

Elementi di meccanica del continuo



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Analisi dello stato di deformazione

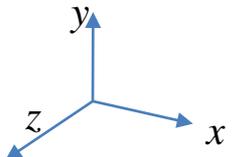
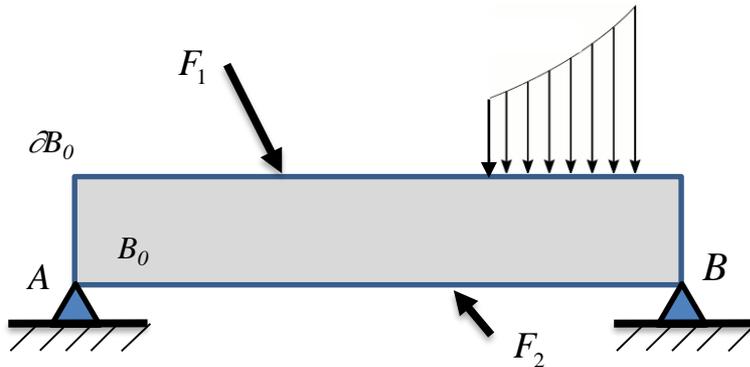


Analisi della deformazione

Il tensore delle piccole deformazioni



Analisi dei continui deformabili

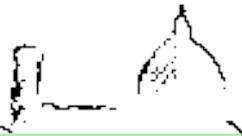


$$\partial B_0 = \partial B_{0u} \cup \partial B_{0f}$$

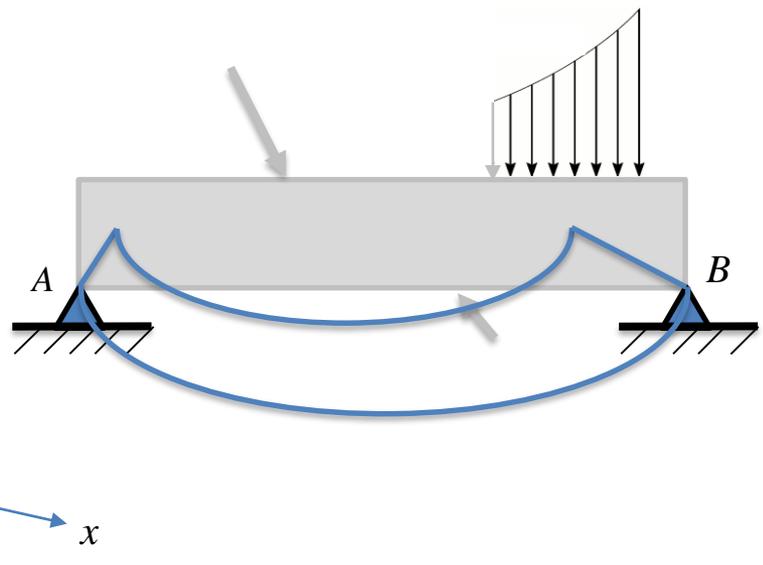
$$\partial B_{0u} \cap \partial B_{0f} = \{0\}$$

per il principio di mutua esclusione

Si consideri un solido di forma qualsiasi. Per semplicità ci riferiamo ad un solido avente la forma indicata in figura, ma quanto verrà descritto vale per un solido di forma qualsiasi. Si definisce *configurazione iniziale* del solido, l'insieme delle posizioni occupate dai suoi punti materiali prima che esso venga sollecitato. Si indica con B_0 la configurazione iniziale del solido e con ∂B_0 la sua frontiera. Si consideri che su una parte della frontiera, detta ∂B_{0u} siano presenti dei vincoli, ossia siano prescritti degli spostamenti, e che sulla rimanente parte della frontiera, detta ∂B_{0f} siano assegnati dei carichi (eventualmente nulli). Per l'esempio in figura ∂B_{0u} è l'insieme dei punti A e B e ∂B_{0f} è la rimanente parte della frontiera.



Analisi dei continui deformabili

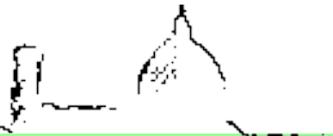


A causa delle azioni applicate al continuo in esame, i suoi punti materiali subiranno degli spostamenti. Si dice *configurazione corrente o deformata* l'insieme delle posizioni occupate dai punti materiali del continuo dopo il processo deformativo. Si indica con B la configurazione deformata del solido e con ∂B la sua frontiera che può essere suddivisa come per la configurazione iniziale.

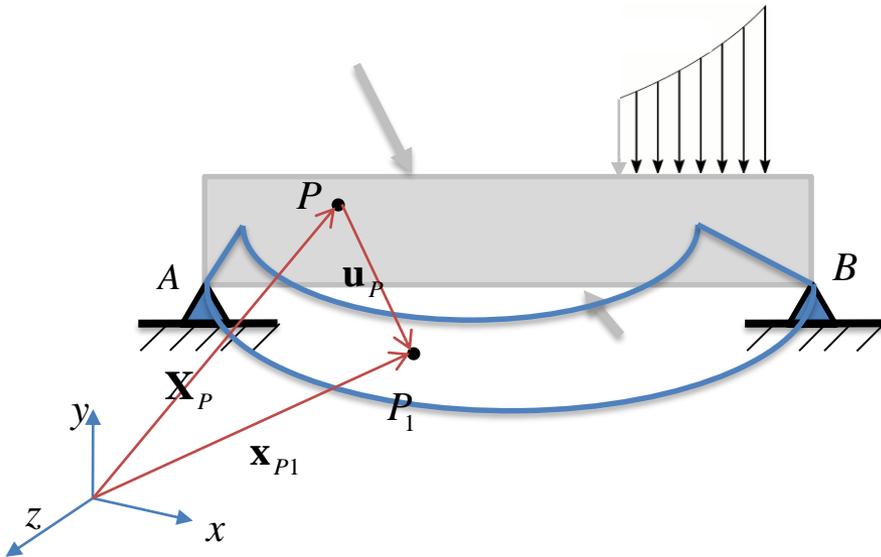
$$\partial B_0 = \partial B_{0u} \cup \partial B_{0u} \quad \partial B_{0u} \cap \partial B_{0u} = \{0\}$$

per il principio di mutua esclusione

B = configurazione deformata di frontiera ∂B



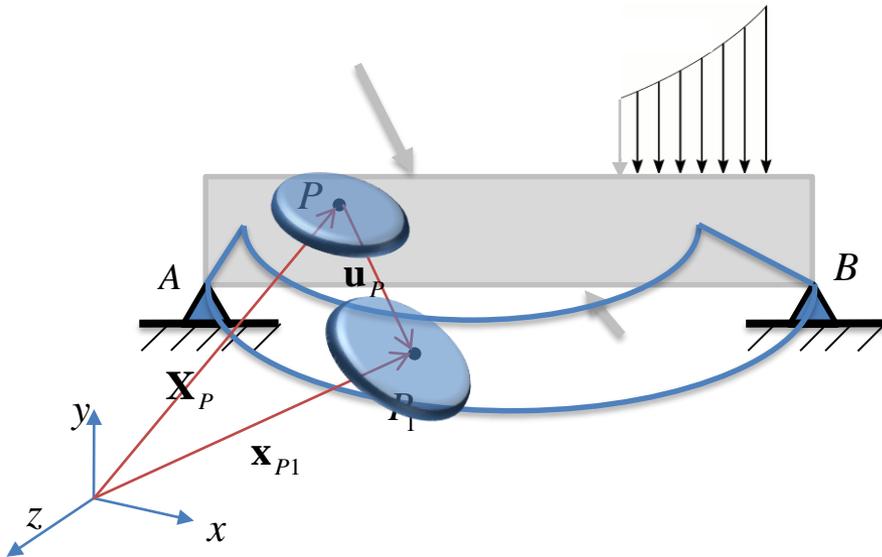
Analisi dei continui deformabili



$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_P) = \mathbf{x}_{P_1} - \mathbf{X}_P$$



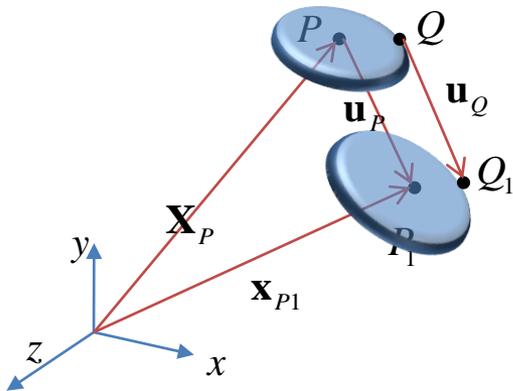
Analisi dei continui deformabili



$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_P) = \mathbf{x}_{P1} - \mathbf{X}_P$$



Analisi dei continui deformabili

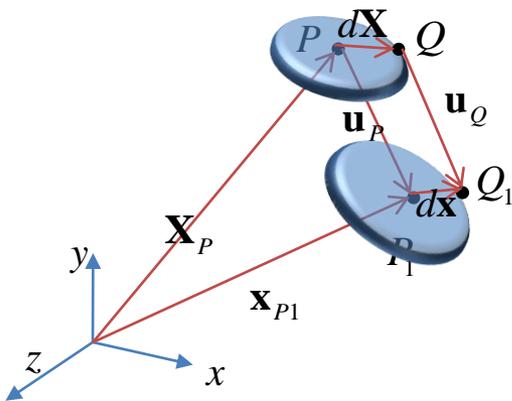


$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_P) = \mathbf{x}_{P_1} - \mathbf{X}_P$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) = \mathbf{x}_{Q_1} - \mathbf{X}_Q$$



Analisi dei continui deformabili



$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_P) = \mathbf{x}_{P1} - \mathbf{X}_P$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) = \mathbf{x}_{Q1} - \mathbf{X}_Q$$

Si indichi con $d\mathbf{X}$ la distanza tra i punti Q e P . Si ha che

$$\mathbf{X}_Q = \mathbf{X}_P + d\mathbf{X}$$

Utilizzando uno sviluppo in serie di Taylor si ha

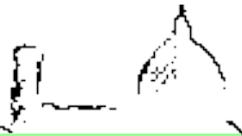
$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) + d\mathbf{u}$$

$$\rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) = d\mathbf{u}$$

Inoltre

$$d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) + d\mathbf{x}$$

$$\rightarrow d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) = d\mathbf{X} + d\mathbf{u}$$



Analisi dei continui deformabili

Come si è visto, il vettore spostamento dipende dalla posizione del punto materiale a cui si fa riferimento nella configurazione iniziale. In generale allora si ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Pertanto, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, l'incremento infinitesimo di spostamento si calcola come segue (per brevità nel seguito si omette la dipendenza esplicita dalla posizione)

$$d\mathbf{u} = \begin{bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \end{bmatrix} \rightarrow d\mathbf{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}}_{d\mathbf{X}} = \mathbf{H} d\mathbf{X}$$

Si dimostra che \mathbf{H} è un tensore e viene detto *tensore gradiente di spostamento*.

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})d\mathbf{X}$$



Analisi dei continui deformabili

Indicando con ∇ il vettore gradiente, ossia il seguente vettore di derivate rispetto ad x , y e z

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

il tensore gradiente di spostamento può essere indicato in maniera compatta come segue

$$\underline{\mathbf{H}} = \nabla(\mathbf{u})$$

Tale tensore è reale e può essere decomposto nella sua parte simmetrica $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ed emisimmetrica $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ come segue

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^T) = \text{sym}(\nabla(\mathbf{u})) \rightarrow \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{H}}^T) = \text{skew}(\nabla(\mathbf{u})) \rightarrow \underline{\boldsymbol{\omega}} = -\underline{\boldsymbol{\omega}}^T$$



Componente rigida e deformativa del moto

L'incremento di spostamento $d\mathbf{u}$ può essere allora scritto come segue

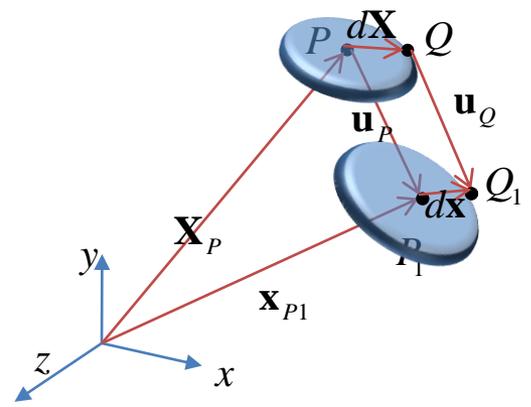
$$d\mathbf{u} = \underline{\mathbf{H}} d\mathbf{X} = \underline{\omega}d\mathbf{X} + \underline{\epsilon}d\mathbf{X}$$

Pertanto lo spostamento del generico punto Q nell'intorno del punto P in esame si può calcolare come segue

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) + d\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) + \underline{\omega}d\mathbf{X} + \underline{\epsilon}d\mathbf{X}$$

Si può dimostrare che i tre termini contenuti nella precedente relazione hanno il seguente significato fisico:

- $\mathbf{u}(\mathbf{X}_P)$: traslazione rigida dell'intorno del punto P
- $\underline{\omega}d\mathbf{X}$: rotazione rigida dell'intorno del punto P , rispetto allo stesso punto P
- $\underline{\epsilon}d\mathbf{X}$: deformazione dell'intorno del punto P



$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \underline{\omega}d\mathbf{X} + \underline{\epsilon}d\mathbf{X}$$



Il tensore delle piccole deformazioni

La parte deformativa del moto è allora regolata dal termine $\underline{\varepsilon}$ che si dimostra essere un tensore e che viene detto *tensore delle piccole deformazioni*. Esso è un tensore reale e simmetrico (per costruzione) e le sue componenti rispetto al sistema di riferimento fissato sono le seguenti

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right);$$

Verrà adesso dimostrato che i termini presenti sulla diagonale principale del precedente tensore sono pari agli allungamenti delle fibre di materiale parallele agli assi del sistema di riferimento (es. ε_x corrisponde all'allungamento delle fibre parallele all'asse x), mentre i termini fuori diagonale sono pari alla metà degli scorrimenti tra le fibre mutuamente ortogonali e parallele agli assi del sistema di riferimento (es. ε_{xy} è pari alla metà dello scorrimento relativo tra le fibre parallele agli assi x ed y). Ovviamente tali corrispondenze sono valide nell'intorno del punto P in cui è definito il tensore delle piccole deformazioni che è pertanto una *misura locale dello stato deformativo presente nell'intorno di un punto materiale del continuo*.



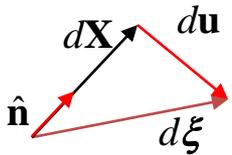
Analisi della deformazione

Calcolo di allungamenti e scorrimenti mediante il tensore delle piccole deformazioni.

Il significato delle componenti del tensore delle piccole deformazioni



Trasformazione di un vettore infinitesimo



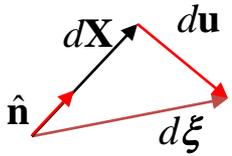
$$d\mathbf{X} = |d\mathbf{X}|\hat{\mathbf{n}}$$

$$d\xi = (\mathbf{I} + \underline{\omega} + \underline{\varepsilon})d\mathbf{X} = |d\mathbf{X}|(\mathbf{I} + \underline{\omega} + \underline{\varepsilon})\hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{aligned}
|d\xi| &= \sqrt{d\xi^T d\xi} = |d\mathbf{X}| \sqrt{\hat{\mathbf{n}}^T (\mathbf{I} + \underline{\omega}^T + \underline{\varepsilon}) (\mathbf{I} + \underline{\omega} + \underline{\varepsilon}) \hat{\mathbf{n}}} = \\
&= |d\mathbf{X}| \sqrt{\hat{\mathbf{n}}^T (\mathbf{I} + \underline{\omega} + \underline{\varepsilon} + \underline{\omega}^T + \underline{\omega}^T \underline{\omega} + \underline{\omega}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} \underline{\omega} + \underline{\varepsilon}^2) \hat{\mathbf{n}}} = \\
&\cong |d\mathbf{X}| \sqrt{\hat{\mathbf{n}}^T (\mathbf{I} + 2\underline{\varepsilon}) \hat{\mathbf{n}}} = |d\mathbf{X}| \sqrt{1 + \hat{\mathbf{n}}^T 2\underline{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}}} \cong |d\mathbf{X}| \sqrt{(1 + \hat{\mathbf{n}}^T \underline{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}})^2} = |d\mathbf{X}| (1 + \hat{\mathbf{n}}^T \underline{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}}) \\
\rightarrow |d\xi| &\cong |d\mathbf{X}| (1 + \hat{\mathbf{n}}^T \underline{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}})
\end{aligned}$$



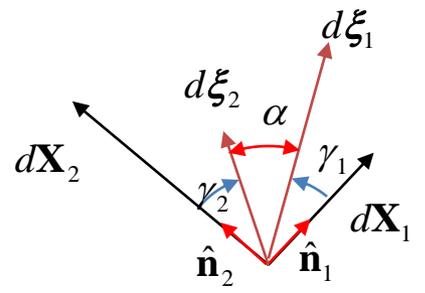
Allungamento di un vettore infinitesimo



$$\varepsilon_n = \frac{|d\xi| - |d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|} \cong \frac{[(1 + \hat{\mathbf{n}}^T \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}}) - 1] |d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|} = \hat{\mathbf{n}}^T \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}}$$



Scorrimenti angolari (tra due direzioni originariamente ortogonali tra loro)



$$\varepsilon_1 = \hat{n}_1^T \underline{\varepsilon} \hat{n}_1$$

$$\varepsilon_2 = \hat{n}_2^T \underline{\varepsilon} \hat{n}_2$$

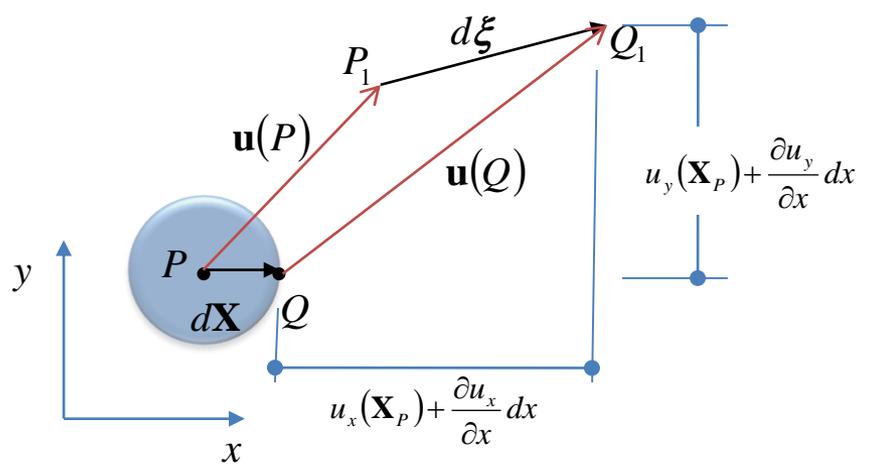
$$d\xi_1 \cdot d\xi_2 = |dX_1| |dX_2| \hat{n}_1^T (\mathbf{I} + \underline{\omega}^T + \underline{\varepsilon}) (\mathbf{I} + \underline{\omega} + \underline{\varepsilon}) \hat{n}_2 \cong |dX_1| |dX_2| \hat{n}_1^T (\mathbf{I} + 2\underline{\varepsilon}) \hat{n}_2$$

$$d\xi_1 \cdot d\xi_2 = |d\xi_1| |d\xi_2| \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{d\xi_1 \cdot d\xi_2}{|d\xi_1| |d\xi_2|} \cong \frac{|dX_1| |dX_2| \hat{n}_1^T (\mathbf{I} + 2\underline{\varepsilon}) \hat{n}_2}{|dX_1| |dX_2| (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \cong \frac{\hat{n}_1^T \hat{n}_2 + 2\hat{n}_1^T \underline{\varepsilon} \hat{n}_2}{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2} \cong 2\hat{n}_1^T \underline{\varepsilon} \hat{n}_2$$

$$\cos \alpha = \sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin \gamma \cong \gamma = 2\hat{n}_1^T \underline{\varepsilon} \hat{n}_2 \rightarrow \frac{\gamma}{2} = \hat{n}_1^T \underline{\varepsilon} \hat{n}_2$$



Significato fisico delle componenti sulla diagonale principale



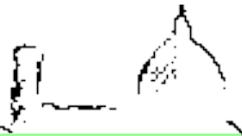
Ci riferiremo per semplicità ad un caso piano. Sia P un punto del continuo in esame e Q un punto che si trova sul contorno di un introno di P e tale che $Q-P$ individui una fibra parallela all'asse x del sistema di riferimento. Si ha allora

$$d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} dx \\ 0 \end{bmatrix}$$

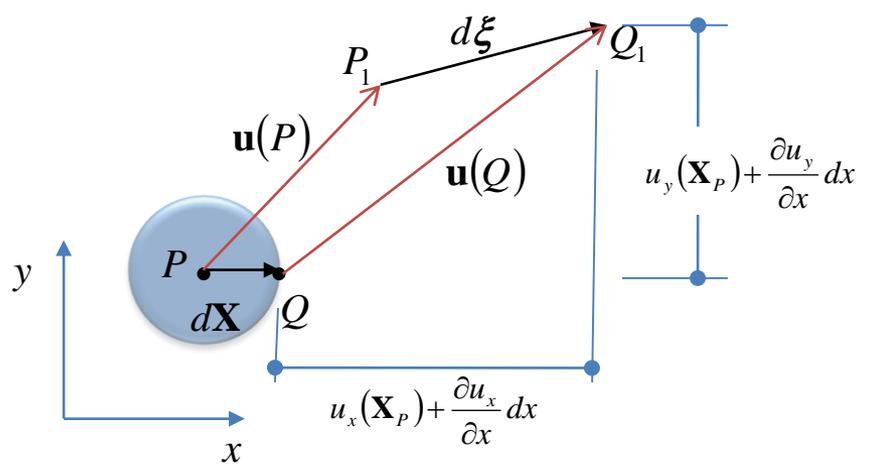
Siano $\mathbf{u}(P)$ e $\mathbf{u}(Q)$ i vettori spostamento dei punti P e Q .

Per quanto descritto in precedenza si ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) + \mathbf{H}d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{X}_P) \\ u_y(\mathbf{X}_P) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{X}_P) + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \\ u_y(\mathbf{X}_P) + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \end{bmatrix}$$



Significato fisico delle componenti sulla diagonale principale

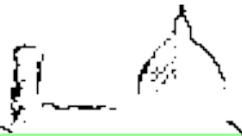


Nel processo deformativo che è stato descritto, la fibra $P-Q$, parallela all'asse x e lunga $|d\mathbf{X}|$, si è deformata nella fibra P_1-Q_1 lunga $|d\xi|$. Il suo allungamento è pari alla variazione di lunghezza fratto la lunghezza iniziale e quindi si calcola come segue

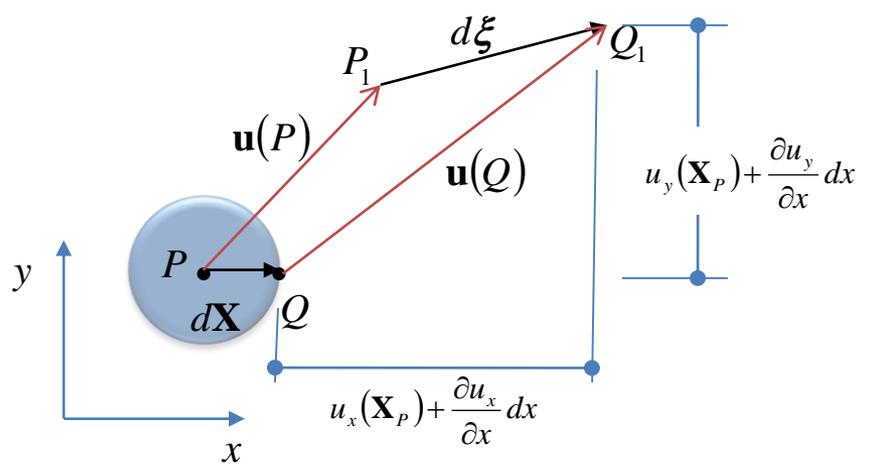
$$\varepsilon_{PQ} = \frac{|d\xi| - |d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|}$$

Ipotizzando che le componenti del tensore gradiente di deformazione siano piccole ($\partial u_x / \partial x \ll 1$), attraverso il teorema di Pitagora si calcola

$$\begin{aligned} |d\xi| &= \sqrt{\left(dx + u_x(\mathbf{X}_p) + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x(\mathbf{X}_p)\right)^2 + \left(u_y(\mathbf{X}_p) + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx - u_y(\mathbf{X}_p)\right)^2} = \\ &= dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} \cong dx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \end{aligned}$$



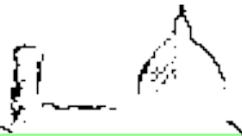
Significato fisico delle componenti sulla diagonale principale



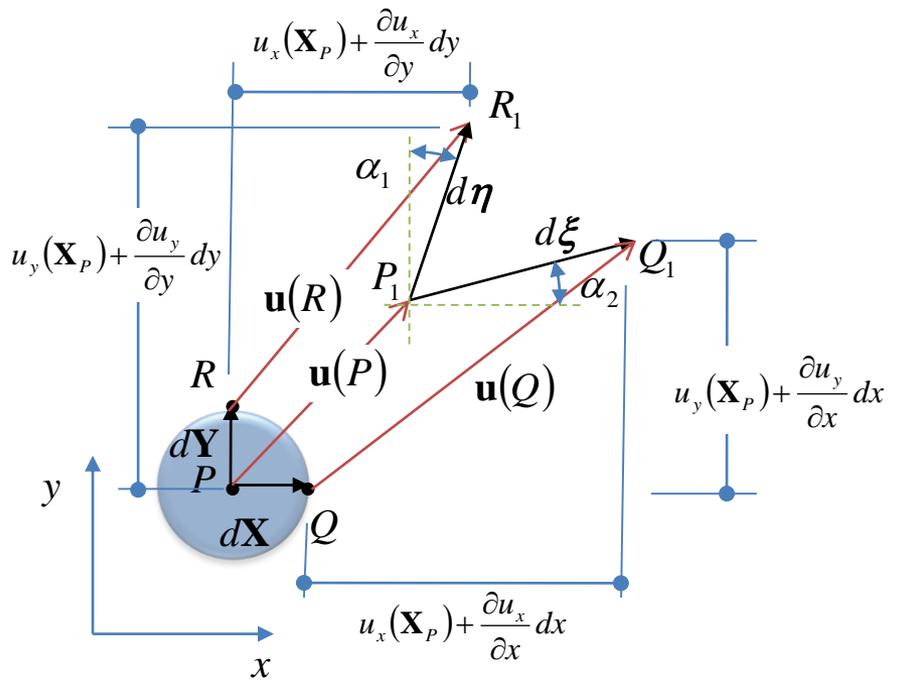
L'allungamento della fibra $P-Q$ è allora pari a

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{dx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$$

e quindi la componente ε_{xx} del tensore delle piccole deformazioni è pari all'allungamento di una fibra di lunghezza infinitesima che nella configurazione iniziale è parallela all'asse x . Analoghe dimostrazioni valgono per le fibre che nella configurazione iniziale sono parallele agli assi y e z .

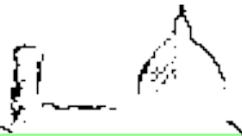


Significato fisico delle componenti fuori diagonale

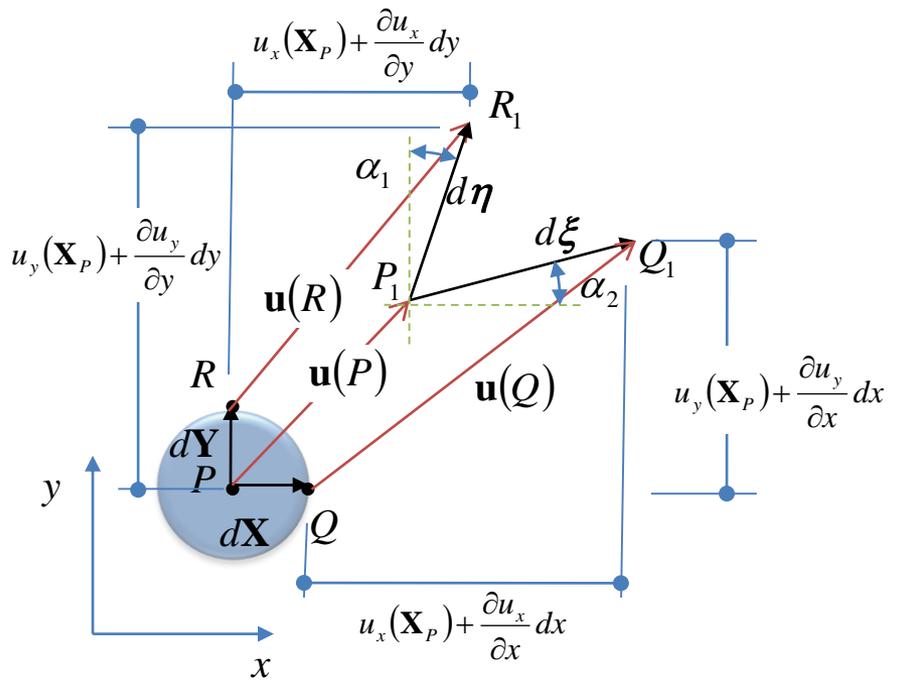


Sempre con riferimento ad un caso piano, si considerino, sulla frontiera dell'intorno di un punto P nella configurazione indeformata, due punti Q ed R tali che le fibre $Q-P$ e $R-P$ siano parallele agli assi x ed y rispettivamente. L'angolo fra esse compreso è quindi pari a $\pi/2$. A deformazione avvenuta, tale angolo potrebbe variare in maniera tale che tra le due fibre si abbia il seguente scorrimento angolare

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$$



Significato fisico delle componenti fuori diagonale



Utilizzando ancora l'ipotesi di piccoli gradienti di deformazione, attraverso semplici considerazioni trigonometriche si verifica che

$$\sin \alpha_1 = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx - u_y}{d\xi} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{xx}} \frac{\partial u_y}{\partial x} \rightarrow \alpha_1 \cong \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy - u_x}{d\eta} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{yy}} \frac{\partial u_x}{\partial y} \rightarrow \alpha_2 \cong \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Pertanto

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy}$$

Analoghe dimostrazioni valgono per gli altri termini fuori diagonale del tensore delle piccole deformazioni.



Analisi della deformazione

Variazione di volume

Decomposizione del tensore di deformazione nelle parti sferica e deviatorica



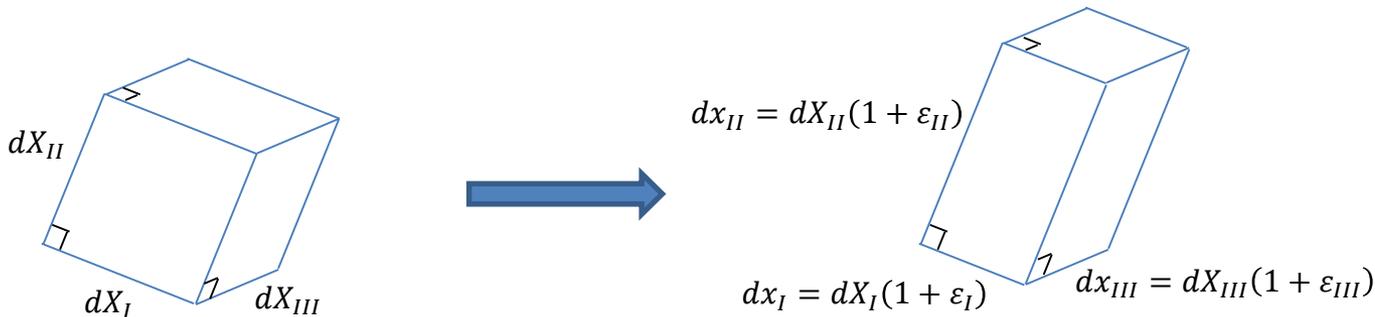
Variazione di volume

Come per tutti i tensori, anche per il tensore delle piccole deformazioni esiste un sistema di riferimento (principale) rispetto al quale esso assume una forma diagonale.

In altri termini, qualunque sia il valore delle sue componenti rispetto al sistema di riferimento fissato, esiste un sistema di riferimento rispetto al quale:

- le componenti fuori diagonali (gli scorrimenti angolari) sono nulle;
- le componenti sulla diagonale principale ($\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ - deformazioni principali) contengono i valori massimo e minimo di deformazione assiale.

Considerando allora un parallelepipedo nella configurazione iniziale, avente gli spigoli di lunghezza pari a dx_I, dx_{II}, dx_{III} paralleli alle direzioni principali, questo si deformerà in un altro parallelepipedo i cui spigoli si manterranno ortogonali tra loro (scorrimenti angolari nulli)



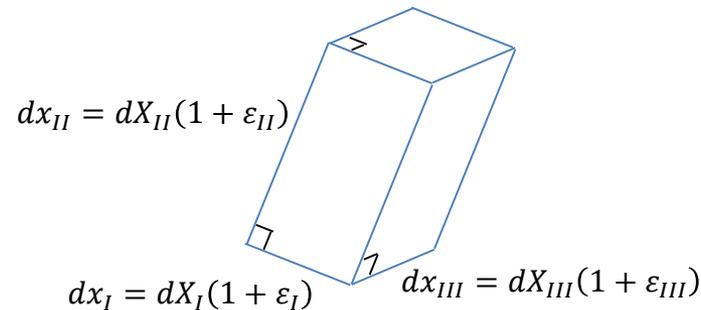
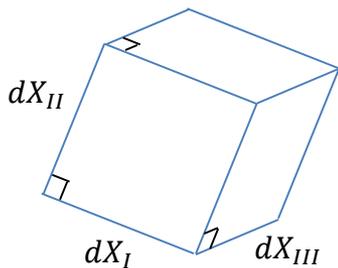


Variazione di volume

I volumi del prisma in esame nella configurazione iniziale (dV_0) e attuale (deformato) (dV) possono essere calcolati come segue:

$$dV_0 = dX_I \cdot dX_{II} \cdot dX_{III}$$

$$\begin{aligned} dV &= dx_I \cdot dx_{II} \cdot dx_{III} = \\ &= dX_I(1 + \varepsilon_I) \cdot dX_{II}(1 + \varepsilon_{II}) \cdot dX_{III}(1 + \varepsilon_{III}) = \\ &= dX_I \cdot dX_{II} \cdot dX_{III} \cdot (1 + \varepsilon_I) \cdot (1 + \varepsilon_{II}) \cdot (1 + \varepsilon_{III}) = \\ &= dV_0 \cdot \left(1 + \text{tr}(\underline{\varepsilon}) + O(\varepsilon^2)\right) = \\ &\cong dV_0 \cdot \left(1 + \text{tr}(\underline{\varepsilon})\right) \end{aligned}$$

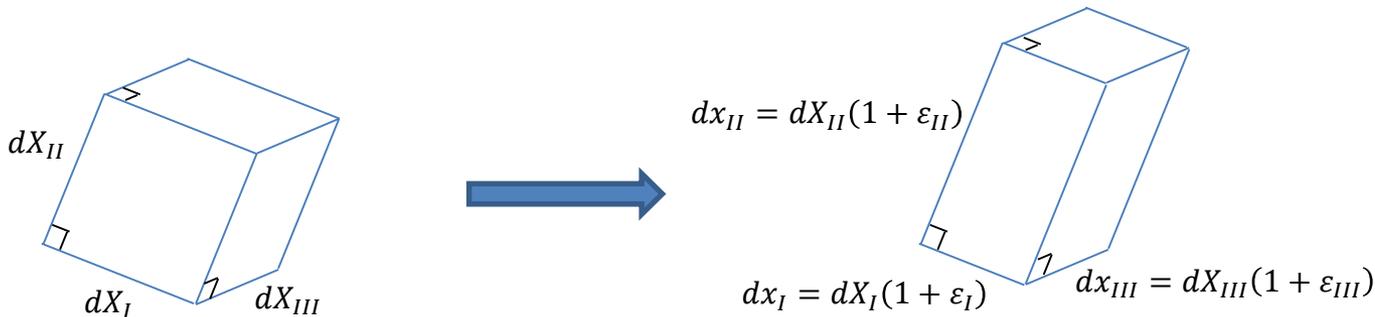




Variazione di volume

Pertanto, la variazione specifica di volume del prisma in esame può essere calcolata come segue

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} \cong \frac{dV_0 \cdot (1 + tr(\underline{\varepsilon})) - dV_0}{dV_0} = tr(\underline{\varepsilon})$$





Analisi della deformazione

Valori e direzioni principali di deformazione



Parte sferica e deviatorica della deformazione

Alla luce di quanto ottenuto, si ha che un generico stato di deformazione, **localmente** descritto dal tensore delle piccole deformazioni $\underline{\underline{\varepsilon}}$, può essere (**localmente**) decomposto nella somma della:

- parte *sferica*, $sf(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}}$ (dove $\underline{\underline{I}}$ indica il tensore identico), che descrive una pura variazione di volume (a forma costante);
- parte *deviatorica*, $dev(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \underline{\underline{\varepsilon}} - sf(\underline{\underline{\varepsilon}})$, che descrive una pura variazione di forma, a volume costante (è facile verificare, infatti, che $tr(dev(\underline{\underline{\varepsilon}})) = 0$)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \left\{ \begin{array}{ll} sf(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} & \text{Variazione di volume} \\ dev(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \underline{\underline{\varepsilon}} - sf(\underline{\underline{\varepsilon}}) & \text{Variazione di forma} \end{array} \right. \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = sf(\underline{\underline{\varepsilon}}) + dev(\underline{\underline{\varepsilon}})$$



Osservazioni

- i valori (ε_i) e le direzioni ($\hat{\mathbf{n}}_i$) principali di deformazione possono essere determinati risolvendo il seguente problema (agli autovalori)

$$\underline{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}}_i = \varepsilon_i \hat{\mathbf{n}}_i \rightarrow (\underline{\varepsilon} - \varepsilon_i \underline{I}) \hat{\mathbf{n}}_i = \mathbf{0} \rightarrow$$

imponendo $\det(\underline{\varepsilon} - \varepsilon_i \underline{I}) = 0 \rightarrow$ si calcolano ε_i

quindi, noti gli autovalori ε_i , si calcolano i corrispondenti autovettori imponendo

$$(\underline{\varepsilon} - \varepsilon_i \underline{I}) \hat{\mathbf{n}}_i = \mathbf{0}$$

- tutte le direzioni sono principali per il tensore sferico $sf(\underline{\varepsilon})$ (corrispondente autovalore: $\frac{1}{3} tr(\underline{\varepsilon})$)
- le direzioni principali del tensore deviatorico $dev(\underline{\varepsilon}) = \underline{\varepsilon} - sf(\underline{\varepsilon})$ coincidono con quelle del tensore delle piccole deformazioni $\underline{\varepsilon}$; i corrispondenti autovalori differiscono, invece, per $\frac{1}{3} tr(\underline{\varepsilon})$



Analisi della deformazione

Equazioni di congruenza interna



Equazioni di congruenza interna

Dato un qualunque campo di spostamenti purché derivabile, le relazioni che definiscono il *legame deformazioni-spostamenti* permettono sempre di calcolarne il corrispondente campo di deformazione; per tale motivo le (1) vengono dette anche *equazioni di congruenza* (fra spostamenti e deformazioni).

Il viceversa non è invece sempre possibile: dato un campo di deformazioni, non è infatti sempre possibile calcolare il corrispondente campo di spostamento attraverso le (1) in quanto queste ultime rappresentano un sistema differenziale di sei equazioni in tre incognite (le tre componenti di spostamento). Affinché questo sia possibile è necessario che il campo di deformazione assegnato soddisfi le seguenti condizioni

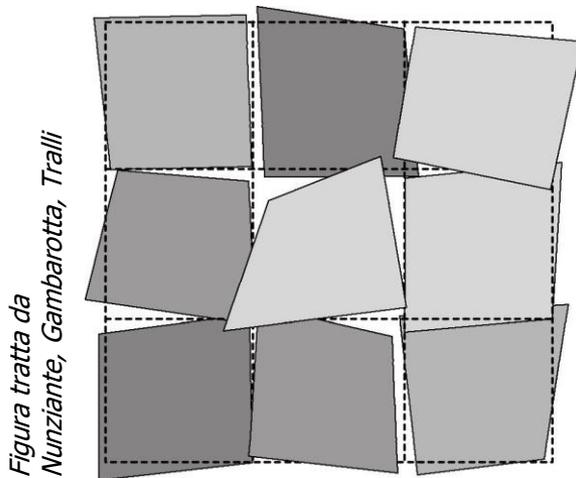
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}; & \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}; \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right);
\end{aligned}
\tag{2}$$

Le (2) vengono dette *condizioni di integrabilità* o *condizioni di de Saint Venant* o *equazioni di congruenza interna*



Equazioni di congruenza interna

Le *equazioni di congruenza interna* possono essere ottenute per derivazione diretta delle (1) e quindi sono delle condizioni necessarie che un generico campo di deformazione deve soddisfare. Si dimostra che, per domini monoconnessi (ossia per configurazioni che non presentano fori al loro interno) esse sono anche condizioni sufficienti per l'integrabilità del campo di deformazione, ossia, se un dato campo di deformazione soddisfa le (2), allora esiste un campo di spostamenti legato alle deformazioni assegnate attraverso le (1). Fisicamente le *condizioni di integrabilità* assicurano che il campo di deformazione in esame sia tale da non prevedere la formazione di vuoti (fratture) o la compenetrazione di materia come schematizzato in figura.



Si osservi che, visto che le equazioni di congruenza interna sono condizioni *necessarie*, il più generico campo di spostamento che può essere considerato deve essere tale da poter calcolare le derivate seconde delle deformazioni e quindi deve essere possibile calcolare le sue derivate terze: il campo di deformazione deve essere di tipo C_2 , ossia continuo almeno fino alle derivate seconde.



Analisi della deformazione

Il problema strutturale del solido elastico lineare



Legame deformazioni spostamenti

Esplicitando le proprietà adesso evidenziate per le sue componenti, il tensore delle piccole deformazioni si scrive in genere nella seguente notazione ingegneristica

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \end{aligned} \quad \forall P \in B_0 \quad (1)$$

Le precedenti relazioni sono note come *legame deformazioni-spostamenti*; esse infatti legano lo stato di deformazione presente in un punto materiale al campo di spostamento a cui sono soggetti i punti materiali di un continuo deformabile. Dette relazioni devono pertanto essere soddisfatte in ogni punto materiale del continuo. Inoltre, il campo di spostamento deve rispettare i vincoli presenti sulla parte di frontiera vincolata. Detti infatti $\bar{\mathbf{u}}$ i valori di spostamento imposti dai vincoli, deve essere verificato che

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall P \in \partial B_{0u}$$

Infine si vuole sottolineare che l'ambito di analisi a cui ci siamo riferiti nelle precedenti dimostrazioni è quello delle piccole deformazioni. In tale contesto cinematico le configurazioni iniziali e finali possono essere considerate coincidenti per cui si ha

$$B_0 \cong B \quad \partial B_{0u} \cong \partial B_u \quad \partial B_{0f} \cong \partial B_f$$



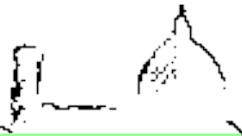
Legame deformazioni spostamenti in notazione di Voigt

La relazione tra spostamenti e deformazioni può essere espressa in notazione matriciale (di Voigt) come segue:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in B_0$$

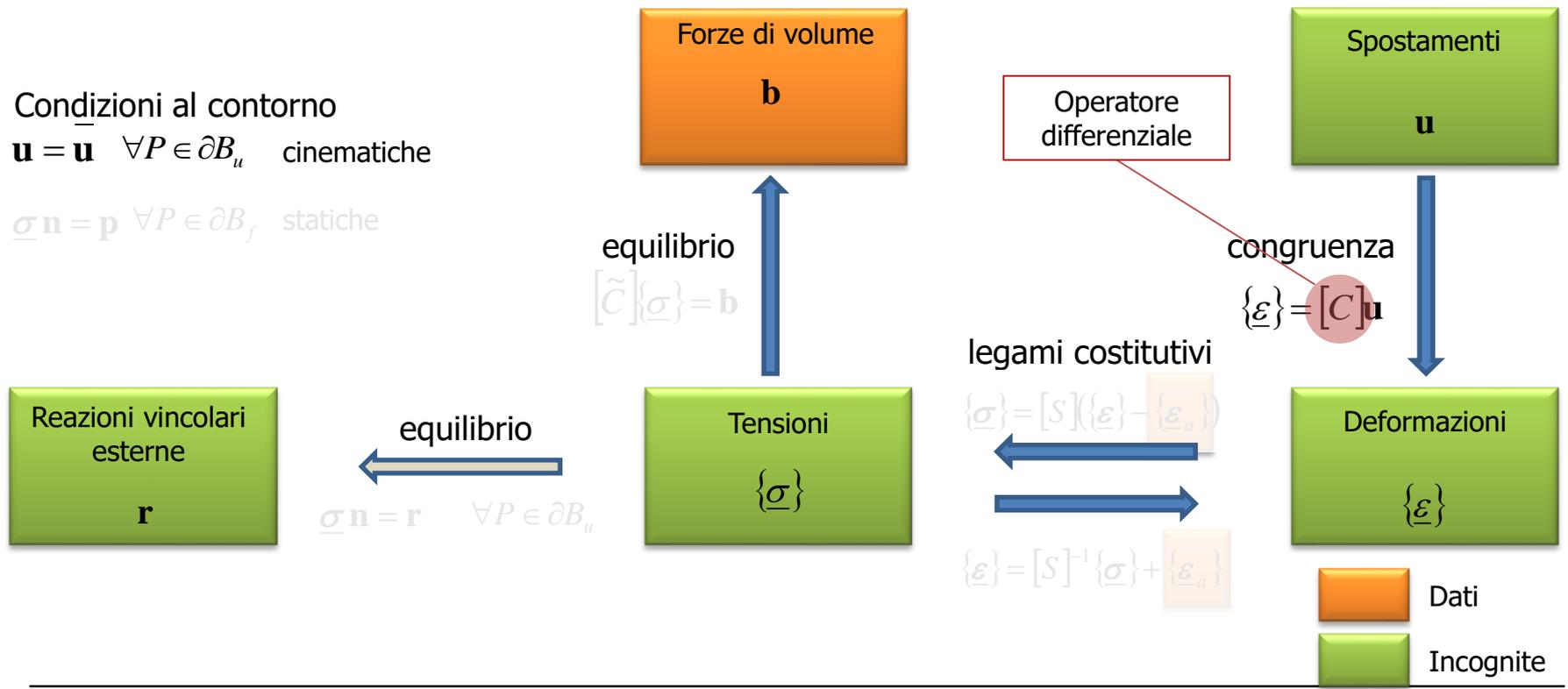
$$\{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u}$$

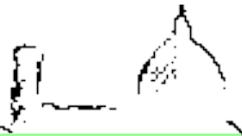
N.B. la relazione $\{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u}$ non è da intendersi come semplice prodotto matriciale: l'operatore differenziale $[C]$ (derivate) è applicato alle componenti del vettore spostamento \mathbf{u}



Il problema del solido elastico lineare isotropo

Schematizzazione del problema del solido elastico lineare

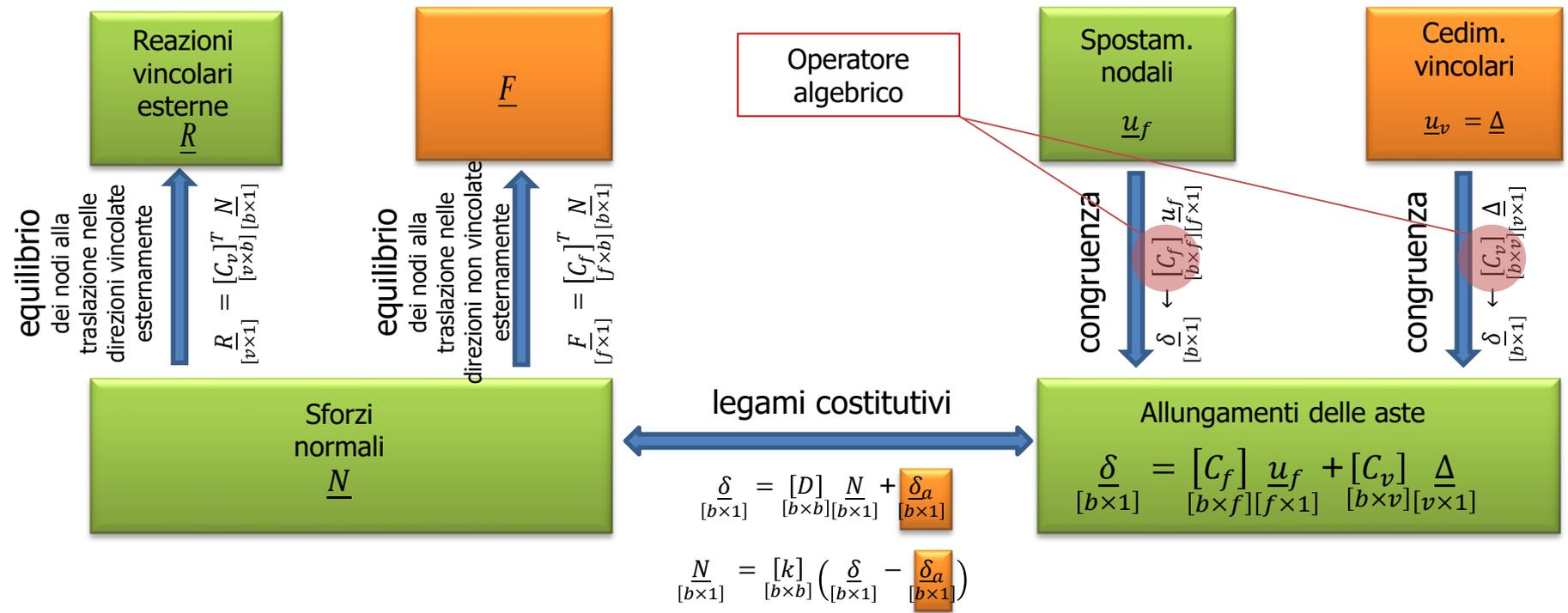




Rem. Il problema strutturale per i sistemi reticolari generici

n numero di nodi
 b numero di aste
 v vincoli esterni
 $f=gdl-v$ gdl non vincolati esternamente

Dati
 Incognite





Analisi della deformazione

Esercizi



Esercizio

Un solido di forma cubica avente spigolo $a=10cm$, viene sottoposto ad un processo deformativo al quale corrisponde il seguente campo di spostamenti

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0,2y(1-x/a) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le componenti di spostamento sono riferite ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente gli assi paralleli agli spigoli del solido in esame

Dopo aver disegnato la configurazione indeformata del solido in esame e la configurazione deformata corrispondente alle componenti di spostamento sopra definite, si calcolino:

- le componenti del tensore delle piccole deformazioni
- i valori di deformazione relative al punto materiale che occupa la posizione di coordinate $(0, 5cm, 8cm)$



Esercizio

Un solido di forma cubica avente spigolo $a=15cm$, viene sottoposto ad un processo deformativo al quale corrispondono le seguenti componenti del campo di spostamento

$$u_x = \frac{a-y}{100} \left(\frac{x}{a} \right)^3$$

$$u_y = 0.1y \left(1 - \frac{x}{a} \right)$$

$$u_z = 0$$

Le componenti di spostamento sono riferite ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente gli assi paralleli agli spigoli del solido in esame

Dopo aver disegnato la configurazione indeformata del solido in esame e la configurazione deformata corrispondente alle componenti di spostamento sopra definite, si calcolino:

- le componenti del tensore delle piccole deformazioni
- i valori di deformazione relative al punto materiale che occupa la posizione di coordinate $(1cm, 10cm, 10cm)$



Esercizio

Un solido di forma cubica avente spigolo $a=5\text{cm}$, viene sottoposto ad un processo deformativo al quale corrispondono le seguenti componenti del campo di spostamento

$$u_x = 0$$

$$u_y = 0.1x \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

$$u_z = \frac{a-x}{100} \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

Le componenti di spostamento sono riferite ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente gli assi paralleli agli spigoli del solido in esame

Dopo aver disegnato la configurazione indeformata del solido in esame e la configurazione deformata corrispondente alle componenti di spostamento sopra definite, si calcolino:

- le componenti del tensore delle piccole deformazioni
- i valori di deformazione relative al punto materiale che occupa la posizione di coordinate $(0, 0, 0)$



Appunti (Da fare)

- Stati di deformazione omogenea e non omogenea
- Semplici esempi di stati deformativi omogenei e corrispondenti valori di deformazione (deformazione assiale, scorrimenti angolari, ...)
- Valori e direzioni principali di deformazione; proprietà estremali delle componenti di deformazione. Esempio (v. appunti)