$\boxed{\text{ESERCIZIO 1}}$

Verificare che
$$\lim_{x\to -3} |x| = 3.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Si deve verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$\text{se } 0 < |x+3| < \delta \text{ allora } \ ||x|-3| < \varepsilon. \tag{1}$$

Dalla diseguaglianza triangolare, $||a|-|b|| \leq |a-b|$ con $a = x$, $b = -3$, si ha
$$||x|-|-3|| < |x-3|\,.$$

Perciò se $|x+3| < \varepsilon$. si ha $||x|-3| < \varepsilon$. Quindi per $\varepsilon > 0$ basta scegliere $\delta = \varepsilon$ e la (1) risulta verificata.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

Verificare che
$$\lim_{x\to 2} \left(x^2 - 3x\right) = -2.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Svolgiamo l'esercizio in due modi.

<u>1^o modo</u>. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, proviamo che esiste $\delta > 0$ tale che
$$\text{se } 0 < |x-2| < \delta \text{ allora } -2-\varepsilon < x^2 - 3x < -2+\varepsilon. \tag{2}$$

Cosideriamo il seguente sistema di disequazioni
$$\begin{cases} x^2 - 3x < -2+\varepsilon, \\ x^2 - 3x > -2-\varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

La prima disequazione del sistema, $x^2 - 3x < -2 + \varepsilon$ si può scrivere $x^2 - 3x + 2 - \varepsilon < 0$ ed ha per soluzioni tutte le x tali che
$$\frac{3-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}. \tag{4}$$

La seconda equazione del sistema si può scrivere $x^2-3x+2+\varepsilon > 0$ e quest'ultima, se $\varepsilon > \frac{1}{4}$, ed ha per soluzioni ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre se $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ la stessa disequazioe è soddisfatta per ogni x tali che
$$x < \frac{3-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2} \text{ oppure } \frac{3+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2} < x. \tag{5}$$

I valori di ε tali che $\varepsilon > \frac{1}{4}$ non interessano per la nostra verifica (il lettore dovrebbe saper fornire una valida giustificazione di questa limitazione), quindi possiamo limitarci a considerare il caso in cui $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$. In questo caso da (4) e (5) abbiamo che il sistema (3) è soddisfatto se e solo se

$$\frac{3-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2} \text{ oppure } \frac{3+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}. \tag{6}$$

Dai due intervalli ricavati sopra dobbiamo ricavare dei valori di δ per i quali sia soddisfatta la (2), a tale scopo scriviamo i due intervalli di sopra in modo da individuare un intorno del punto 2 e di raggio δ in esso contenuto. Le relazioni in (6) si possono scrivere come segue

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\varepsilon} < x-2 < -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\varepsilon} \tag{7}$$

oppure

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4\varepsilon} < x-2 < -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\varepsilon}. \tag{8}$$

Ora è evidente che per valori *sufficientemente piccoli* di ε, per determinare i valori di δ che ci interessano dobbiamo esaminare l'intervallo definito in (8). Un valore di δ per il quale la (2) è soddisfatta è fornito dal numero positivo $\overline{\delta} = \frac{1}{2}\min\left\{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}, -1+\sqrt{1+4\varepsilon}\right\} = -1+\sqrt{1-4\varepsilon}$ o anche da qualsiasi altro numero positivo minore di $\overline{\delta}$.

<u>2^o modo</u>. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, proviamo che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{se } 0 < |x-2| < \delta \text{ allora } \left|x^2-3x+2\right| < \varepsilon. \tag{9}$$

A tale scopo osserviamo che

$$\left|x^2-3x+2\right| = |x-2|\,|x+1| \tag{10}$$

e che se $|x-2| < \delta$ e $\delta \leq 1$ allora

$$|x+1| \leq |(x-2)+1| \leq |x-2|+1 < \delta+1 \leq 2. \tag{11}$$

Da (10) e (11) abbiamo, se $0 < |x-2| < \delta$ allora

$$\left|x^2-3x+2\right| \leq 2\,|x-2| < 2\delta. \tag{12}$$

Sia $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ e dalla (12) otteniamo la (9).

ESERCIZIO 3

Verificare che

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^6+5x^3\right) = +\infty.$$

SOLUZIONE

Sia $M > 0$ fissato. Dobbiamo verificare che esiste $K > 0$ tale che

$$\text{se } x < -K \text{ allora } x^6 + 5x^3 > M. \tag{13}$$

Osserviamo che

$$x^6 + 5x^3 \geq x^6 - 5|x|^3 = |x|^3 \left(|x|^3 - 5\right),$$

quindi se $K \geq \sqrt[3]{6}$ e $x < -K$ allora

$$x^6 + 5x^3 \geq |x|^3 \left(|x|^3 - 5\right) > K^3.$$

Perciò, scegliendo $K = \max\left\{\sqrt[3]{M}, \sqrt[3]{6}\right\}$ la (13) è soddisfatta.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}}$

Verificare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x-1} = 0.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dobbiamo verificare che esiste $K > 0$ tale che

$$\text{se } x > K,\ x \neq 1, \text{ allora } \left|\frac{\sin x}{x-1}\right| < \varepsilon. \tag{14}$$

Osserviamo che

$$\left|\frac{\sin x}{x-1}\right| \leq \frac{1}{|x-1|}. \tag{15}$$

Ora se $K \geq 2$ e $x > K$ allora $|x-1| = x - 1 > K - 1$. Quindi, da (15) si ha che se $K \geq 2$ e $x > K$ allora

$$\left|\frac{\sin x}{x-1}\right| < \frac{1}{K-1}.$$

Perciò affinché valga (14) è sufficiente che $K \geq 2$ e $\frac{1}{K-1} \leq \varepsilon$ e quindi basta scegliere $K = \max\left\{2, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\}$.