

# Elementi di meccanica del continuo



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Analisi dello stato di deformazione



# Analisi della deformazione

---

Stati piani di deformazione



## Sommario

È stato introdotto il tensore delle piccole deformazioni le cui componenti, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si scrivono come segue

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \end{aligned} \quad \forall P \in B$$

Si è visto che le precedenti relazioni, note come *legame deformazioni-spostamenti*, o *relazioni di congruenza*, devono essere soddisfatte in ogni punto materiale del continuo deformabile in esame. Dato un qualunque campo di spostamento *abbastanza regolare*, dalle precedenti relazioni è possibile determinare il corrispondente campo di deformazione presente nel continuo. In ogni caso, il campo di spostamenti deve essere tale da soddisfare le condizioni cinematiche imposte dai vincoli presenti sulla parte di frontiera vincolata

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall P \in \partial B_u$$



## Sommario

Nell'ambito di validità delle ipotesi sotto le quali esso è stato determinato (ossia per campi di deformazione infinitesimi), il tensore delle piccole deformazioni può essere usato come *misura (locale) dello stato di deformazione* presente in un generico punto materiale di un continuo deformabile: attraverso le sue componenti è infatti possibile determinare i valori di deformazione (allungamenti e scorrimenti) relative a qualunque direzione (o coppia di direzioni) passante/i per il punto  $P$  in cui il tensore è definito.

Il tensore delle piccole deformazioni  $\underline{\varepsilon}$  è reale e simmetrico.

È lecito cercare le direzioni ed i valori principali del tensore di deformazione:

- i valori principali di deformazione *contengono* il valore massimo e minimo di deformazione assiale (locale);
- le direzioni principali di deformazione individuano le direzioni in cui si hanno deformazioni assiali uguali ai valori principali di deformazione; localmente, le direzioni principali di deformazione non subiscono scorrimenti.



## Sommario

In questa presentazione saranno descritti gli stati piani di deformazione.

Def.

Uno stato di deformazione si dice piano se il tensore di deformazione ha un autovalore nullo (la corrispondente auto-direzione non manifesta, dunque, variazione di lunghezza).

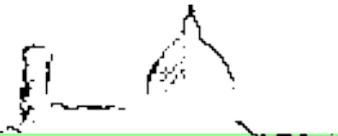
Il piano contenente le direzioni principali associate agli autovalori di deformazione non nulli è detto piano di deformazione.



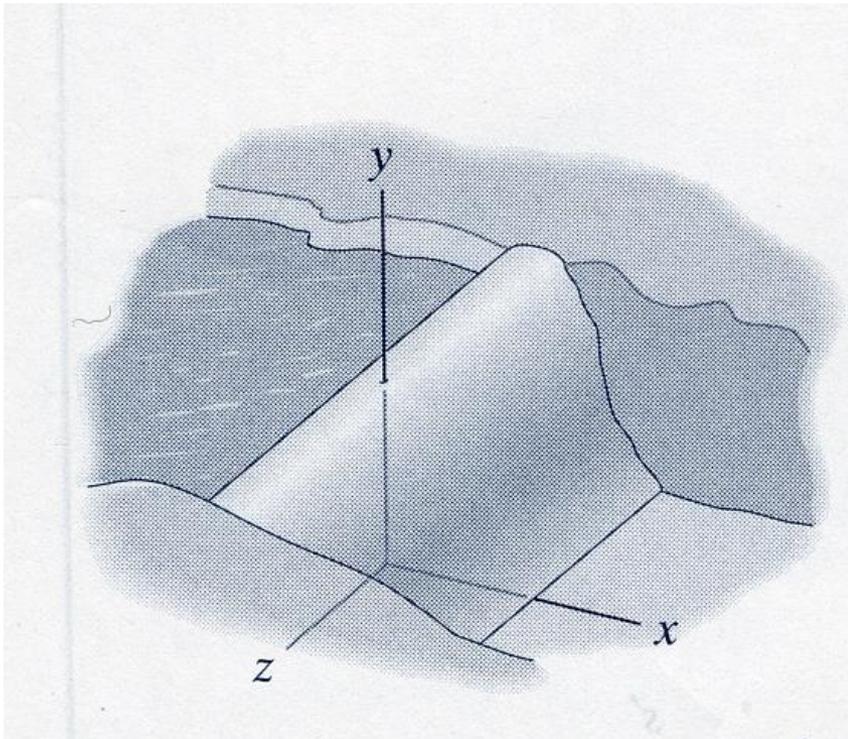
## Stato piano di deformazione

Per semplicità (quindi non necessariamente), uno stato di deformazione piano può essere descritto riferendo le componenti del tensore di deformazione a un sistema di riferimento avente due assi giacenti sul piano di tensione, come segue:

Componenti di deformazione	Piano di tensione	Valori principali noti	Altre direzioni principali
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	xy	$\varepsilon_z = 0 \leftrightarrow \mathbf{e}_z$	$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ n_y^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ n_y^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \gamma_{xz}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{xz}/2 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$	xz	$\varepsilon_y = 0 \leftrightarrow \mathbf{e}_y$	$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ 0 \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ 0 \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix}$
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ 0 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$	yz	$\varepsilon_x = 0 \leftrightarrow \mathbf{e}_x$	$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y^{(1)} \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y^{(2)} \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix}$



## Stato piano di deformazione



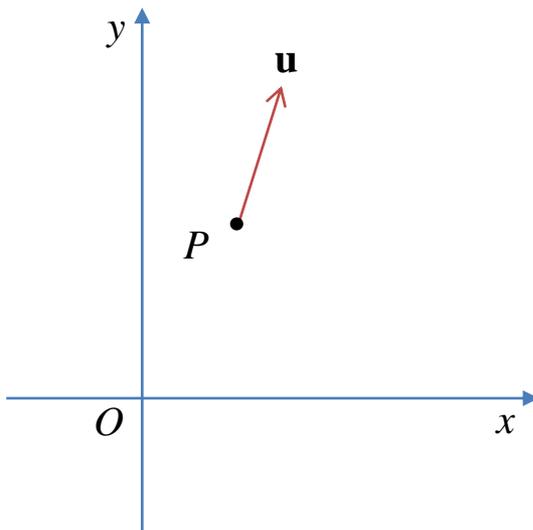
Per esempio, uno stato piano di deformazione è presente nei solidi cilindrici molto lunghi, come la diga schematizzata in figura. Visto che la diga è caricata sul piano  $xy$ , assumendo che le estremità della diga siano rigide, si può dire che le sezioni trasversali si mantengono piane ( $\gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0$ ) e che gli allungamenti longitudinali sono impediti ( $\varepsilon_z = 0$ ). Per tale motivo in ogni punto materiale della diga le uniche componenti di deformazione non nulle sono le seguenti

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per quanto si è detto, tale stato di deformazione è allora piano.



## Stato piano di deformazione



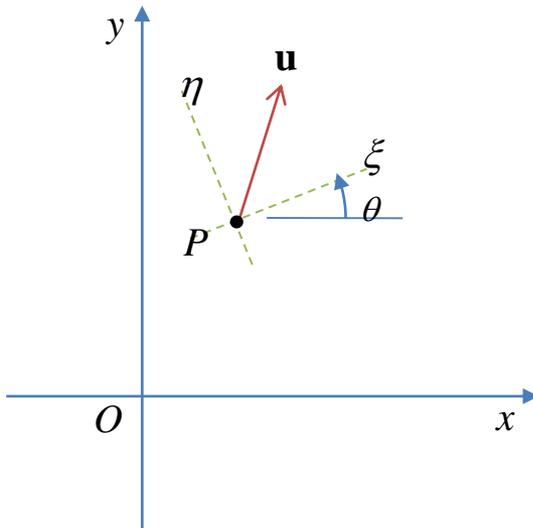
Si consideri un punto materiale  $P$  di un continuo deformabile in stato piano di deformazione e sia  $xy$  il relativo piano di deformazione. Sia  $\mathbf{u}$  il vettore spostamento di tale punto materiale e  $u_x$  ed  $u_y$  le sue componenti. Le componenti (significative) del tensore di deformazione rispetto al sistema indicato in figura sono le seguenti

$$\underline{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};$$

$\underline{\varepsilon}_r$  tensore di deformazione "ridotto" (relativo alle sole componenti di deformazione significative)



## Stato di deformazione piana



Si consideri un punto materiale  $P$  di un continuo deformabile in stato piano di deformazione e sia  $xy$  il relativo piano di deformazione. Sia  $\mathbf{u}$  il vettore spostamento di tale punto materiale e  $u_x$  ed  $u_y$  le sue componenti. Le componenti (significative) del tensore di deformazione rispetto al sistema indicato in figura sono le seguenti

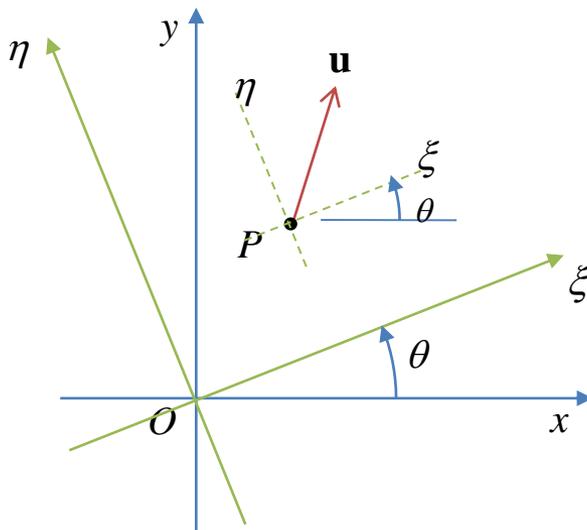
$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};$$

Si vogliono calcolare le deformazioni assiali  $\varepsilon_\xi$  e gli scorrimenti angolari  $\gamma_{\xi\eta}$  relativi a due direzioni inclinate di un angolo  $\theta$  rispetto agli assi del sistema di riferimento in figura.



## Stato di deformazione piana



Si fissa allora un sistema di riferimento inclinato di  $\theta$  rispetto a quello originario. Le componenti del vettore spostamento rispetto a tale sistema di riferimento sono pari a

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ u_{\eta} &= -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Inoltre, le coordinate di un generico punto rispetto ai due sistemi di riferimento in figura sono relazionati come segue

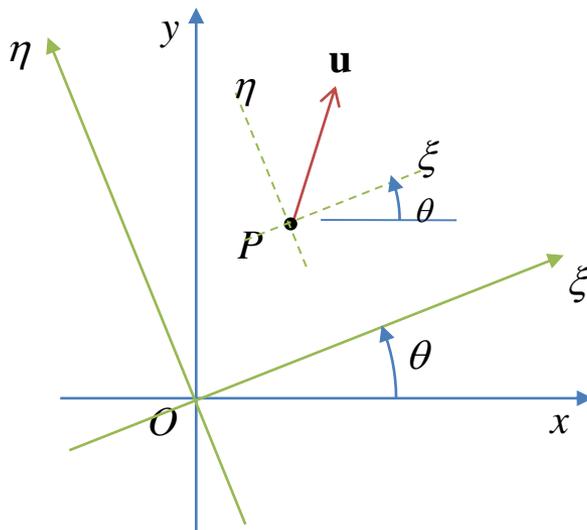
$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \theta - \eta \sin \theta \\ y &= \xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Per definizione si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} \\ \gamma_{\xi\eta} &= \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \xi} \end{aligned}$$



## Stato di deformazione piana



Per le regole di derivazione a catena

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{\partial u_{\xi}}{\partial u_x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial u_{\xi}}{\partial u_y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\eta} &= \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \xi} = \frac{\partial u_{\xi}}{\partial u_x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_{\xi}}{\partial u_y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{\partial u_{\eta}}{\partial u_x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial u_y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

Utilizzando le (1) e (2) le precedenti relazioni forniscono

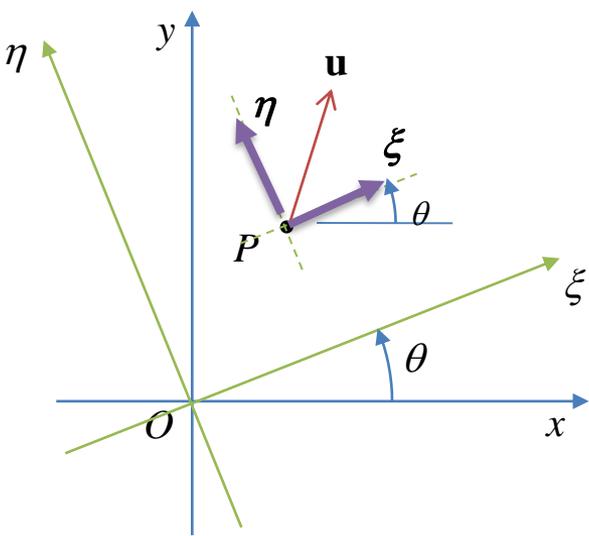
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

le quali sono analoghe alle relazioni di trasformazione delle tensioni piane

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta) \\ \tau_{nm} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$



## Stato di deformazione piana



È facile dimostrare che, introducendo il seguente tensore di deformazione ridotto

$$\underline{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

contenente solo le componenti di deformazione eventualmente non nulle, ed introducendo i versori  $\xi$  ed  $\eta$  paralleli rispettivamente alle direzioni  $\xi$  ed  $\eta$ , si ha

$$\epsilon_\xi = \underline{\epsilon}_r \xi \cdot \xi$$

$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = \underline{\epsilon}_r \xi \cdot \eta$$

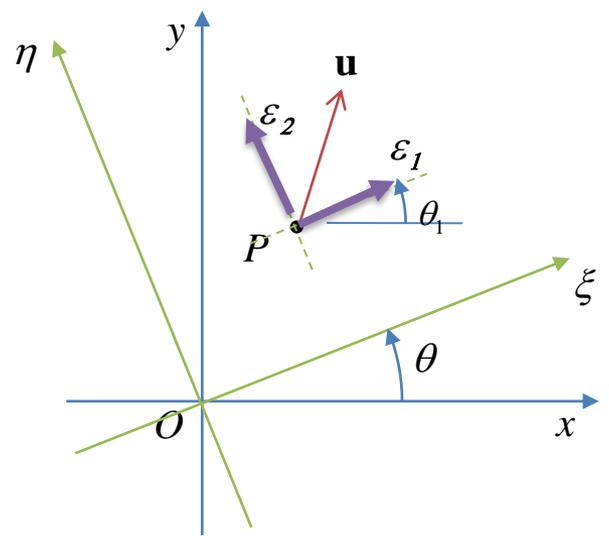
I massimi ed i minimi valori di deformazioni assiali e le relative direzioni coincidono con gli autovettori e gli autovalori del tensore di deformazione.

$$\epsilon_\xi = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



# Stato di deformazione piana



Detti  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  i valori principali di deformazione e  $\theta_1$  l'angolo di cui deve ruotare l'asse  $x$  in senso antiorario per sovrapporsi alla direzione corrispondente al massimo autovalore di deformazione, è facile verificare che risolvendo il problema degli autovalori del tensore di deformazione ridotto si ha

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2(\gamma_{xy}/2)}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

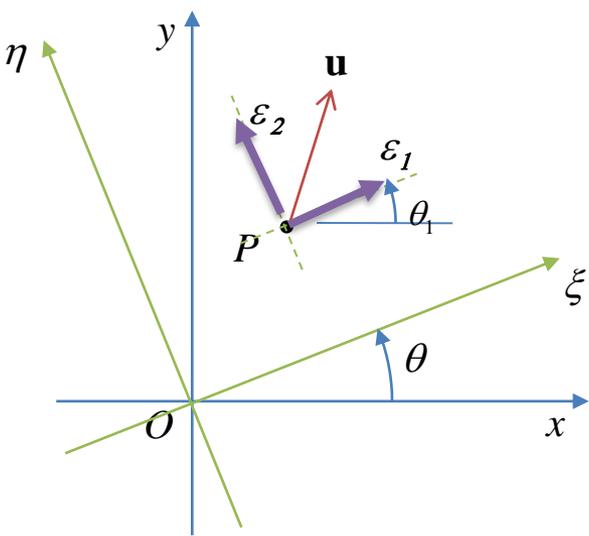
Si osservi che nelle precedenti relazioni compare la componente fuori diagonale del tensore di deformazione ossia la metà dello scorrimento angolare tra gli assi  $x$  ed  $y$ .

$$\epsilon_\xi = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



## Stato di deformazione piana



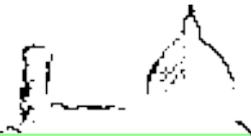
N.B. è possibile determinare le componenti di deformazione relative a direzioni comunque inclinate anche mediante il metodo della circonferenza di Mohr. Tale metodo sarà descritto nel seguito con riferimento agli stati di tensione piana.

Tale metodo è comunque accennato di seguito per completezza.

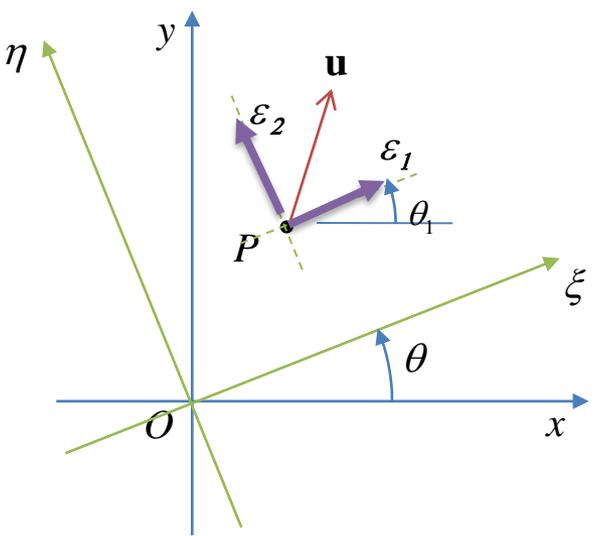
$$\varepsilon_{\xi} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2} \quad \tan 2\theta_1 = \frac{2(\gamma_{xy}/2)}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$



# Stato di deformazione piana (anticip. circonfer. di Mohr)



Utilizzando le formule di bisezione del seno e del coseno si ha:

$$\epsilon_\xi = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \cos 2\theta + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \sin 2\theta$$
$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

Quadrando e sommando membro a membro le precedenti equazioni si ha

$$(\epsilon_\xi - \epsilon_{med})^2 + \left(\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2}\right)^2 = R^2 \tag{4}$$

dove si è posto

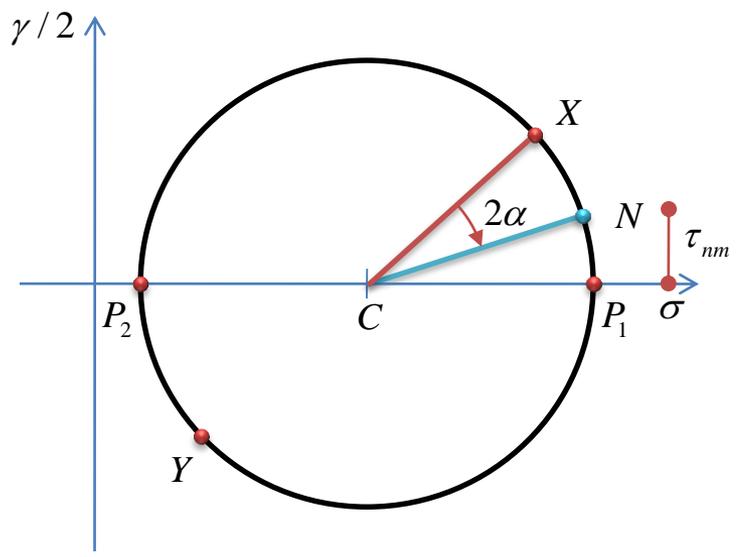
$$\epsilon_{med} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_\xi = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$
$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$
$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2} \quad \tan 2\theta_1 = \frac{2(\gamma_{xy}/2)}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

La (4) è l'equazione di una circonferenza sul piano  $\epsilon, \gamma/2$ .



## Stato di deformazione piana (anticip. circonfer. di Mohr)



$$\varepsilon_{med} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

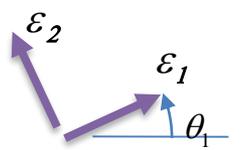
$$X \equiv (\varepsilon_x, \gamma_{xy} / 2)$$

$$Y \equiv (\varepsilon_y, -\gamma_{xy} / 2)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{med} + R$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2(\gamma_{xy} / 2)}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$



L'analisi dello stato di deformazione può allora essere effettuata mediante il metodo della circonferenza di Mohr in maniera analoga a quanto fatto per l'analisi dello stato tensionale piano. Nella figura a fianco si riportano sinteticamente i termini necessari alla sua costruzione.

Si noti che l'asse verticale contiene i semiscorrimenti angolari. Essi sono positivi sul piano di Mohr se "di chiusura", ossia se le direzioni a cui si riferiscono si chiudono.

Si ricordi che gli angoli sul piano di Mohr sono discordi a quelli di cui deve ruotare l'asse x per sovrapporsi alla direzione esaminata.



# Analisi della deformazione

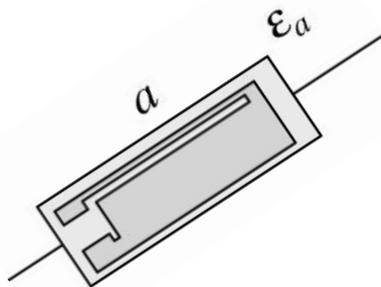
---

Misure sperimentali di deformazione



## Misure sperimentali di deformazione

Molto spesso, in alcune attività di pratica professionale o in sperimentazioni di laboratorio, risulta necessario misurare la deformazione assiale presente nell'intorno di un punto materiale e relativa ad una certa direzione. Questo viene in genere fatto mediante degli estensimetri (*strain gauge*), la cui variazione di lunghezza viene calcolata attraverso una misura della loro variazione di resistenza elettrica applicando la legge di Ohm. I comuni strain gauge hanno dimensioni "ridotte" (la lunghezza è generalmente compresa tra qualche millimetro e qualche centimetro) e forniscono il valore di deformazione assiale media presente nella zona in cui essi sono applicati.



Schema di uno strain gauge

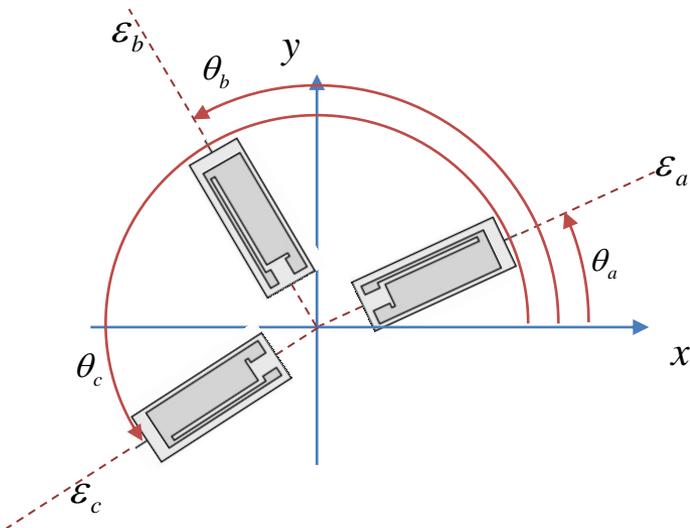
Attraverso lo strain gauge in figura si calcola ad esempio la deformazione assiale  $\varepsilon_a$ .

In genere, anche se non necessariamente, gli strain gauge vengono applicati sulla superficie esterna dei solidi (travi, pilatri, piastre, etc.) che devono essere esaminati.



## Misure sperimentali – stati piani di deformazione

Per gli stati piani di deformazione è possibile utilizzare un sistema di strain gauge per calcolare le componenti del tensore di deformazione ridotto. Si consideri infatti un sistema di tre strain gauge (*rosetta di strain gauge*) comunque inclinati fra loro e rispetto al sistema di riferimento cartesiano ortogonale che si sta considerando. Attraverso di essi si possono misurare indirettamente i valori di deformazione  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  ed  $\varepsilon_c$ . Applicando la prima delle (3) gli stessi valori di deformazione si possono calcolare come segue



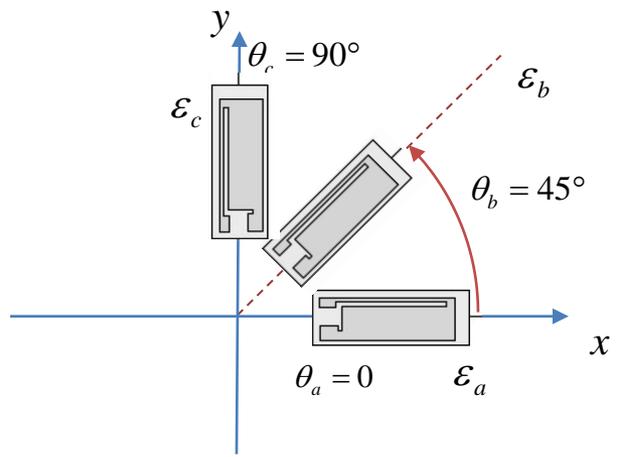
$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_a + \varepsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\ \varepsilon_b &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_b + \varepsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\ \varepsilon_c &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_c + \varepsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c \end{aligned}$$

Il precedente è un sistema di tre equazioni nelle tre componenti del tensore di deformazione ridotto. Pertanto può essere utilizzato per il calcolo delle componenti di deformazione relative al sistema di riferimento in figura.

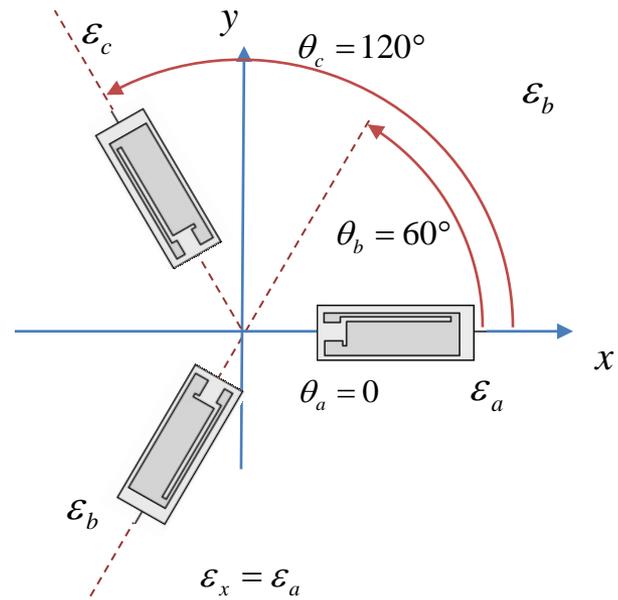


## Misure sperimentali – stati piani di deformazione

Tipicamente, per comodità si utilizzano per le rosette di strain gauge le configurazioni schematizzate nella presente slide



$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \epsilon_c \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c) \end{aligned}$$