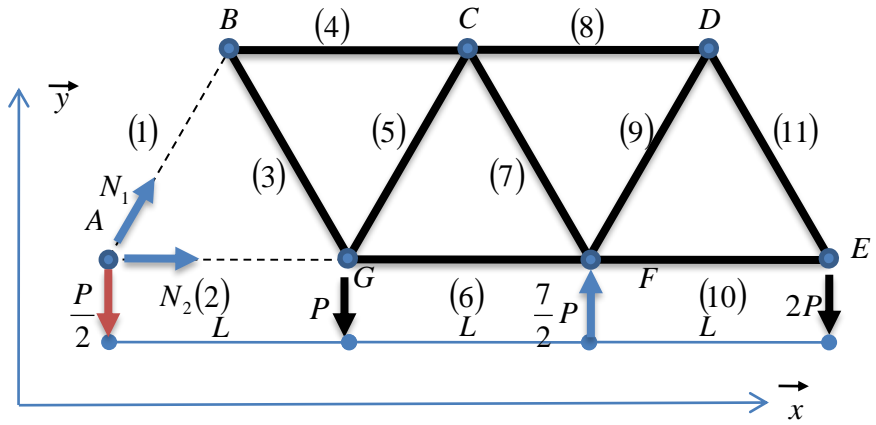
Si inizia imponendo l'equilibrio di un nodo in cui confluiscono al più due sforzi normali incogniti: per lo schema in figura possiamo iniziare indifferentemente dal nodo A o dal nodo E.

Nel seguito indicheremo in rosso i puntoni, in blu i tiranti ed in nero le aste per le quali lo sforzo normale non è stato ancora determinato.

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)			(7)		
(2)			(8)		
(3)			(9)		
(4)			(10)		
(5)			(11)		
(6)					



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 L=1.5m; P=1.5kN

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Nodo A.

$$\begin{cases} \sum_{nodo A} F_x = 0 \rightarrow N_2 + N_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sum_{nodo A} F_y = 0 \rightarrow -\frac{P}{2} + N_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

Da cui si ha

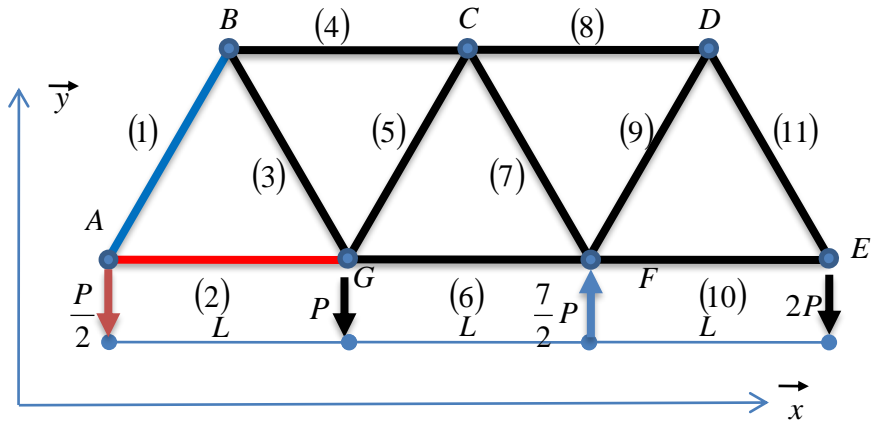
$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} P \quad (\text{tirante})$$

$$N_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} P \quad (\text{puntone})$$

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)			(7)		
(2)			(8)		
(3)			(9)		
(4)			(10)		
(5)			(11)		
(6)					



Esempio



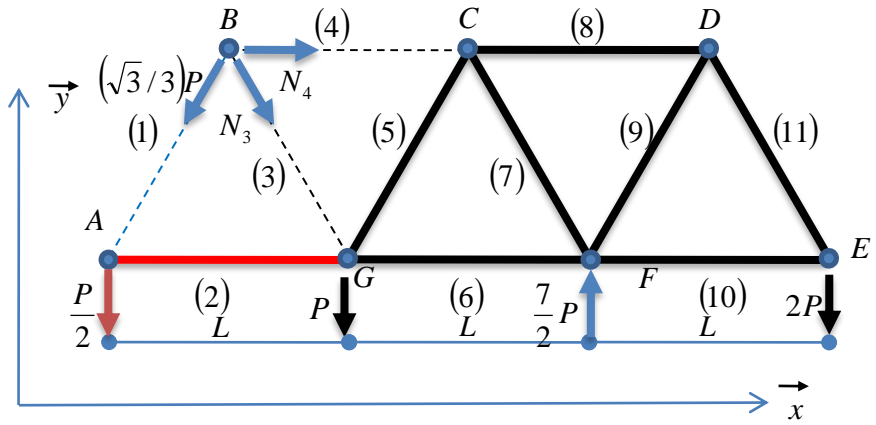
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi B ed E).

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)		
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)		
(3)			(9)		
(4)			(10)		
(5)			(11)		
(6)					



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi B ed E).
 Nodo B.

$$\begin{cases} \sum_{nodo B} F_x = 0 \rightarrow -(\sqrt{3}/3)P \cos(\pi/3) + N_3 \cos(\pi/3) + N_4 = 0 \\ \sum_{nodo B} F_y = 0 \rightarrow -(\sqrt{3}/3)P \sin(\pi/3) - N_3 \sin(\pi/3) = 0 \end{cases}$$

Da cui si ha

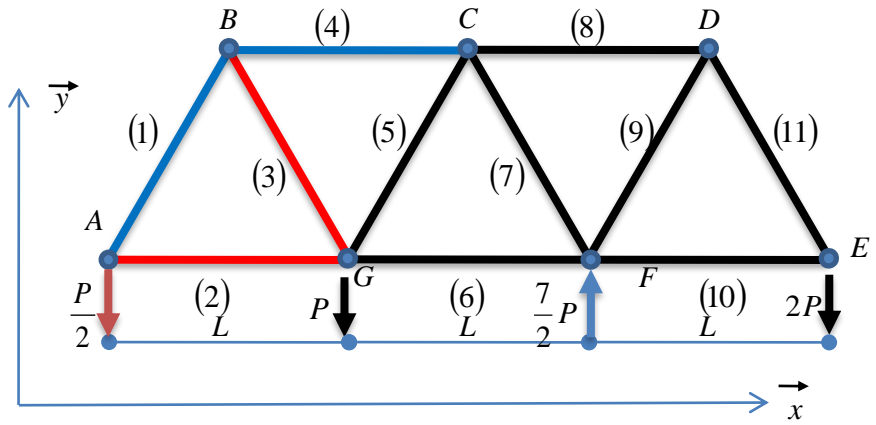
$$N_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}P \quad (\text{puntone})$$

$$N_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}P \quad (\text{tirante})$$

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)		
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)		
(3)			(9)		
(4)			(10)		
(5)			(11)		
(6)					



Esempio



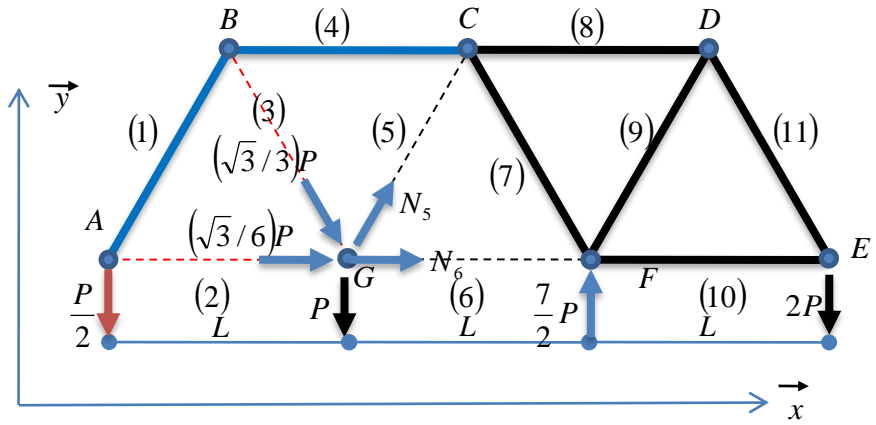
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi G ed E).

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)		
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)		
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)		
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)			(11)		
(6)					



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi G ed E).
 Nodo G.

$$\begin{cases} \sum_{nodo\ G} F_x = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}P + \frac{\sqrt{3}}{3}P \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + N_5 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + N_6 = 0 \\ \sum_{nodo\ G} F_y = 0 \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}P \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - P + N_5 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

Da cui si ha

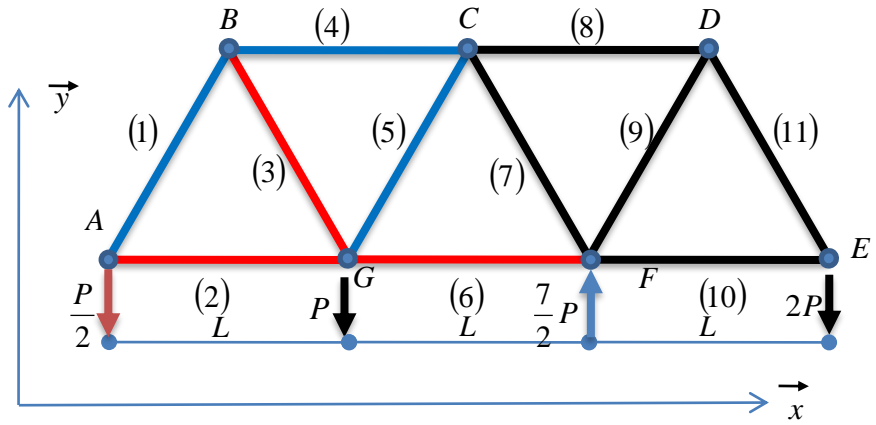
$$N_5 = \sqrt{3}P \quad (\text{tirante})$$

$$N_6 = -\frac{5\sqrt{3}}{6}P \quad (\text{puntone})$$

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)		
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)		
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)		
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)			(11)		
(6)					



Esempio



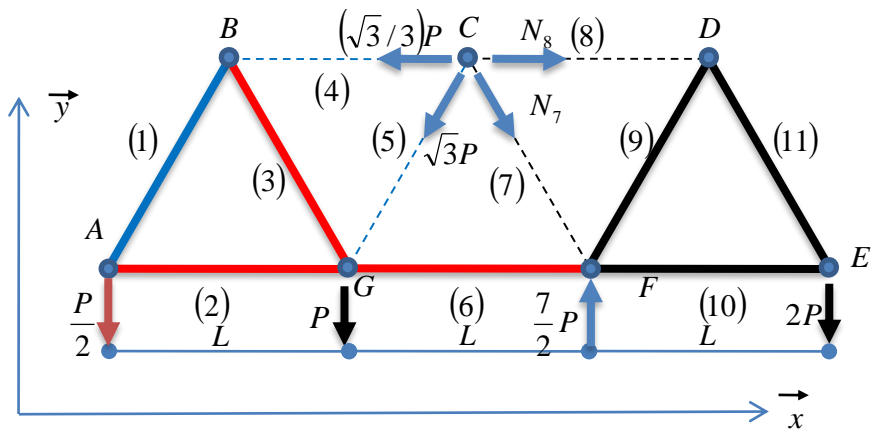
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi C ed E).

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)		
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)		
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)		
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)		
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi C ed E).
 Nodo C.

$$\begin{cases} \sum_{nodo C} F_x = 0 \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}P - \sqrt{3}P \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + N_7 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + N_8 = 0 \\ \sum_{nodo C} F_y = 0 \rightarrow -\sqrt{3}P \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - N_7 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

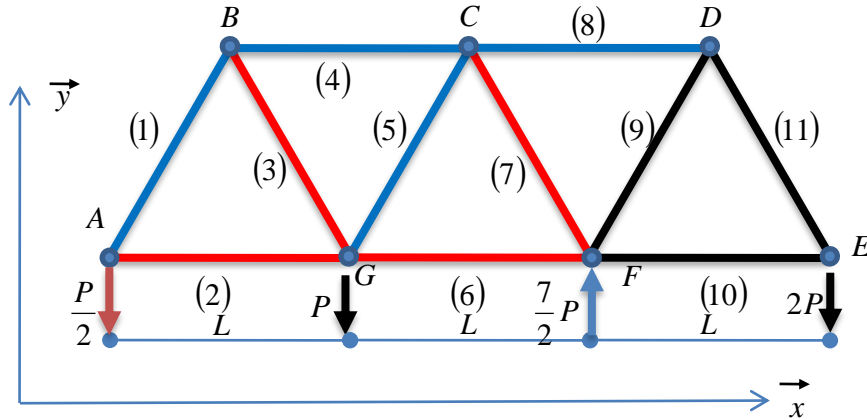
Da cui si ha

$$\begin{aligned} N_7 &= -\sqrt{3}P \quad (\text{puntone}) \\ N_8 &= \frac{4\sqrt{3}}{3}P \quad (\text{tirante}) \end{aligned}$$

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)		
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)		
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)		
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)		
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			



Esempio



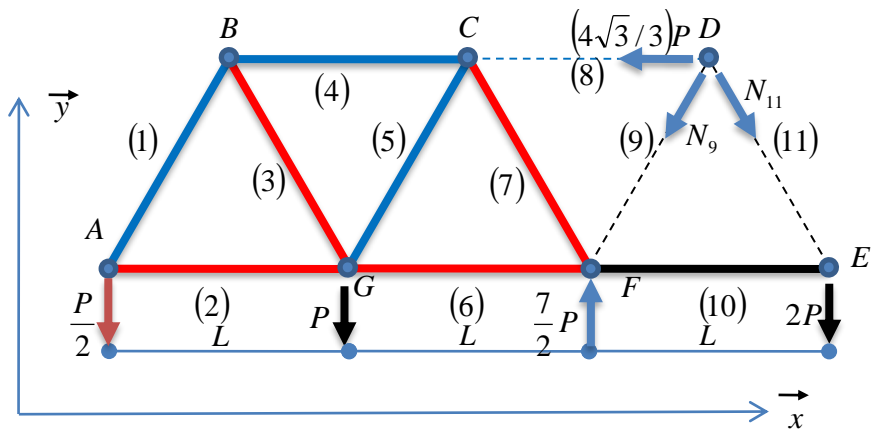
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi D, E ed F).

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)	$-\sqrt{3}P$	P
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)		
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)		
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)	$-\sqrt{3}P$	P
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)		
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)		
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi D, E ed F).

Nodo D.

$$\begin{cases} \sum_{nodo D} F_x = 0 \rightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3}P - N_9 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + N_{11} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sum_{nodo D} F_y = 0 \rightarrow -N_9 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - N_{11} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

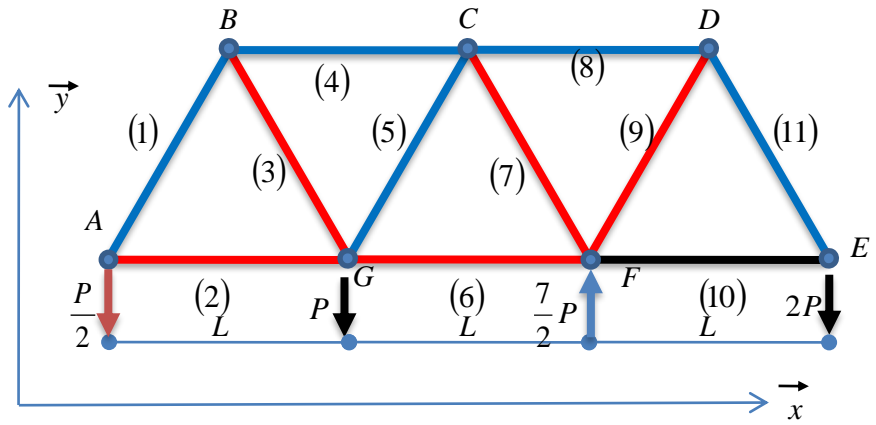
Da cui si ha

$$N_9 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}P \quad (\text{puntone})$$

$$N_{11} = \frac{4\sqrt{3}}{3}P \quad (\text{tirante})$$



Esempio



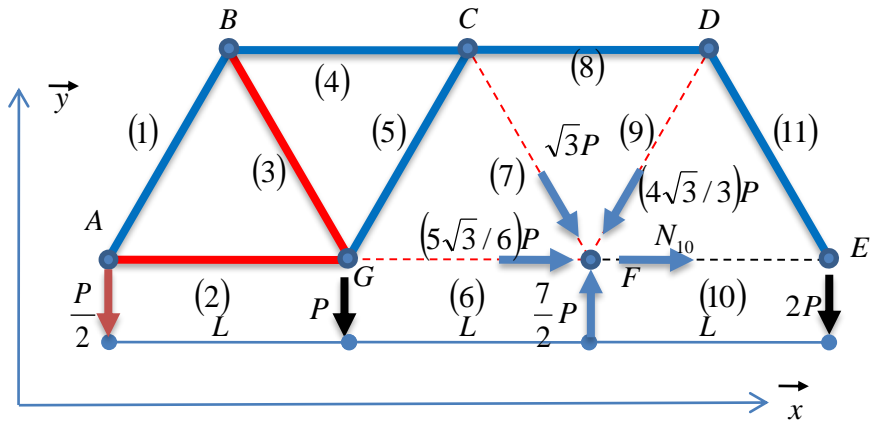
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi E ed F).

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)	$-\sqrt{3}P$	P
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)	$-(4\sqrt{3}/3)P$	P
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Si prosegue imponendo l'equilibrio di un ulteriore nodo nel quale confluiscono al più due sforzi normali incogniti (nodi E ed F).

Nodo F.

$$\sum_{nodo F} F_x = 0 \rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{6}P + \sqrt{3}P \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{3}P \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + N_{10} = 0$$

$$\sum_{nodo F} F_y = 0 \rightarrow -\sqrt{3}P \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{3}P \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{7}{2}P = 0$$

Dalla prima equazione si ha

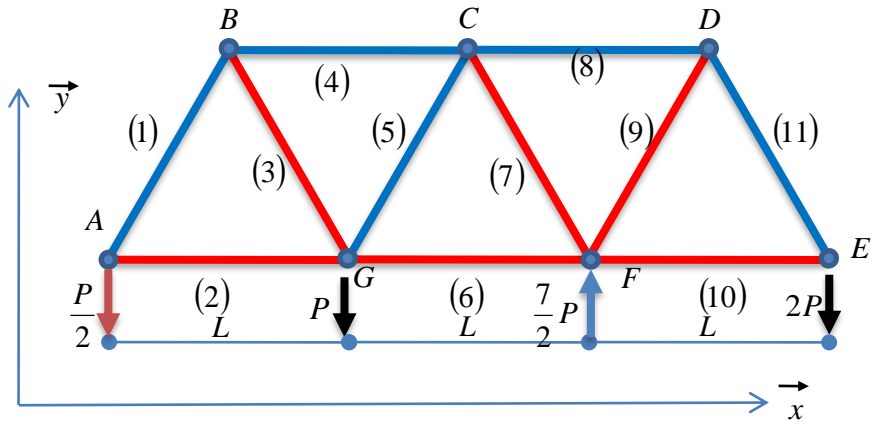
$$N_{10} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}P \text{ (puntone)}$$

La seconda equazione di equilibrio è invece identicamente soddisfatta: essa rappresenta una prima verifica della correttezza delle sollecitazioni determinate.

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)	$-\sqrt{3}P$	P
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)	$-(4\sqrt{3}/3)P$	P
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)		
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			



Esempio



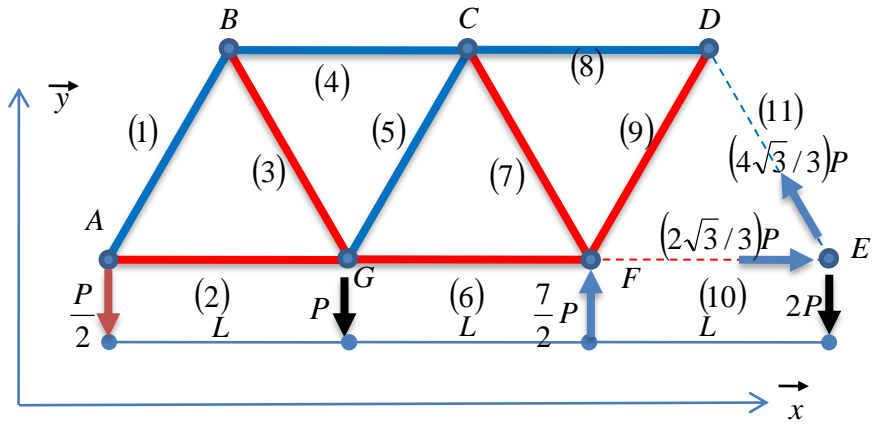
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

3. calcolo degli sforzi normali nelle aste
 Mediante la procedura descritta è stato possibile determinare le reazioni dei vincoli esterni e gli sforzi normali presenti in tutte le aste del sistema. Sono state a tal fine utilizzate le equazioni di equilibrio globale e le equazioni di equilibrio scritte per tutti i nodi del sistema tranne che per il nodo E. Queste ultime devono in ogni caso essere identicamente soddisfatte e possono essere utilizzate per verifica.

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)	$-\sqrt{3}P$	P
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)	$-(4\sqrt{3}/3)P$	P
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)	$-(2\sqrt{3}/3)P$	P
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			



Esempio



Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$

4. verifica dell'equilibrio del nodo E

$$\begin{cases}
 \sum_{nodo E} F_x = 0 \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}P - \frac{4\sqrt{3}}{3}P \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow 0 = 0 \\
 \sum_{nodo E} F_y = 0 \rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{3}P \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2P = 0 \rightarrow 0 = 0
 \end{cases}$$

Le precedenti relazioni sono identicamente soddisfatte

Asta	N	T/P	Asta	N	T/P
(1)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(7)	$-\sqrt{3}P$	P
(2)	$-(\sqrt{3}/6)P$	P	(8)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(3)	$-(\sqrt{3}/3)P$	P	(9)	$-(4\sqrt{3}/3)P$	P
(4)	$(\sqrt{3}/3)P$	T	(10)	$-(2\sqrt{3}/3)P$	P
(5)	$\sqrt{3}P$	T	(11)	$(4\sqrt{3}/3)P$	T
(6)	$-(5\sqrt{3}/6)P$	P			



Verifica delle tensioni normali presenti nelle aste

Analogamente a quanto fatto nelle precedenti lezioni, utilizzando i valori degli sforzi normali così determinati è possibile effettuare una prima verifica del livello di utilizzo del materiale impiegato nella struttura (N.B. la descrizione puntuale della modalità di verifica SLU esula dagli scopi del presente corso)

Asta	N	Tirante Puntone	Area [mm ²]	$\sigma=N/A$ [MPa]	σ_y [MPa]	$s=\sigma/\sigma$
(1)	866N	T	50	17.32	±235	13.6
(2)	-433N	P	50	-8.66	±235	27.1
(3)	-866N	P	50	-17.32	±235	13.6
(4)	866N	T	50	17.32	±235	13.6
(5)	2598N	T	50	51.96	±235	4.5
(6)	-2165N	P	50	-43.30	±235	5.4
(7)	-2598N	P	50	-51.96	±235	4.5
(8)	3464N	T	50	69.28	±235	3.4
(9)	-3564N	P	50	-69.28	±235	3.4
(10)	-1732N	P	50	-34.64	±235	6.8
(11)	3464N	T	50	69.28	±235	3.4