

Elementi di meccanica del continuo



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Introduzione.
Tensioni tangenziali
e scorrimenti angolari



Elementi di meccanica del continuo

Richiami

(Rem.) Elasticità lineare: la legge di Hooke

Modello costitutivo monoassiale

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \iff \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$

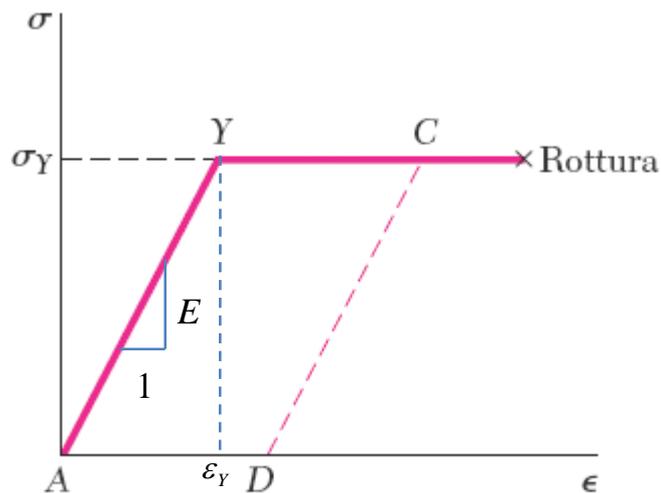


Figura 2.62

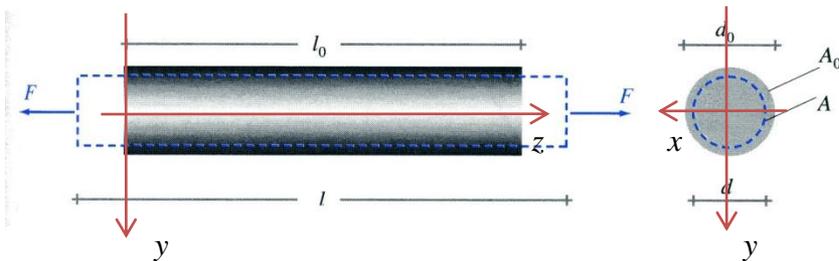
Diseguaglianze costitutive

$$E > 0$$

Evidenza fisica

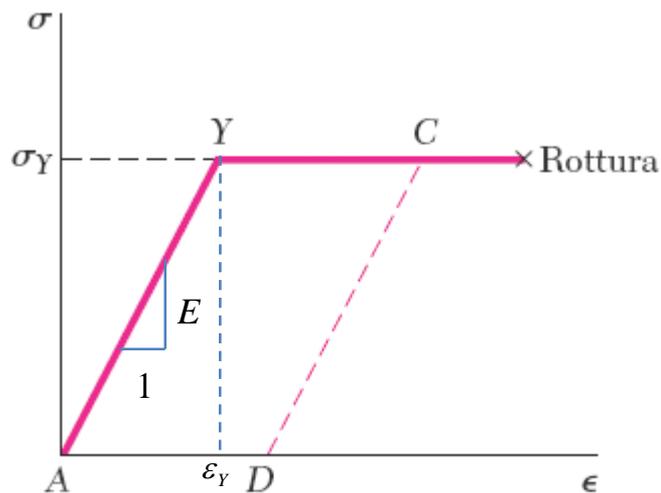
$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Lo dimostreremo prossimamente



(Rem.) Elasticità lineare: la legge di Hooke

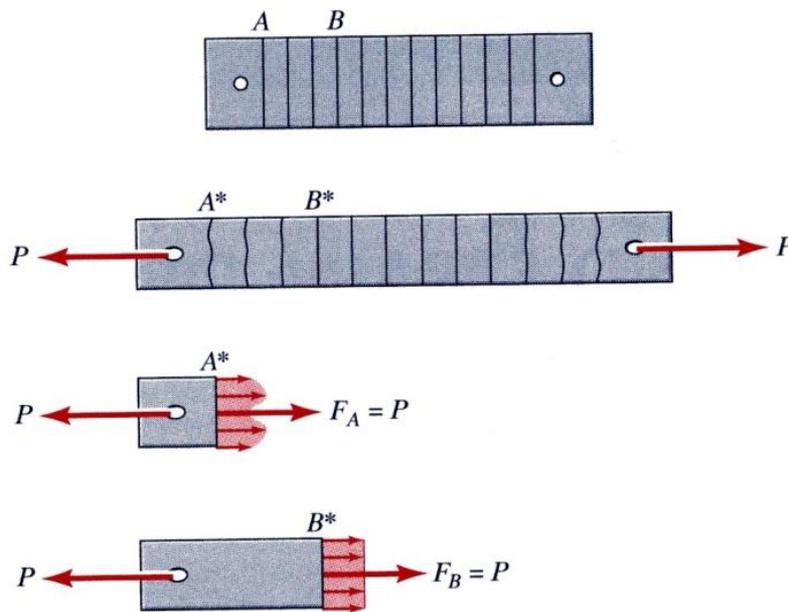
Modello costitutivo monoassiale



$$\sigma_z = E \epsilon_z \iff \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z$$

Figura 2.62



$$N = \int \sigma dA$$

(Rem.) Biella a comportamento elastico lineare

Comportamento assiale di una biella

- materiale: omogeneo, elastico, lineare;
- sezione trasversale costante

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta t = \varepsilon_e + \varepsilon_a$$

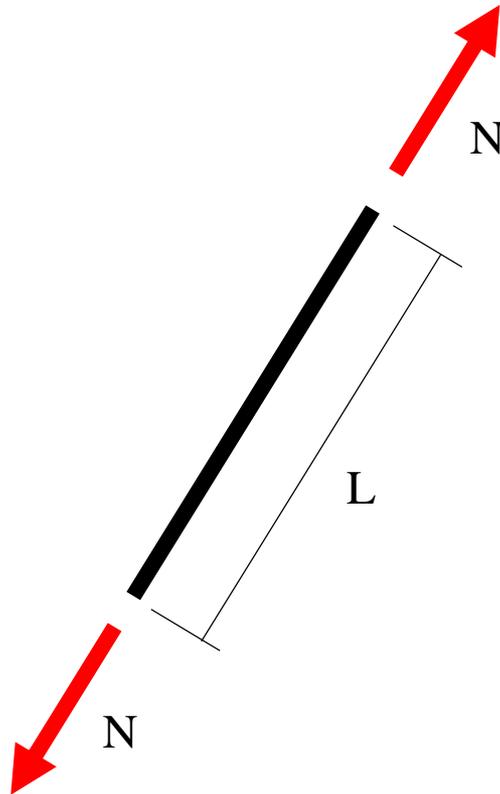
$$\varepsilon = \frac{\delta}{l_0}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \delta &= \varepsilon l_0 = \frac{\sigma l_0}{E} + \alpha \Delta t l_0 = \\ &= N \frac{l_0}{E A} + \alpha \Delta t l_0 = \\ &= \delta_e + \delta_a \end{aligned}$$

$$\rightarrow N = k(\delta - \delta_a)$$

$$k = \frac{E A}{l_0}$$



(Rem.) Biella a comportamento elastico lineare

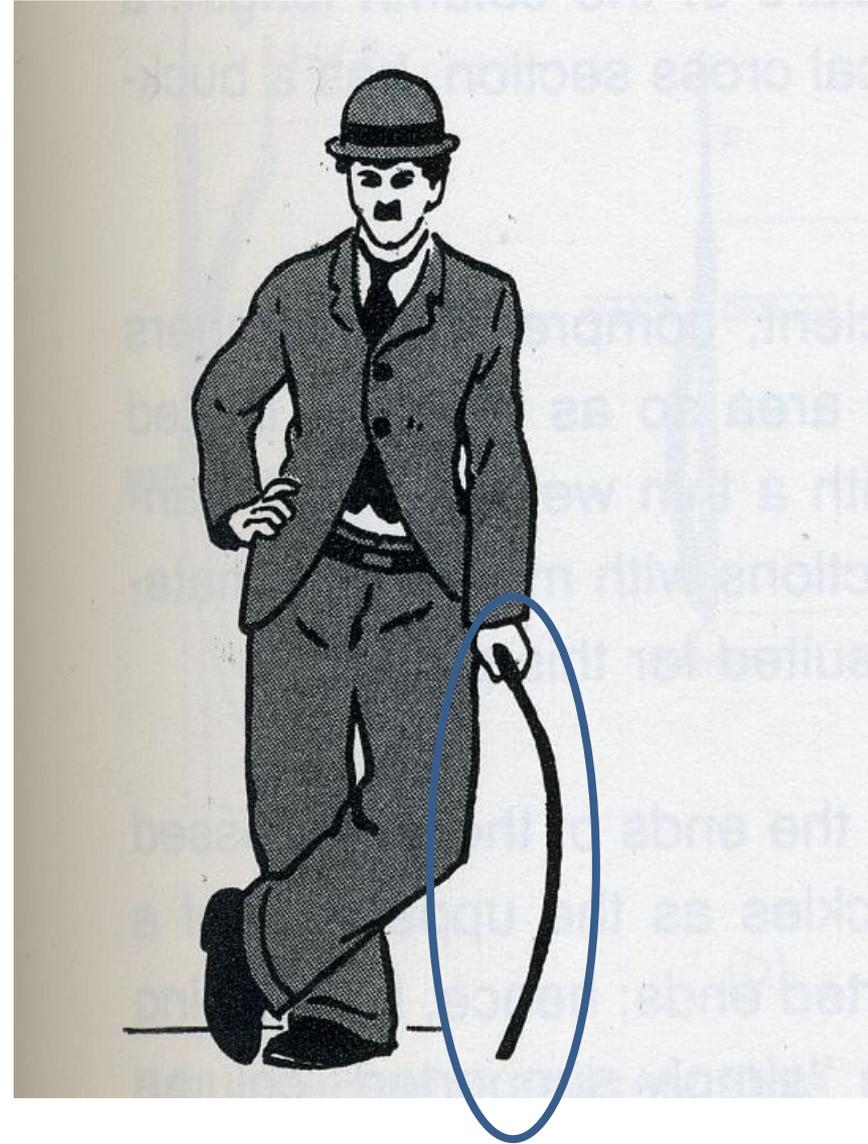
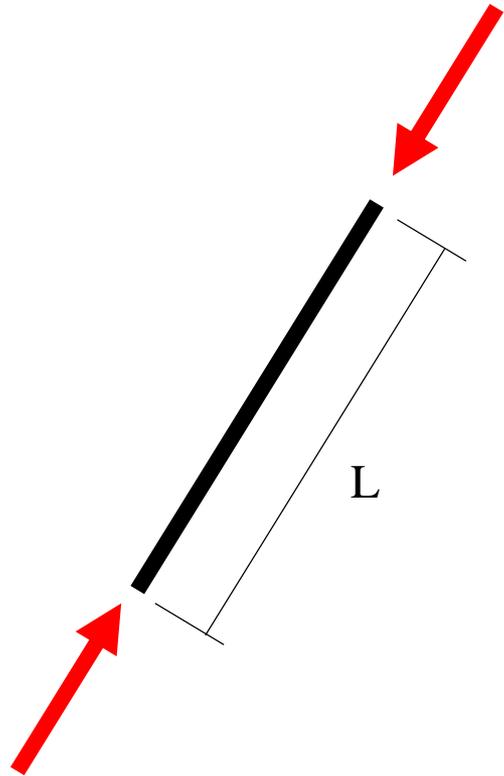


Figura tratta da M. Salvadori, R. Heller. "Structure in architecture"



Elementi di meccanica del continuo

Introduzione a:

- tensione tangenziale
- scorrimento angolare



Esempio

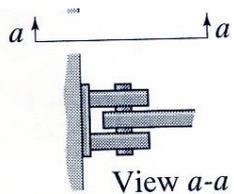
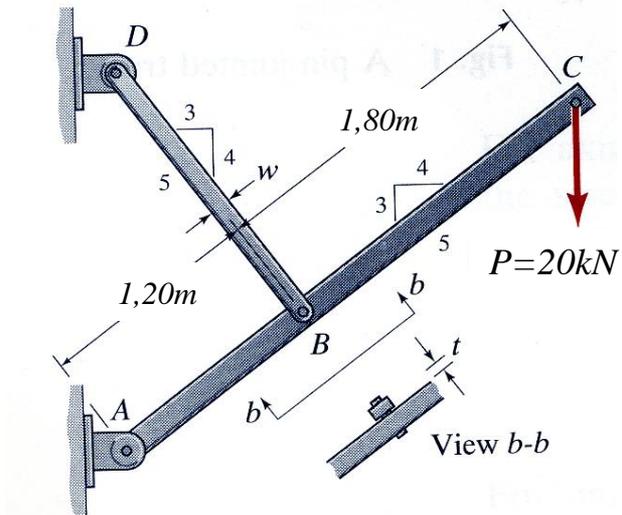


Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"



Esempio

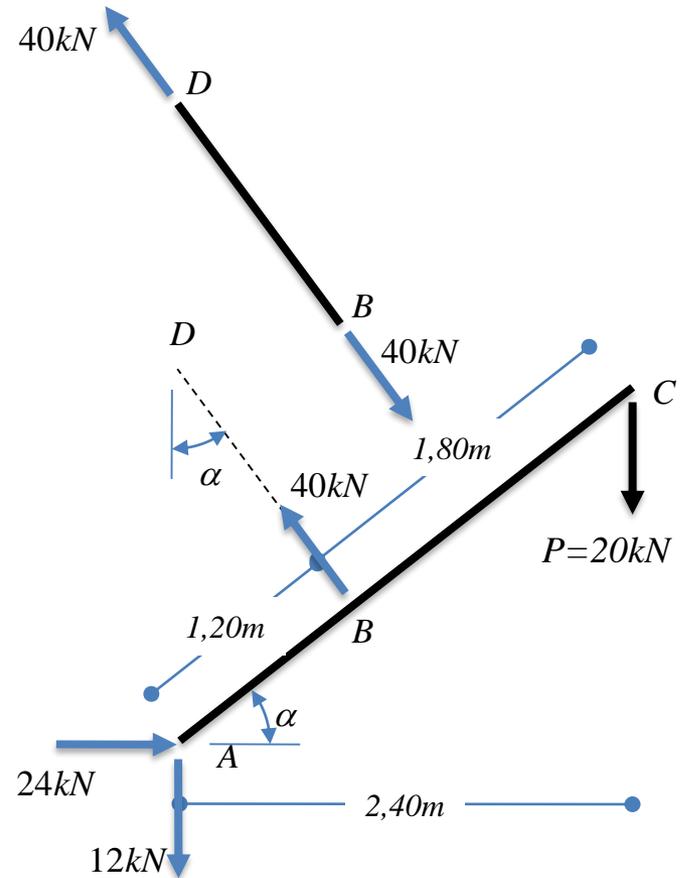
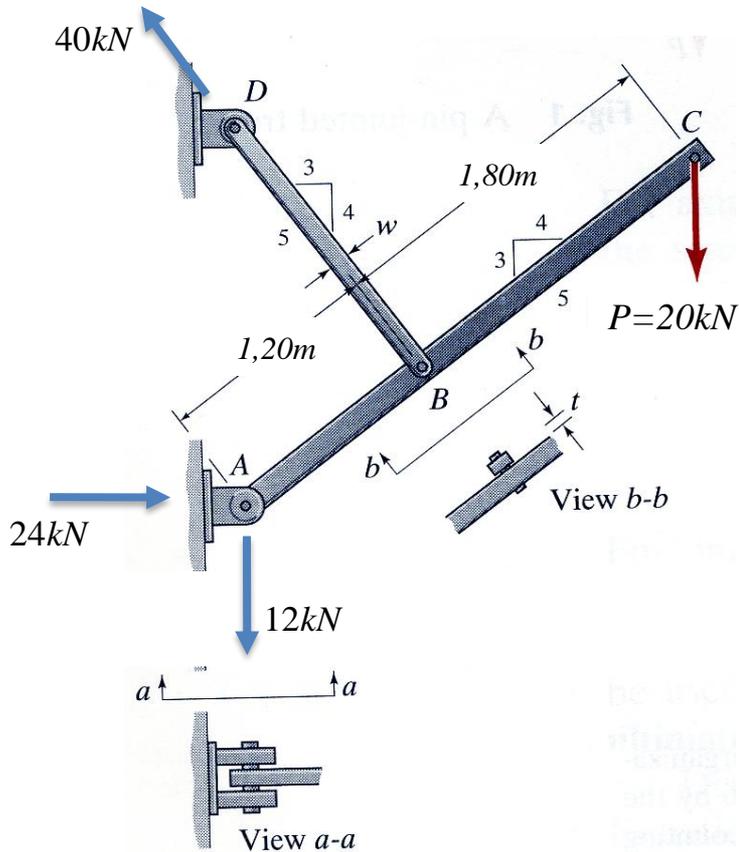
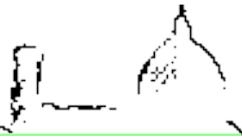
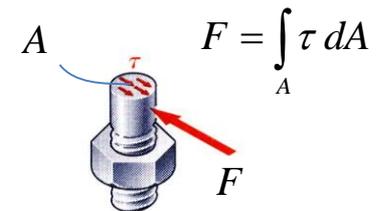
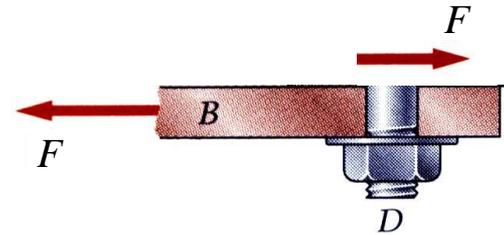
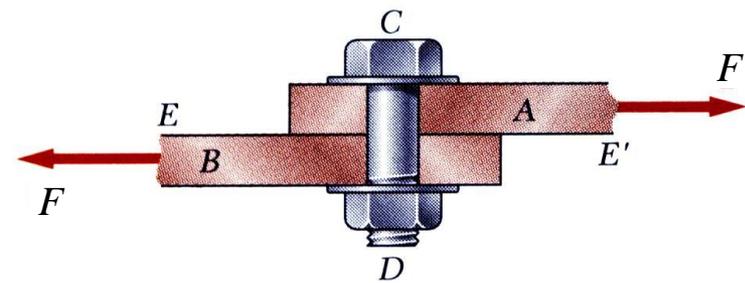


Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"



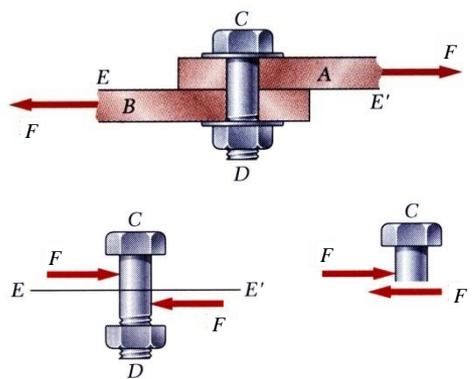
Connessioni bullonate





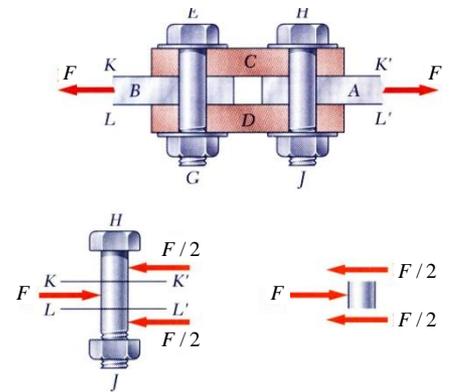
Connessioni "single shear" e "double shear"

- Collegamenti "single shear"



$$\tau_{med} = F / A$$

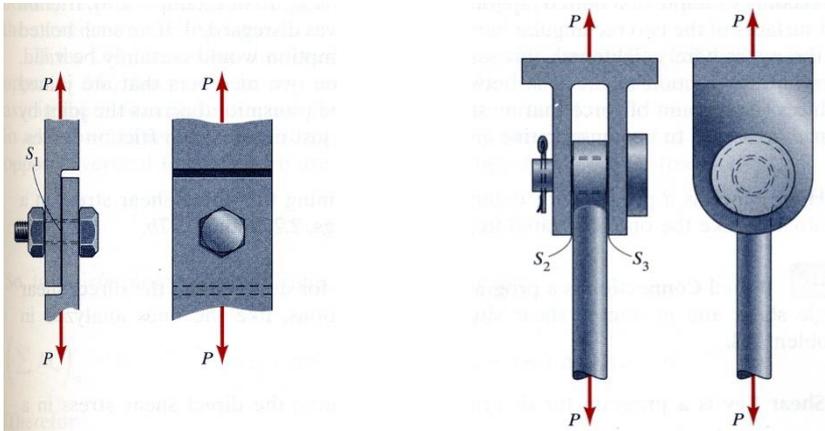
- Collegamenti "double shear"



$$\tau_{med} = F / (2A)$$



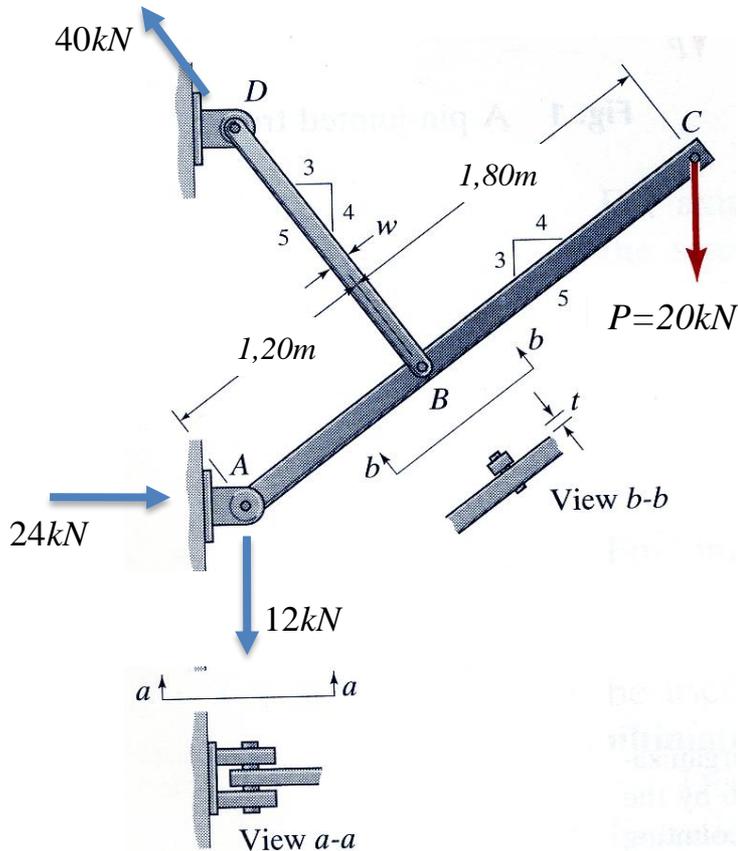
Esercizio



I due collegamenti schematizzati in figura sono realizzati utilizzando un bullone in acciaio ad alta resistenza ($\tau_Y=330MPa$). Sapendo che il carico applicato è $P=35kN$ e che per il collegamento è richiesto un coefficiente di sicurezza $s=3$ rispetto alle tensioni medie, si calcoli il diametro minimo dei bulloni dei collegamenti.



Esempio



Progetto del bullone di connessione A.

La forza trasferita dal collegamento è pari alla risultante delle reazioni vincolari

$$R_A = \sqrt{24^2 + 12^2} = 26,83kN$$

Il bullone è ad alta resistenza ($\tau_Y=330MPa$) ed il collegamento è di tipo "double shear". Anche in questo, considerando un coefficiente di sicurezza $s=3$, la tensione tangenziale ammissibile sul bullone è

$$\tau_{amm} = \tau_Y / s = 110,0MPa$$

Si calcola allora

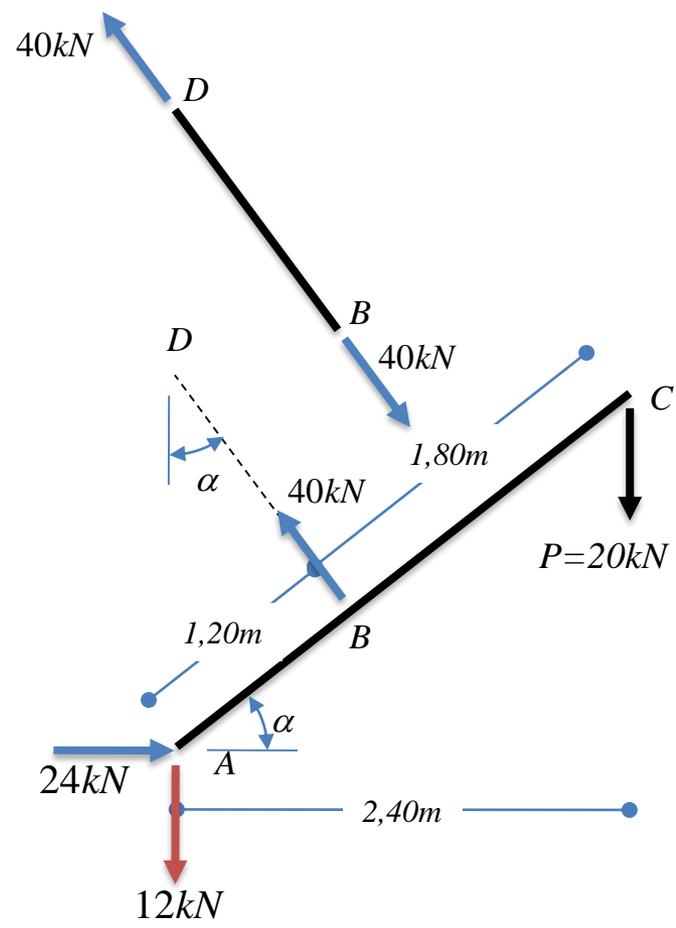
$$\tau = \frac{R_A}{2A} \rightarrow A_{min} = \frac{R_A}{2\tau_{amm}} = \frac{26'830N}{2 \times 110MPa} \cong 122mm^2$$

Il diametro minimo del bullone è allora

$$A_{min} = \pi \frac{\phi^2}{4} \rightarrow \phi_{min} = \sqrt{\frac{4A_{min}}{\pi}} \cong 13mm$$



Esempio



Progetto dei bulloni di connessione in B e D.

I bulloni delle connessioni B e D sono in acciaio ad alta resistenza ($\tau_y=330MPa$) e sono di tipo "single shear". Considerando un coefficiente di sicurezza $s=3$ la tensione tangenziale ammissibile sul bullone è

$$\tau_{amm} = \tau_y / s = 110,0MPa$$

La forza che deve essere trasferita dal bullone è $F=40kN$ e quindi si calcola

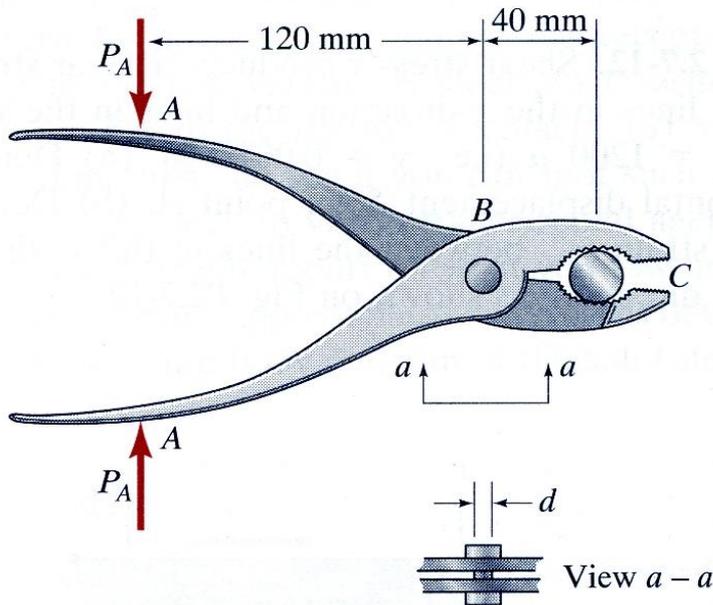
$$\tau = \frac{F}{A} \rightarrow A_{min} = \frac{F}{\tau_{amm}} = \frac{40000N}{110MPa} \cong 364mm^2$$

Il diametro minino del bullone è allora

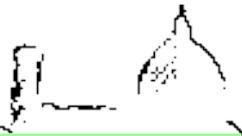
$$A_{min} = \pi \frac{\phi^2}{4} \rightarrow \phi_{min} = \sqrt{\frac{4A_{min}}{\pi}} \cong 22mm$$



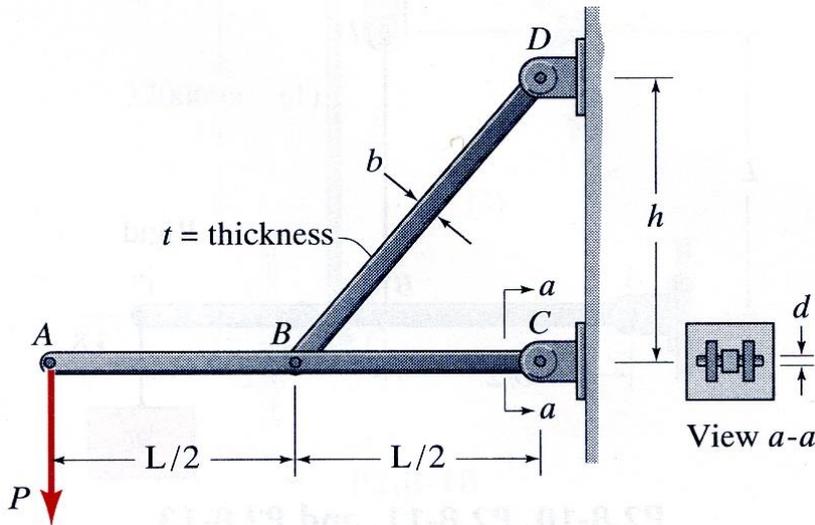
Esercizio



Il perno B della pinza schematizzata in figura ha un diametro $\phi=6.35\text{mm}$ ed è realizzato in acciaio avente una tensione tangenziale ammissibile $\tau_{amm}=75\text{MPa}$. Qual è la massima forza P_C applicabile al dado in C tale che la tensione tangenziale media nel dado B sia inferiore al valore ammissibile?



Esercizio



La trave AC dello schema rappresentato in figura è vincolata dall'asta in acciaio BD ed è incernierata in corrispondenza della sezione C mediante un collegamento bullonato di tipo "double shear". Utilizzando per l'asta BD un coefficiente di sicurezza $s=3$ e per il bullone del collegamento in C un coefficiente di sicurezza $s=3.3$, si calcoli lo spessore minimo dell'asta BD ed il diametro minimo del bullone C .

DATI:

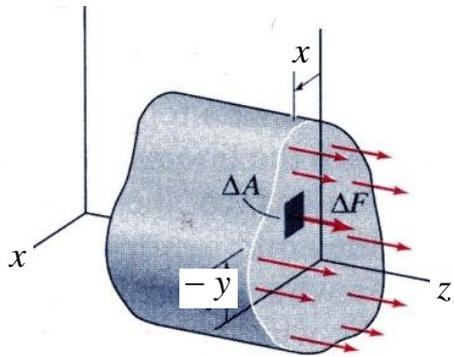
$$P=10kN \quad L=3m \quad h=2m$$

$$(BD) \quad b=25mm \quad \sigma_Y=250MPa$$

$$(C) \quad \tau_u=400MPa$$



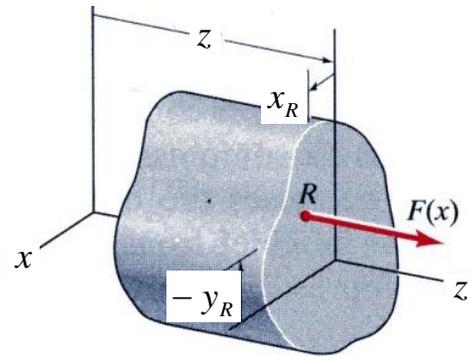
Introduzione al concetto di tensione normale e tangenziale



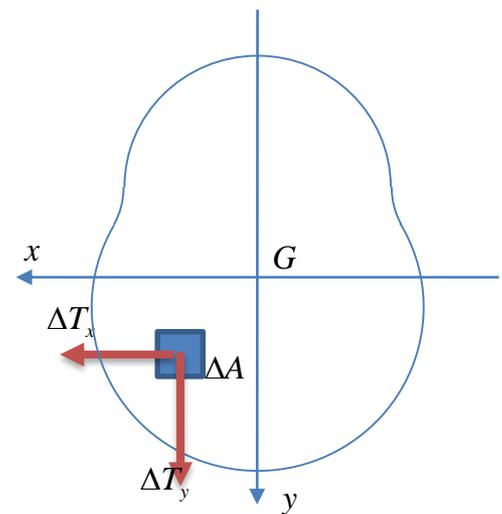
(a) Distributed normal stress on a cross section.

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

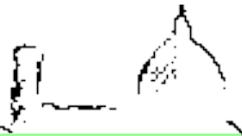


(b) Resultant of distributed normal stress in (a).

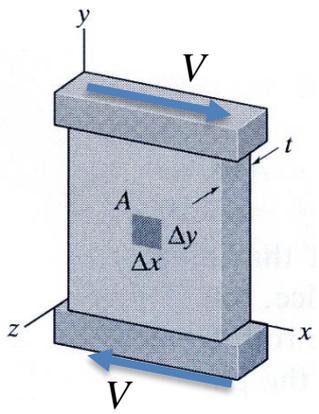


$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T_y}{\Delta A}$$

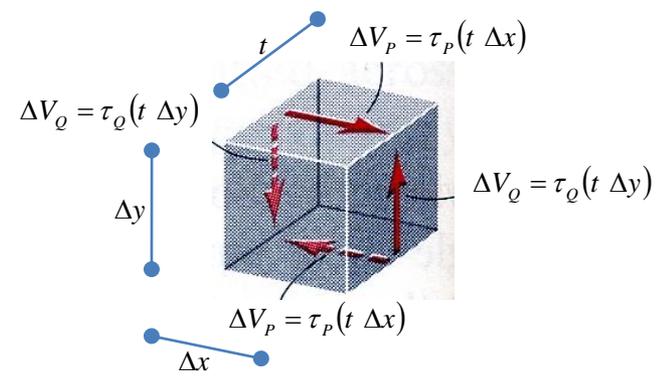
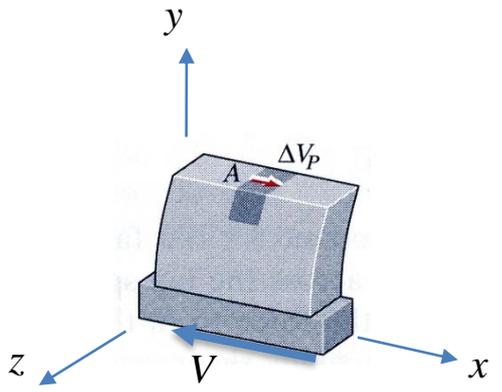
$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T_x}{\Delta A}$$



Condizioni di equilibrio per le tensioni tangenziali

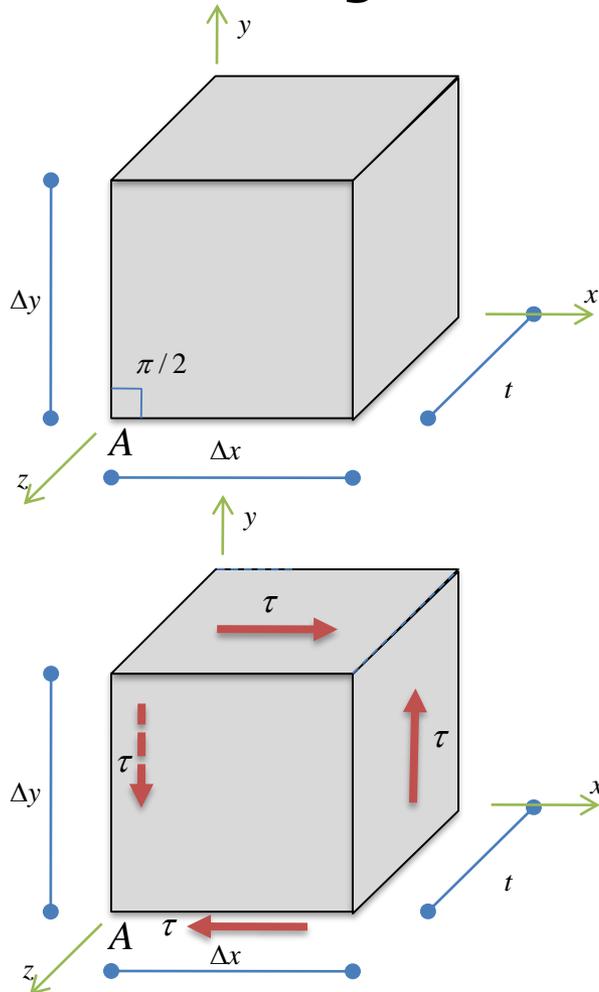


$$\Delta V_P \times \Delta y = \Delta V_Q \times \Delta x \rightarrow \tau_P(t \Delta x) \times \Delta y = \tau_Q(t \Delta y) \times \Delta x$$
$$\rightarrow \tau_P = \tau_Q = \tau$$



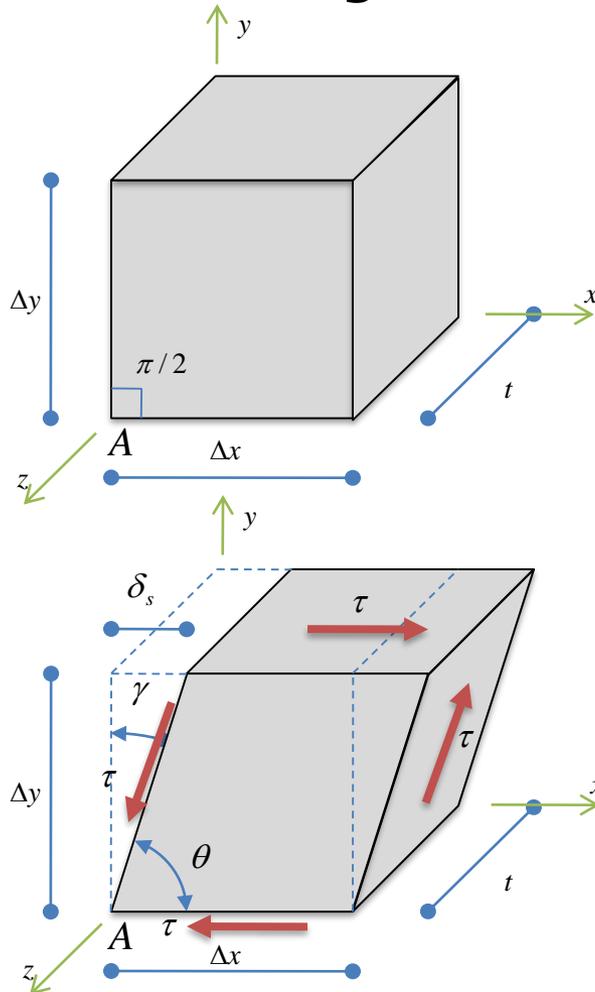


Gli scorrimenti angolari: introduzione





Gli scorrimenti angolari: introduzione



A causa delle tensioni tangenziali, le fibre di materiale originariamente parallele agli assi x ed y si sono chiuse di un angolo γ detto **scorrimento angolare**.

Gli scorrimenti angolari sono allora pari all'angolo di cui, a causa del processo deformativo a cui è sottoposto il solido deformabile, si chiudono due direzioni originariamente ortogonali

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$$

L'ambito di analisi che stiamo considerando è quello delle *piccole deformazioni*. In tale ambito si ha

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \cong \tan \gamma = \frac{\delta_s}{\Delta y}$$

Nelle prossime lezioni tale definizione sarà generalizzata ad un qualunque processo deformativo.

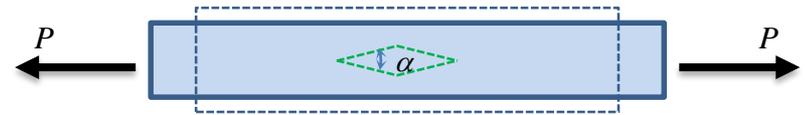
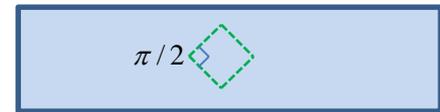
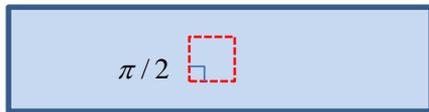


Elementi di meccanica del continuo

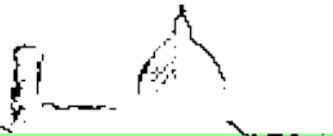
Componenti di sforzo vs giacitura



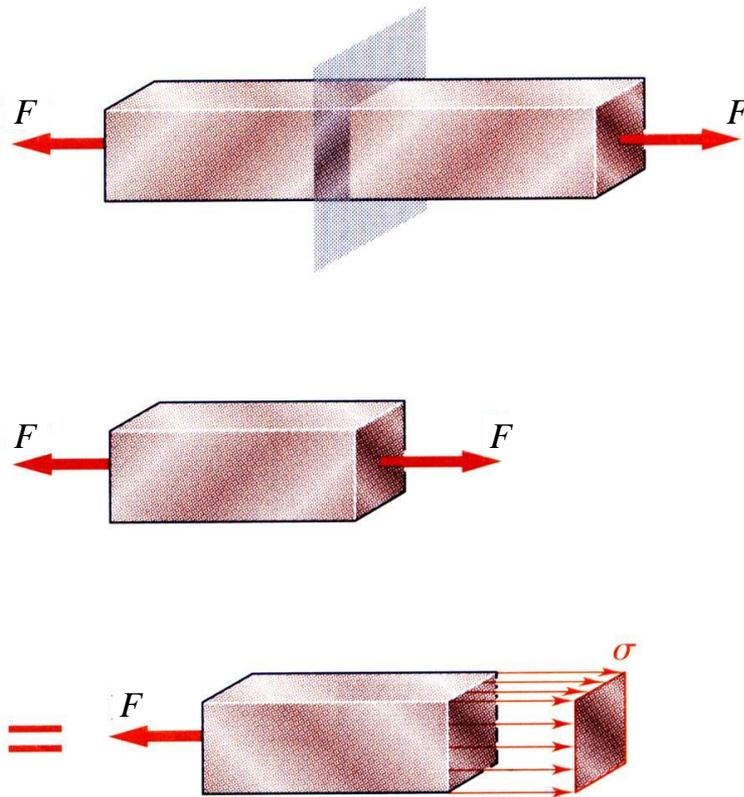
Asta sollecitata assialmente



$$\gamma = \pi/2 - \alpha$$



Tensioni su una sezione trasversale



Si immagini di dividere l'asta schematizzata in figura in due parti mediante un piano di sezione ortogonale all'asse. Come è ben noto, un generico punto materiale P della sezione trasversale così individuata è sollecitato da una tensione normale pari a

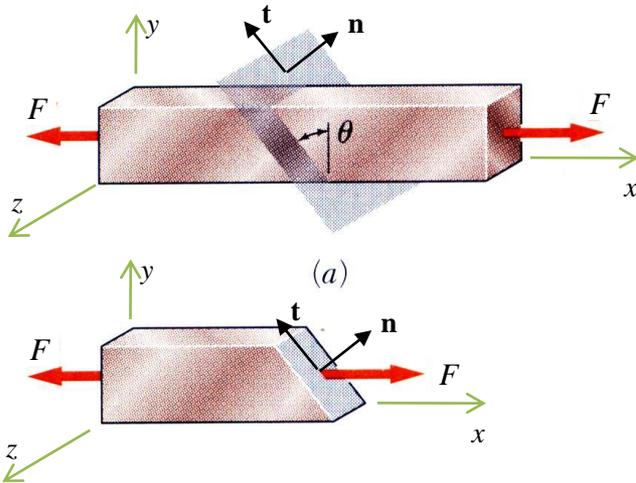
$$\sigma_x = \frac{F}{A_0}$$

Nella precedente relazione A_0 indica l'area della sezione trasversale ed il pedice x indica che tale tensione si riferisce ad una sezione normale all'asse x . Se il sistema è in equilibrio, la risultante delle tensioni presenti sulla sezione trasversale è tale da equilibrare il carico esterno applicato sulla parte di asta in esame

$$F = \int_{A_0} \sigma_x dA = \sigma_x A_0$$

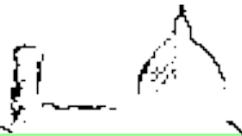


Tensioni su una sezione inclinata

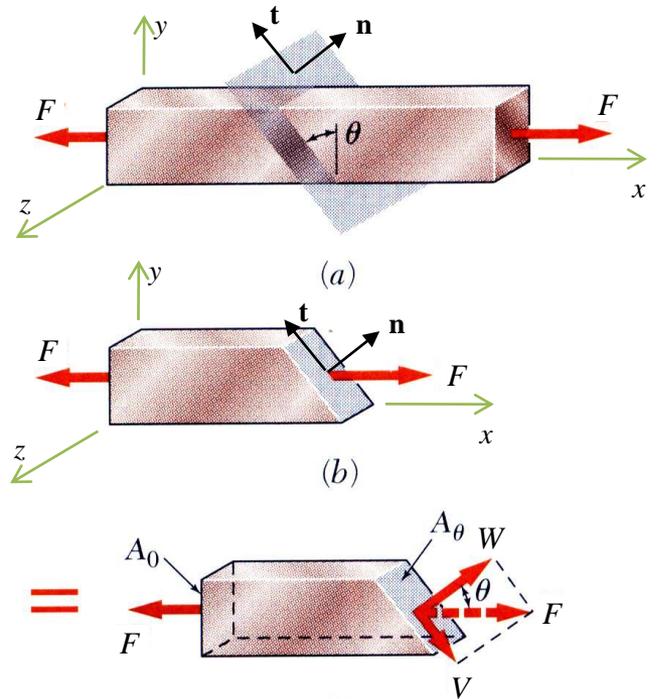


$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Tensioni su una sezione inclinata



$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

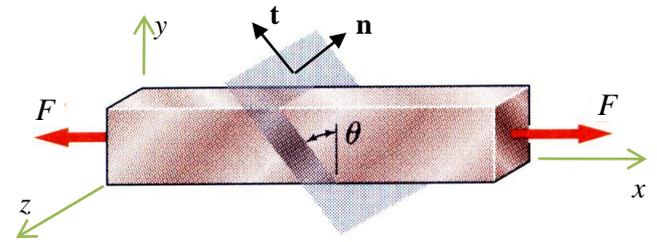
$$W = F \cos \theta$$

$$V = F \sin \theta$$

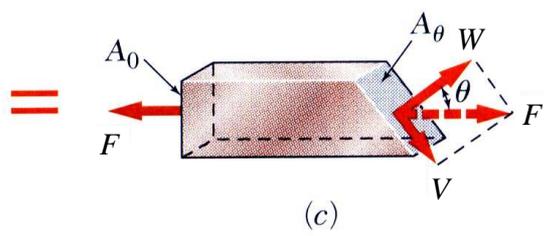
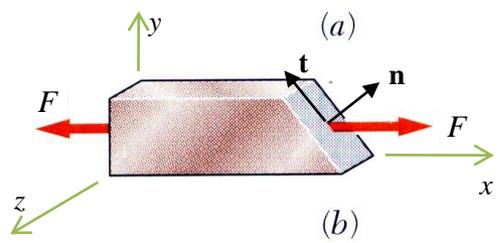
$$A_\theta = A_0 / \cos \theta$$



Tensioni su una sezione inclinata

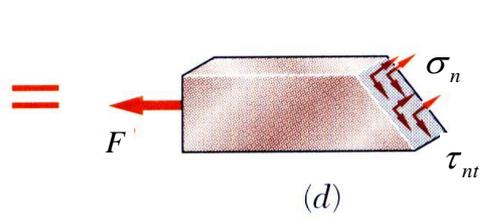


$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$W = F \cos \theta \quad V = F \sin \theta$$

$$A_\theta = A_0 / \cos \theta$$

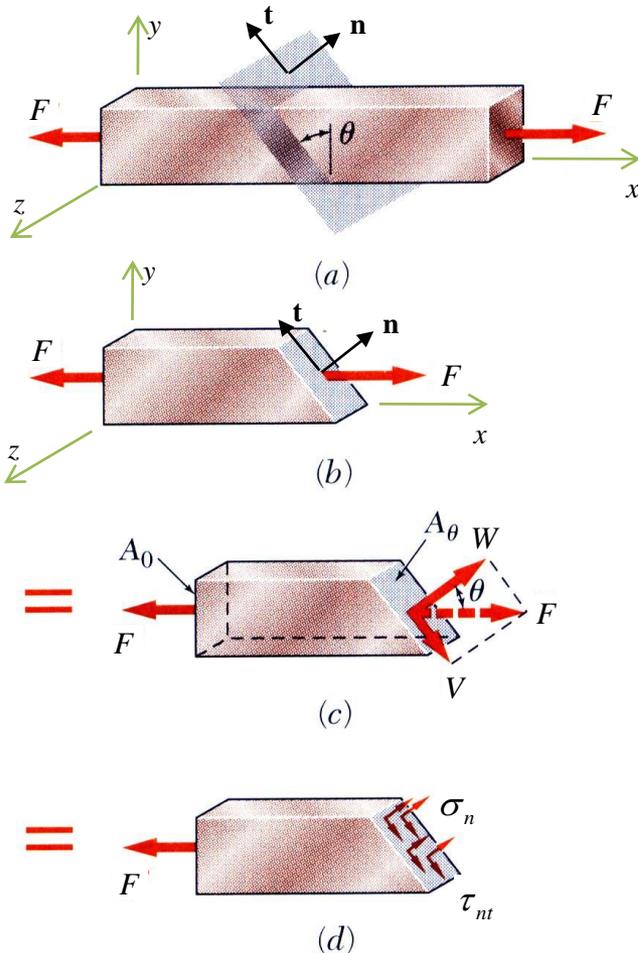


$$\sigma_n = \frac{W}{A_\theta} = \frac{F}{A_0} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau_{nt} = -\frac{V}{A_\theta} = -\frac{F}{A_0} \sin \theta \cos \theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$



Tensioni su una sezione inclinata

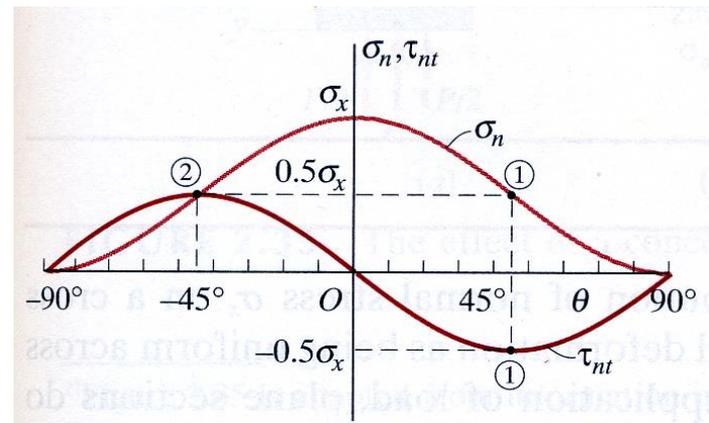


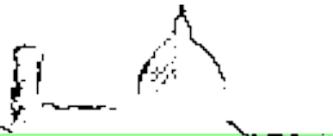
Utilizzando le ben note identità trigonometriche, le precedenti relazioni si possono scrivere come segue

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

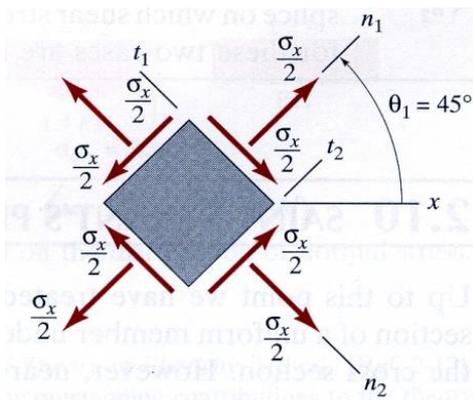
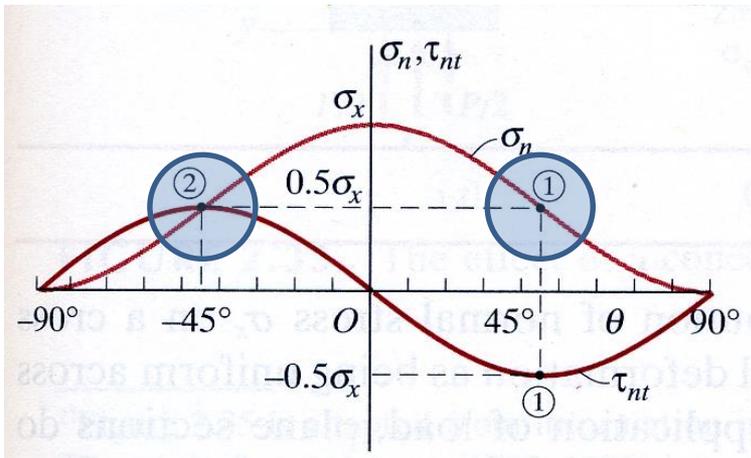
$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

Esse sono periodiche ed hanno un periodo pari a π . Il grafico di tali funzioni è riportato nella sottostante figura



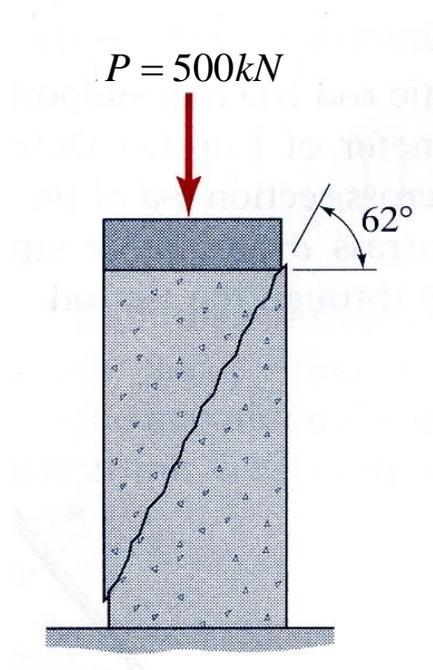


Tensioni su una sezione inclinata





Esercizio

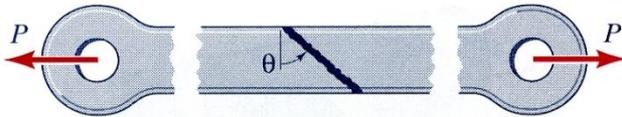


Un cilindro in calcestruzzo avente diametro di base pari a 15cm è sollecitato da un carico di compressione $P=500\text{kN}$. In corrispondenza di tale carico il cilindro si fessura lungo un angolo inclinato di 62° rispetto alle basi. Si determini:

- il valore della tensione normale di compressione presente, a rottura, in corrispondenza di una sezione trasversale del cilindro;
- il valore delle tensioni normali e tangenziali presenti sulla superficie di rottura.

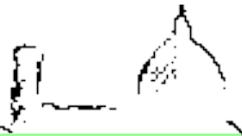


Esercizio

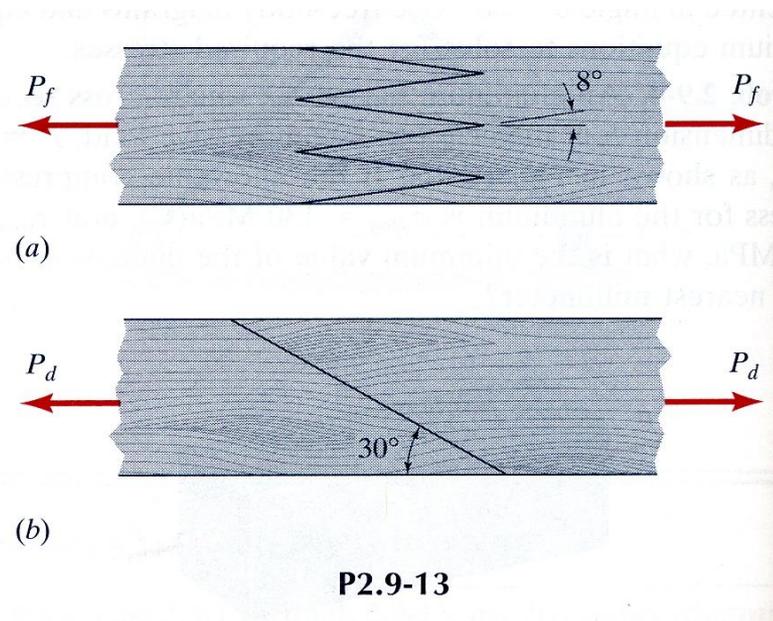


La barra in acciaio schematizzata in figura ha una sezione trasversale rettangolare di dimensioni pari a $25 \times 100 \text{ mm}$. Al fine di ottenere una barra abbastanza lunga è necessario saldare due tratti in corrispondenza di un giunto inclinato di un angolo θ rispetto alla sezione trasversale. Le tensioni normale e tangenziale limite che possono essere presenti sulla saldatura sono rispettivamente pari a 125 MPa e 75 MPa . Si determini:

- l'angolo θ ottimale per la saldatura ($0 \leq \theta \leq 45^\circ$);
- il carico assiale P massimo applicabile alla barra saldata secondo l'angolo ottimale.



Esercizio



Due aste in legno lamellare possono essere incollate secondo i due schemi riportati in figura. Si determini il rapporto fra i massimi carichi applicabili ($P_{f\max}/P_{d\max}$) corrispondenti ai seguenti due casi:

1. la tensione tangenziale ammissibile per la colla è pari alla metà della tensione normale ammissibile ($\tau_{amm}=0.5\sigma_{amm}$);
2. la tensione tangenziale ammissibile per la colla è pari al doppio della tensione normale ammissibile ($\tau_{amm}=2\sigma_{amm}$).