Sistemi reticolari piani

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Analisi di sistemi reticolari iperstatici

Metodo degli spostamenti

Introduzione

Nelle precedenti lezioni è stato mostrato che per i sistemi reticolari piani vale la seguente identità

$$g.d.l.-g.d.v.=2n-b-v=\ell-\iota$$

n = numero di nodi
b = numero di aste
v = vincoli esterni

Come si è visto, per il principio di mutua esclusione, nelle strutture reticolari piane possono essere presenti un numero di componenti indipendenti di forze nodali esterne al più pari a

$$f=2n-v$$

La dimensione del vettore delle forze nodali applicati al sistema $\underline{F}$ è allora pari a f. È immediato verificare che il vettore degli spostamenti nodali $\underline{u}_f$ ha lo stesso numero di termini del vettore delle forze esterne ($\dim(\underline{F})=\dim(\underline{u}_f)=f$).

Per i **<u>sistemi reticolari piani isostatici</u>** si ha:

$$\{\ell=0;\ \iota=0\} \rightarrow 2n-b-v=0 \rightarrow b=2n-v=f$$

Il numero di aste presenti in una struttura reticolare isostatica è allora uguale al numero di forze nodali esterne. Pertanto la dimensione del vettore degli sforzi normali è uguale alla dimensione del vettore delle forze esterne e del vettore degli spostamenti nodali

$$\dim(\underline{F})=\dim(\underline{u}_f))=\dim(\underline{N})= b$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema strutturale per i sistemi reticolari <u>isostatici</u>

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
$f=gdl-v$	gdl non vincolati esternamente

Nei sistemi isostatici
- si ha $2n-b-v=0 \rightarrow f-b=0$
- la soluzione delle equazioni di equilibrio esiste ed è unica ($\exists\ [C_f]^{-T}$)

Dati

Incognite

Reazioni vincolari esterne $\underline{R}$

$\underline{F}$

Spostam. nodali $\underline{u}_f$

Cedim. vincolari $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente

$$\underset{[v\times1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

$$\underset{[b\times1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[C_f]^{-T}}\ \underset{[b\times1]}{\underline{F}}$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{u}_f} = \underset{[b\times b]}{[C_f]^{-1}}\left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}\right)$$

congruenza

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Sforzi normali $\underline{N}$

legami costitutivi

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[D]}\ \underset{[b\times1]}{\underline{N}} + \underset{[b\times1]}{\underline{\delta}_a}$$

$$\underset{[b\times1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times1]}{\underline{\delta}_a}\right)$$

Allungamenti delle aste

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[C_f]}\ \underset{[b\times1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Introduzione

Per i **sistemi reticolari piani <u>iperstatici e privi di labilità</u>** (i sistemi labili non sono infatti di interesse strutturale se non eventualmente per particolari condizioni di carico) si ha invece:

$$\{\ell=0;\ \iota>0\} \rightarrow 2n-b-v=\ell-\iota<0 \rightarrow b>2n-v \rightarrow b>f$$

Il numero di aste presenti in una struttura reticolare iperstatica e priva di labilità è allora maggiore del numero di forze nodali esterne. Pertanto la dimensione del vettore degli sforzi normali è maggiore della dimensione del vettore delle forze esterne (e quindi anche del vettore degli spostamenti nodali)

$$\{\dim(\underline{N})= b\} > \{\dim(\underline{F})=\dim(\underline{u})=f\}$$

Il problema strutturale per sistemi reticolari piani iperstatici si modifica allora come segue

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema strutturale per i sistemi reticolari generici

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
$f=gdl-v$	gdl non vincolati esternamente

Dati

Incognite

Reazioni vincolari esterne $\underline{R}$

$\underline{F}$

Spostam. nodali $\underline{u}_f$

Cedim. vincolari $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente

$$\underset{[v\times 1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

$$\underset{[f\times 1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times f]}{[C_f]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f}$$

congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}}$$

Sforzi normali $\underline{N}$

legami costitutivi

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[D]}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} + \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}$$

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}\right)$$

Allungamenti delle aste

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times f]}{[C_f]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}}$$

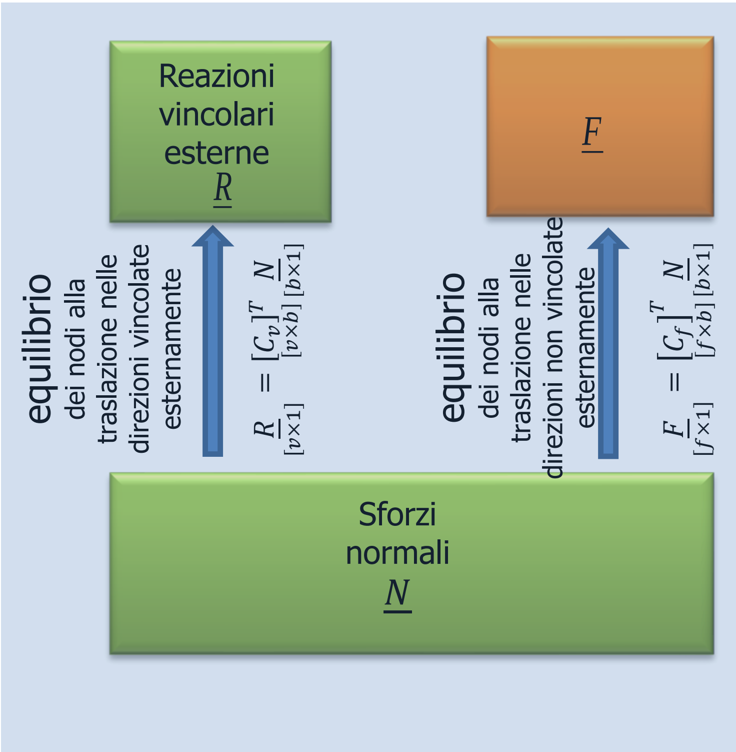
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema strutturale per i sistemi reticolari generici

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
$f=gdl-v$	*gdl* non vincolati esternamente

Dati

Incognite



Le equazioni di equilibrio formano un sistema di $v+f$ equazioni lineari ($v+f$=somma delle righe delle matrici dei coefficienti) in $v+b$ incognite (somma degli elementi di $\underline{N}$ ed $\underline{R}$). Essendo, per quanto detto *(b>f),* il numero delle incognite è maggiore del numero delle equazioni lineari e quindi il sistema è *indeterminato* (per ipotesi la struttura non presenta labilità): esistono infinite combinazioni dei valori degli sforzi normali e delle reazioni vincolari staticamente ammissibili.
Il problema strutturale non può allora essere risolto in maniera sequenziale come fatto nel caso di sistemi isostatici.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esistenza e unicità della soluzione del problema elastico

Come detto però, si dimostra che il problema elastico lineare ammette una ed una sola soluzione e quindi, fra le infinite combinazioni degli sforzi normali e reazioni vincolari staticamente ammissibili, ne esiste *una ed una sola* tale che gli spostamenti nodali ad essa corrispondenti siano cinematicamente congruenti.

Esistono diverse strategie di soluzione del problema strutturale descritto. Di seguito viene descritto il metodo degli spostamenti.

Il metodo degli spostamenti per reticolari iperstatiche

- Equazioni [n. di equazioni]:
  - equilibrio

$$\underset{[v\times 1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T} \underset{[b\times 1]}{\underline{N}} \qquad [v]$$

$$\underset{[f\times 1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T} \underset{[b\times 1]}{\underline{N}} \qquad [f=2n-v]$$

  - legame costitutivo

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]} \left(\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta_a}} \right) \qquad [b]$$

  - congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times f]}{[C_f]} \underset{[f\times 1]}{\underline{u_f}} + \underset{[b\times v]}{[C_v]} \underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}} \qquad [b]$$

n. tot. [2(n+b)]

- Incognite

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{[v\times 1]}{\underline{R}} & [v] \\ \underset{[b\times 1]}{\underline{N}} & [b] \\ \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} & [b] \\ \underset{[f\times 1]}{\underline{u_f}} & [f=2n-v] \end{array} \right.$$

n. tot. [2(n+b)]

- Dati

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{[f\times 1]}{\underline{F}} & \underset{[b\times f]}{[C_f]} \\ \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta_a}} & \underset{[b\times v]}{[C_v]} \end{array} \right\}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il metodo degli spostamenti per reticolari iperstatiche

- Equazioni [n. di equazioni]:
  - equilibrio

$$\underset{[v\times 1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

$$\underset{[f\times 1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{\left[C_f\right]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[f\times b]}{\left[C_f\right]^T}\,\underset{[b\times b]}{[k]}\,\underset{[b\times f]}{\left[C_f\right]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f} + \underset{[f\times b]}{\left[C_f\right]^T}\,\underset{[b\times b]}{[k]}\,\underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}} - \underset{[f\times b]}{\left[C_f\right]^T}\,\underset{[b\times b]}{[k]}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}$$

Sostituendo

  - legame costitutivo

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}\right) = \underset{[b\times b]}{[k]}\,\underset{[b\times f]}{\left[C_f\right]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times b]}{[k]}\,\underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}} - \underset{[b\times b]}{[k]}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}$$

  - congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times f]}{\left[C_f\right]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}}$$

Il metodo degli spostamenti per reticolari iperstatiche

$$\underset{[v\times 1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\ \underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

$$\underset{[f\times 1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times b]}{[k]}\ \underset{[b\times f]}{[C_f]}\ \underset{[f\times 1]}{\underline{u_f}} + \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times b]}{[k]}\ \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}} - \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times b]}{[k]}\ \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta_a}}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times b]}{[k]}\ \underset{[b\times f]}{[C_f]}}_{\underset{[f\times f]}{[K]}}\ \underset{[f\times 1]}{\underline{u_f}} = \underbrace{\underset{[f\times 1]}{\underline{F}} - \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times b]}{[k]}\ \underset{[b\times v]}{[C_v]}\ \underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}} + \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\ \underset{[b\times b]}{[k]}\ \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta_a}}}_{\underset{[f\times 1]}{\underline{\hat{F}}}}$$

$$\downarrow$$

$$\underset{[f\times f]}{[K]}\ \underset{[f\times 1]}{\underline{u_f}} = \underset{[f\times 1]}{\underline{\hat{F}}} \rightarrow \boxed{\underset{[f\times 1]}{\underline{u_f}} = \underset{[f\times f]}{[K]^{-1}}\ \underset{[f\times 1]}{\underline{\hat{F}}}}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Strategia di soluzione

0.Azioni

$$\underset{[f\times1]}{\underline{F}} \quad \underset{[b\times1]}{\underline{\delta_a}} \quad \underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

0.Geom/vincoli

$$\underset{[b\times f]}{[C_f]} \quad \underset{[b\times v]}{[C_v]}$$

0. Geom/mat

$$\underset{[b\times b]}{[k]}$$

1. Calcoli preliminari

$$\underset{[f\times1]}{\underline{\hat{F}}} = \underset{[f\times1]}{\underline{F}} - \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\underset{[b\times b]}{[k]}\underset{[b\times v]}{[C_v]}\underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}} + \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\underset{[b\times b]}{[k]}\underset{[b\times1]}{\underline{\delta_a}}$$

$$\underset{[f\times f]}{[K]} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\underset{[b\times b]}{[k]}\underset{[b\times f]}{[C_f]}$$

2. Calcolo gli spostamenti nodali

$$\underset{[f\times1]}{\underline{u_f}} = \underset{[f\times f]}{[K]^{-1}}\underset{[f\times1]}{\underline{\hat{F}}}$$

3. Calcolo gli allungamenti

$$\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times f]}{[C_f]}\underset{[f\times1]}{\underline{u_f}} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\underset{[v\times1]}{\underline{\Delta}}$$

4. Calcolo gli sforzi normali

$$\underset{[b\times1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times1]}{\underline{\delta_a}}\right)$$

$$\underset{[f\times1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

5. Calcolo le reazioni esterne

$$\underset{[v\times1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\underset{[b\times1]}{\underline{N}}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il metodo degli spostamenti

Osservazioni:

- si è ipotizzato che i sistemi reticolari iperstatici in considerazione siano privi di labilità;
- la matrice di rigidezza del sistema è reale e simmetrica; inoltre, si può dimostrare che è definita positiva e che esiste la sua inversa;
- il metodo proposto è detto «degli spostamenti»; l'equazione su cui si basa ($\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f} = \underset{[f\times f]}{[K]^{-1}} \underset{[f\times 1]}{\underline{\hat{F}}}$) è ottenuta «condensando» le equazioni di congruenza e costitutive in quelle di equilibrio: pertanto, le equazioni inizialmente risolte sono quelle di equilibrio e da esse si ricavano, come variabili «primarie», gli spostamenti nodali;

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831