

# Meccanica del continuo

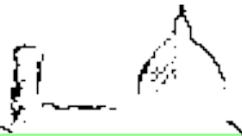


UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

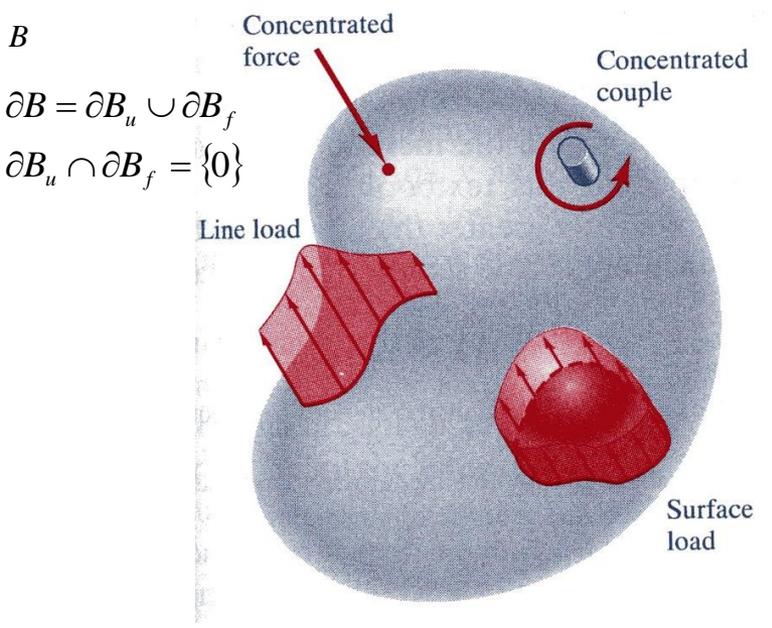
Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Analisi dello stato tensionale  
Proprietà del tensore di Cauchy



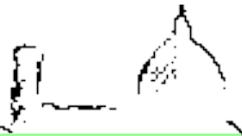
## Equazioni di equilibrio



Si consideri il solido schematizzato in figura e si assuma che esso sia in equilibrio. Si indichi con  $\{B\}$  la parte interna del continuo e con  $\{\partial B\}$  la sua frontiera.

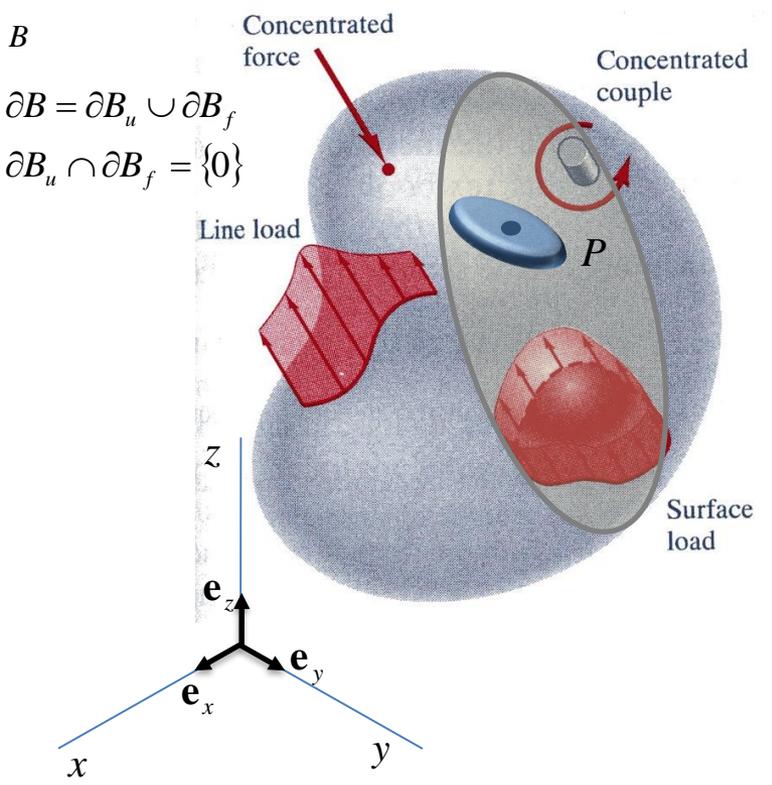
Di seguito, saranno analizzate le condizioni di equilibrio che devono essere soddisfatte sia in corrispondenza dei punti interni al continuo, sia in corrispondenza dei punti che si trovano sulla sua frontiera.

Figura tratta da R.R.Craig Jr. "Mechanics of Materials"



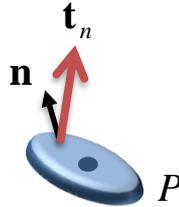
# Equazioni di equilibrio interne

Sia  $P \in \{B\}$  un punto materiale interno al continuo in esame. Si consideri un qualunque intorno di tale punto avente volume  $V$  e superficie di frontiera  $S$ .

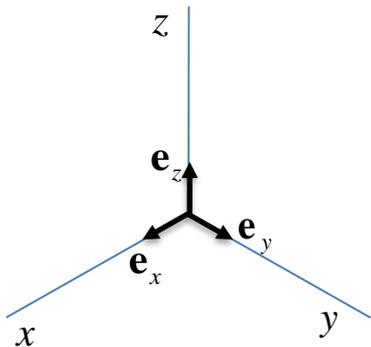




## Equazioni di equilibrio interne

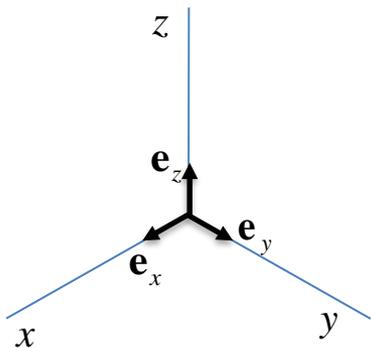
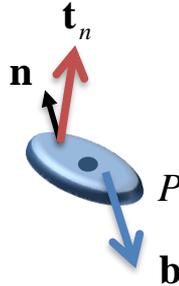


Sia  $P \in \{B\}$  un punto materiale interno al continuo in esame. Si consideri un qualunque intorno di tale punto avente volume  $V$  e superficie di frontiera  $S$ . Si assuma, senza perdere di generalità, che l'intorno in esame sia abbastanza regolare da poter determinare univocamente il versore normale uscente  $\mathbf{n}$  per tutti i punti che si trovano sulla sua frontiera. In tal modo, in corrispondenza dei punti sulla frontiera è possibile determinare univocamente il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$ .





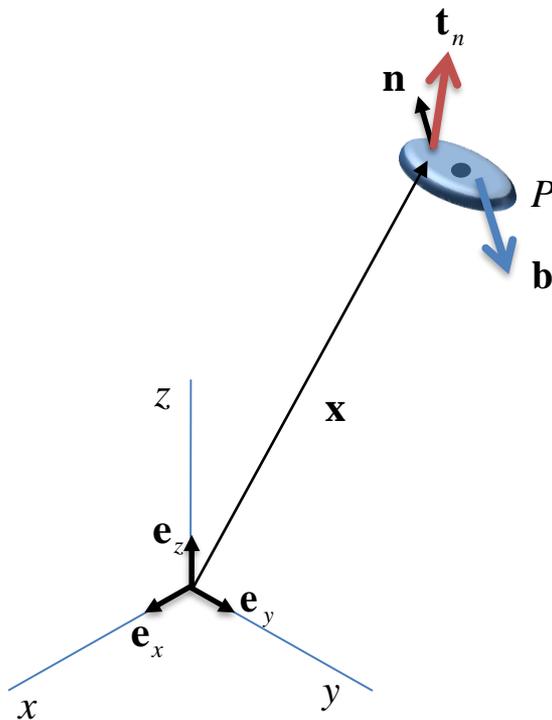
## Equazioni di equilibrio interne



Sia  $P \in \{B\}$  un punto materiale interno al continuo in esame. Si consideri un qualunque intorno di tale punto avente volume  $V$  e superficie di frontiera  $S$ . Si assuma, senza perdere di generalità, che l'intorno in esame sia abbastanza regolare da poter determinare univocamente il versore normale uscente  $\mathbf{n}$  per tutti i punti che si trovano sulla sua frontiera. In tal modo, in corrispondenza dei punti sulla frontiera è possibile determinare univocamente il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$ . Si assuma che internamente al continuo, e quindi anche internamente all'intorno che stiamo considerando, sia presente un campo di forze di volume  $\mathbf{b}$ . Tali forze non devono necessariamente essere costanti per tutti i punti dell'elemento in esame.



## Equazioni di equilibrio interne

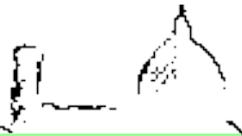


Si indichi con  $\mathbf{x}$  il vettore posizione di un generico punto appartenente all'intorno in esame. Le equazioni di equilibrio dell'elemento in esame alla traslazione ed alla rotazione rispetto all'origine del sistema di riferimento si scrivono come segue

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t}_n dS = \mathbf{0} \quad \forall V$$

$$\int_V \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS = \mathbf{0} \quad \forall V$$

Se il continuo in esame è in equilibrio, anche ogni sua parte deve essere in equilibrio e quindi le precedenti relazioni devono valere per un qualunque intorno del punto  $P$ .



# Equazioni indefinite di equilibrio

Consideriamo inizialmente le equazioni di equilibrio alla traslazione

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t}_n dS = \mathbf{0} \quad \forall V$$

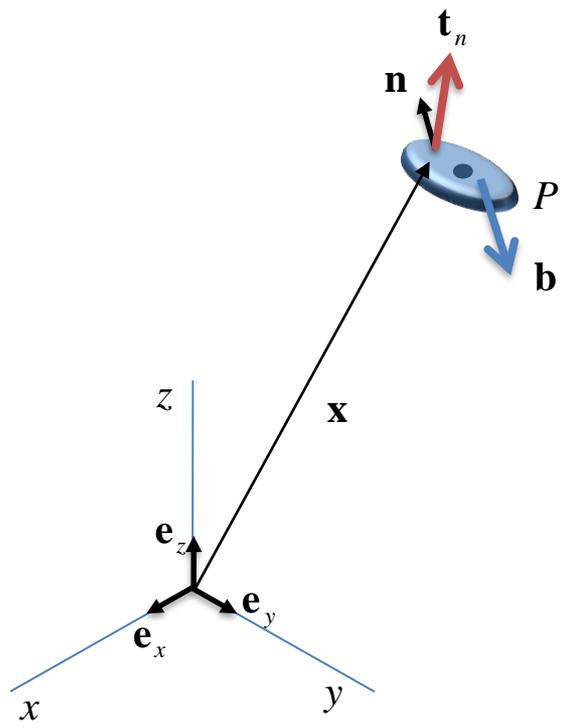
Sostituendo nella precedente equazione la relazione di Cauchy si ha

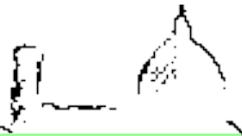
$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_S \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad \forall V$$

Utilizzando la formula di Gauss-Green si ottiene

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_V \text{div}(\underline{\sigma}) dV = \mathbf{0} \quad \forall V$$

dove con  $\text{div}(\underline{\sigma})$  si è indicata la divergenza del tensore  $\underline{\sigma}$ .





# Equazioni indefinite di equilibrio

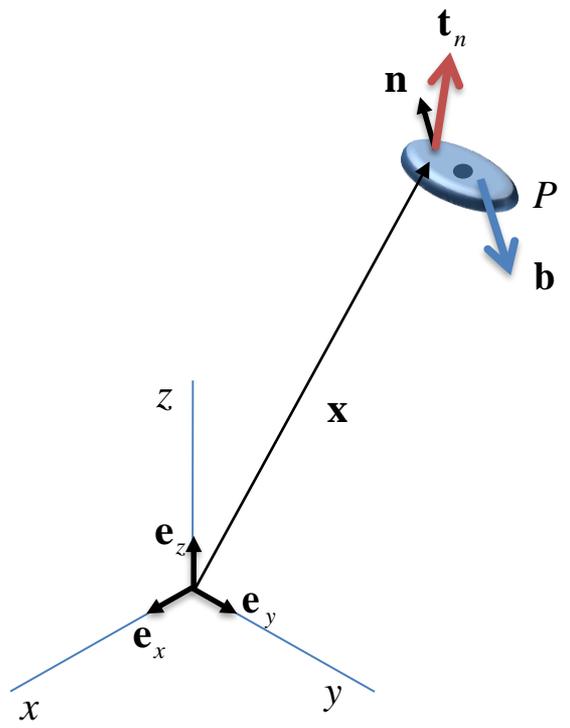
Per l'arbitrarietà del volume di integrazione si ottengono le seguenti equazioni

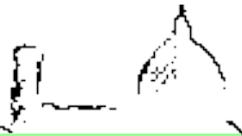
$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall P \in \{B\}$$

Esplicitamente esse si scrivono come segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad \forall P \in \{B\}$$

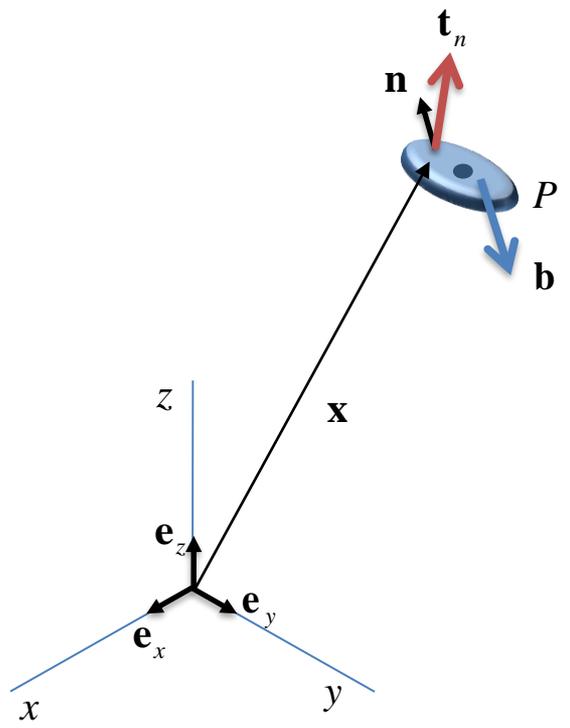
Se il solido è in equilibrio esse devono essere soddisfatte in corrispondenza di ogni punto del continuo. Per tale motivo le precedenti vengono dette equazioni indefinite di equilibrio.





# Equazioni indefinite di equilibrio – derivazione ‘diretta’

TO DO

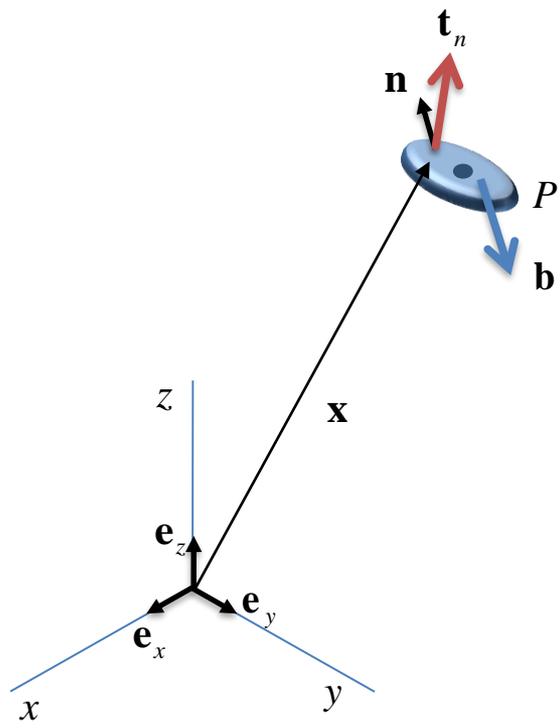


$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\forall P \in \{B\}$$



# Equilibrio alla rotazione



Consideriamo adesso le equazioni di equilibrio alla rotazione

$$\int_V \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS = \mathbf{0} \quad \forall V$$

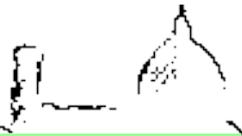
Si dimostra (la dimostrazione viene omessa per brevità) che la precedente equazione è soddisfatta se e solo se il tensore di tensione è simmetrico

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$$

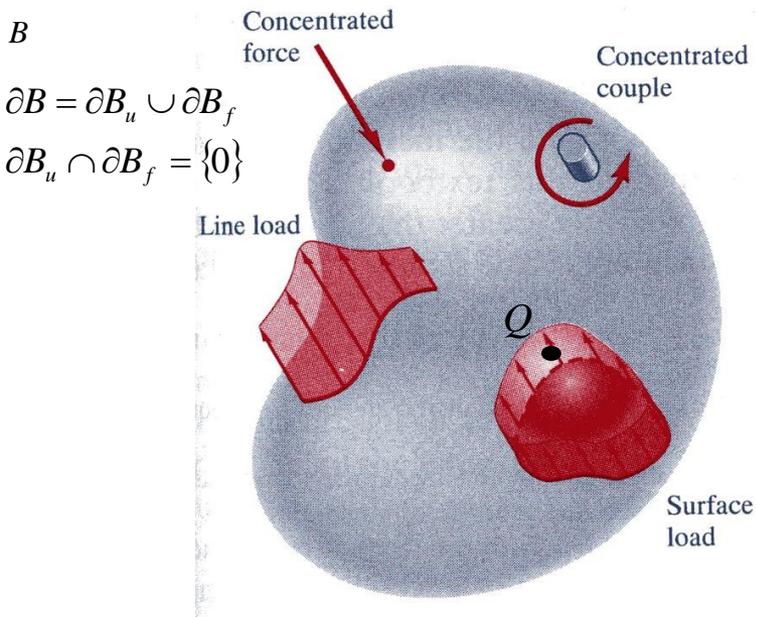
Esplicitamente questo comporta le seguenti eguaglianze

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Quindi, per l'equilibrio alla rotazione di un generico elemento di volume, si ha che il tensore di Cauchy deve essere simmetrico.



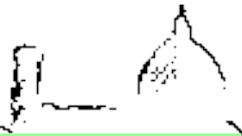
## Equazioni di equilibrio sulla frontiera



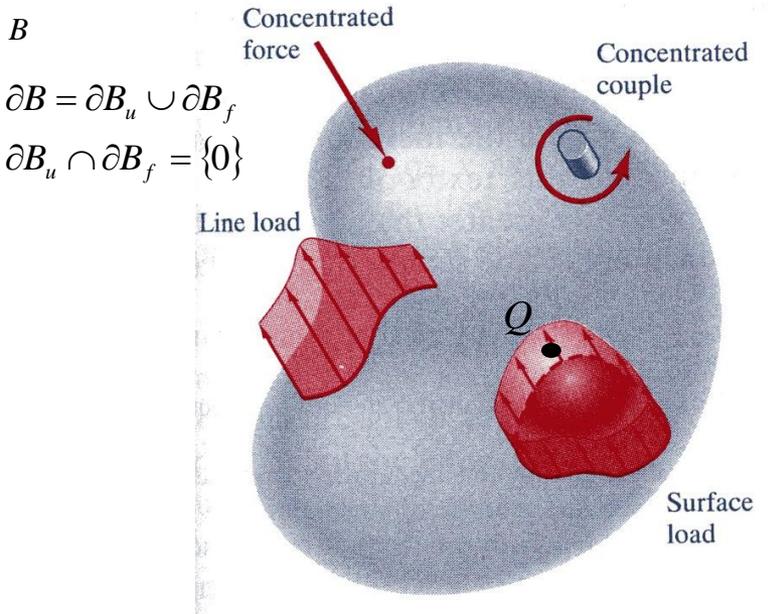
Si consideri adesso un punto  $Q \in \{\partial B_f\}$  posto sulla frontiera del solido in esame. Si supponga che la superficie di frontiera sia abbastanza regolare da poter definire in maniera univoca il versore normale  $\mathbf{n}$  uscente dal solido. Si immagini che in corrispondenza di tale punto materiale sia applicata la forza di superficie  $\mathbf{p}$ . Per l'equilibrio locale di un intorno infinitesimo del punto  $Q$  si ha che le tensioni interne devono essere uguali alle forze esterne applicate e quindi

$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}$$

$$\forall Q \in \{\partial B_f\}$$



## Equazioni di equilibrio sulla frontiera



Analogamente, se si considera un punto  $Q \in \{\partial B_u\}$  posto sulla frontiera vincolata del solido in esame, supponendo che la superficie di frontiera sia abbastanza regolare da poter definire in maniera univoca il versore normale  $\mathbf{n}$  uscente dal solido, per l'equilibrio locale di un intorno infinitesimo del punto  $Q$  si ha che le tensioni interne devono essere uguali alle reazioni vincolari e quindi

$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}$$

$$\forall Q \in \{\partial B_u\}$$



*Università degli Studi di Firenze*

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)  
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni  
Docente: Mario Fagone  
Argomento: Meccanica del continuo  
Proprietà del tensore di Cauchy



**Facoltà di Architettura**

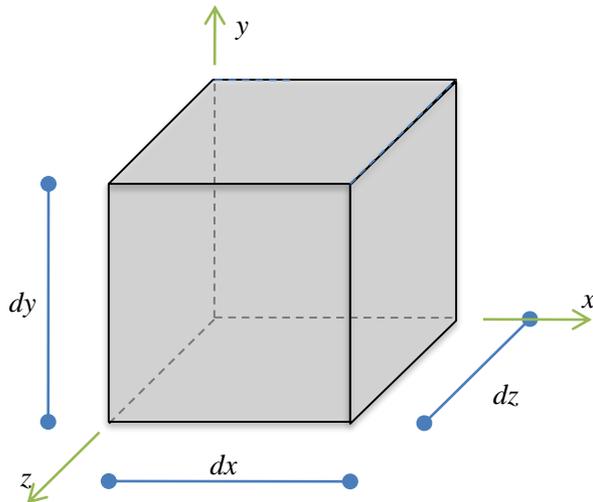
Rappresentazione delle tensioni

# **ANALISI DELLO STATO TENSIONALE**





## Rappresentazione delle tensioni

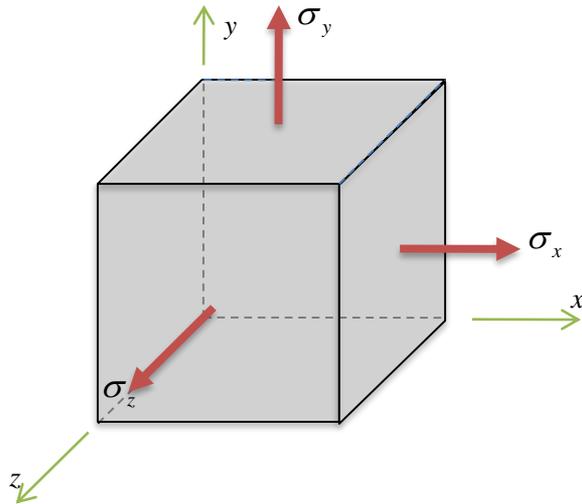


Al fine di esplicitare il significato fisico delle componenti del tensore di tensione, può essere utile una loro rappresentazione grafica su un elemento prismatico infinitesimo, nell'intorno del punto  $P$  in cui sono determinate le componenti di tensione, avente le facce ortogonali agli assi del sistema di riferimento.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



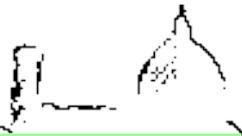
## Rappresentazione delle tensioni



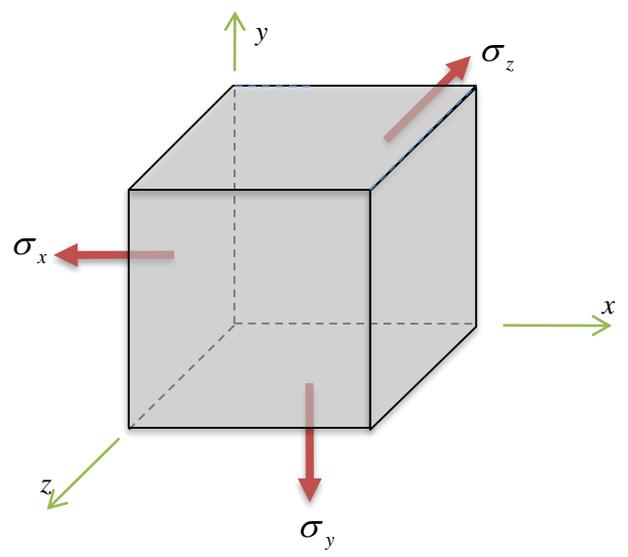
Al fine di esplicitare il significato fisico delle componenti del tensore di tensione, può essere utile una loro rappresentazione grafica su un elemento prismatico infinitesimo, nell'intorno del punto  $P$  in cui sono determinate le componenti di tensione, avente le facce ortogonali agli assi del sistema di riferimento.

Sulle facce del prisma di normale  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  ed  $\mathbf{e}_z$ , le tensioni normali sono positive se concordi con quelle riportate in figura.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



# Rappresentazione delle tensioni

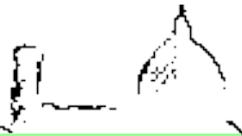


$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

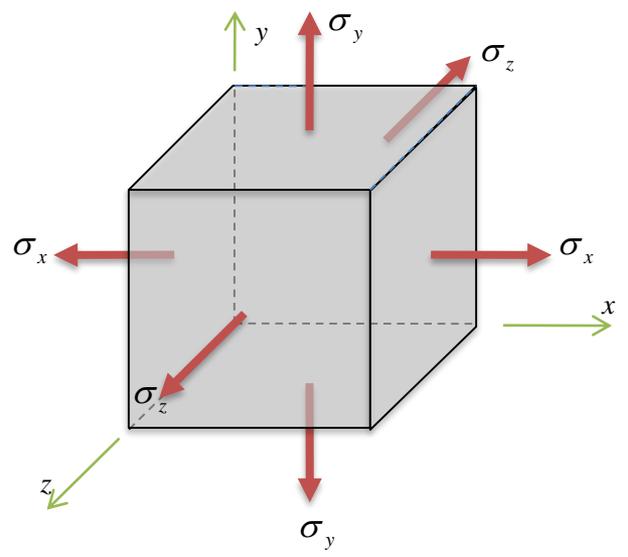
Al fine di esplicitare il significato fisico delle componenti del tensore di tensione, può essere utile una loro rappresentazione grafica su un elemento prismatico infinitesimo, nell'intorno del punto  $P$  in cui sono determinate le componenti di tensione, avente le facce ortogonali agli assi del sistema di riferimento.

Sulle facce del prisma di normale  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  ed  $\mathbf{e}_z$ , le tensioni normali sono positive se concordi con quelle riportate in figura.

Sulle facce del prisma di normale  $-\mathbf{e}_x$ ,  $-\mathbf{e}_y$  e  $-\mathbf{e}_z$ , le tensioni normali sono positive se concordi con quelle riportate in figura.



# Rappresentazione delle tensioni



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Al fine di esplicitare il significato fisico delle componenti del tensore di tensione, può essere utile una loro rappresentazione grafica su un elemento prismatico infinitesimo, nell'intorno del punto  $P$  in cui sono determinate le componenti di tensione, avente le facce ortogonali agli assi del sistema di riferimento.

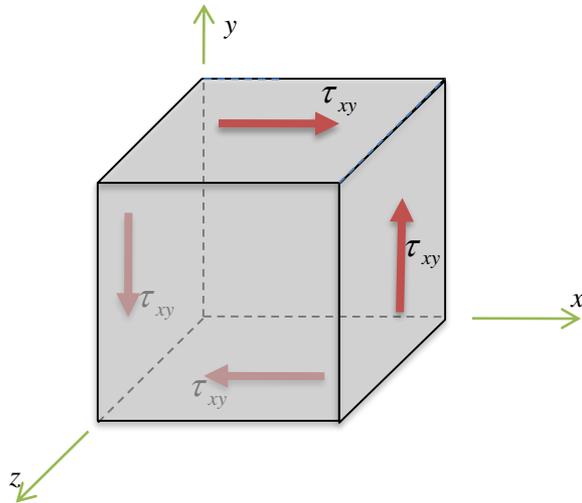
Sulle facce del prisma di normale  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  ed  $\mathbf{e}_z$ , le tensioni normali sono positive se concordi con quelle riportate in figura.

Sulle facce del prisma di normale  $-\mathbf{e}_x$ ,  $-\mathbf{e}_y$  e  $-\mathbf{e}_z$ , le tensioni normali sono positive se concordi con quelle riportate in figura.

Complessivamente, allora, sono positive le componenti di tensione normale indicate in figura.

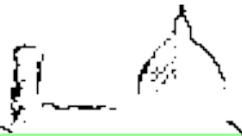


# Rappresentazione delle tensioni

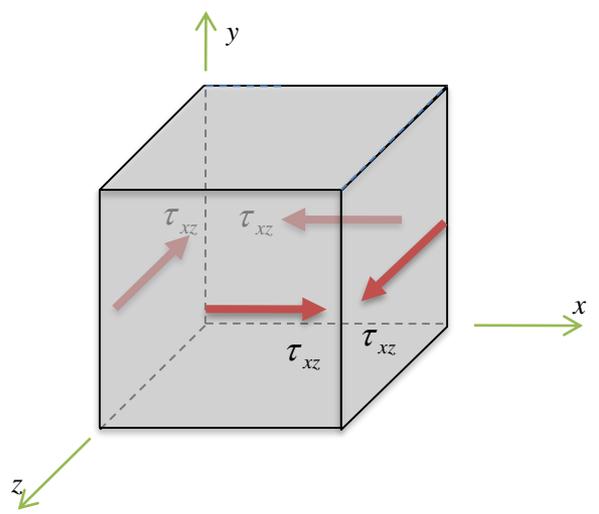


Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



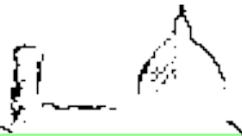
# Rappresentazione delle tensioni



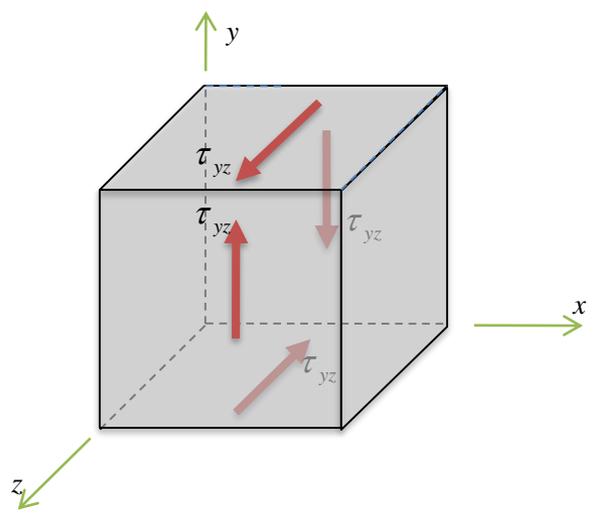
Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



# Rappresentazione delle tensioni



Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

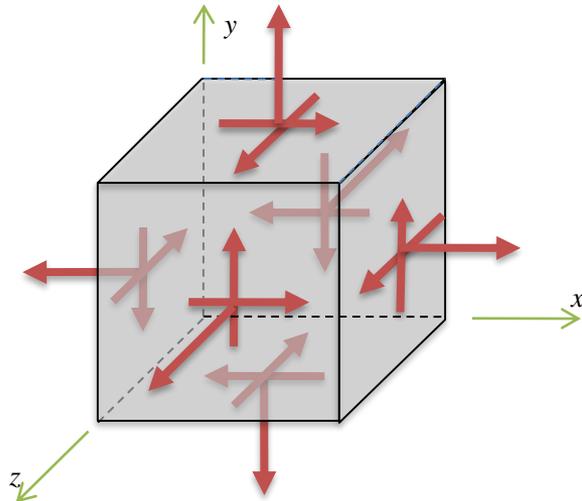
Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



# Rappresentazione delle tensioni



Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

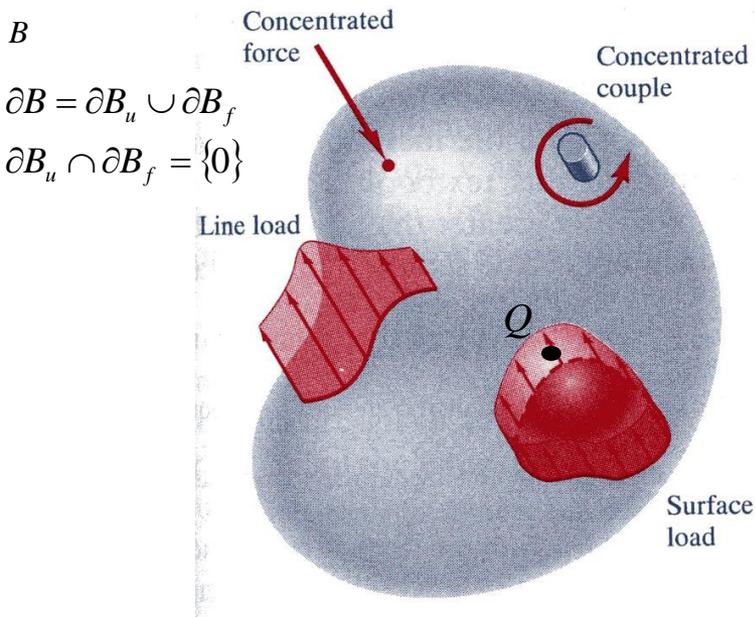
Le componenti di tensione tangenziale  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  sono positive se concordi con quelle indicate in figura.

Nello schema a fianco sono riportate tutte le componenti di tensione concordi con la convenzione positiva.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



## Equazioni di equilibrio di un mezzo continuo



Riassumendo, allora, si ha che un continuo è in equilibrio se e solo se sono soddisfatte tutte le seguenti condizioni:

-Equazioni indefinite di equilibrio

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall P \in \{B\}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$$

-Equazioni di equilibrio sulla frontiera

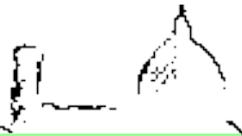
$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \forall Q \in \{\partial B_f\}$$

$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \quad \forall Q \in \{\partial B_u\}$$

-Equazioni di equilibrio globale

$$\int_B \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}(\mathbf{x})dA + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}(\mathbf{x})dA = \mathbf{0}$$

$$\int_B (\mathbf{x} - \mathbf{0}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \int_{\partial B_f} (\mathbf{x} - \mathbf{0}) \times \mathbf{p}(\mathbf{x})dA + \int_{\partial B_u} (\mathbf{x} - \mathbf{0}) \times \mathbf{r}(\mathbf{x})dA = \mathbf{0}$$



# Rem. Legame deformazioni spostamenti in notazione di Voigt

La relazione tra spostamenti e deformazioni può essere espressa in notazione matriciale (di Voigt) come segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in B_0$$

$$\{\underline{\underline{\varepsilon}}\} = [C] \mathbf{u}$$

N.B. la relazione  $\{\underline{\underline{\varepsilon}}\} = [C] \mathbf{u}$  non è da intendersi come semplice prodotto matriciale: l'operatore differenziale  $[C]$  (derivate) è applicato alle componenti del vettore spostamento  $\mathbf{u}$



# Equazioni di equilibrio in notazione di Voigt

Equazioni di equilibrio

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x - \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} - \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y - \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} - \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in B$$

$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$  In notazione di Voigt  $\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_{[\tilde{C}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}}_{\{\underline{\sigma}\}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

Eq. Di equilibrio in forma compatta

$$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{b} \quad \forall P \in B$$



## Analogia tra le equazioni di equilibrio e di congruenza

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}}_b \quad \longrightarrow \quad [C]\{\sigma\} = b \quad \forall P \in B$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}}_u \quad \longrightarrow \quad \{\varepsilon\} = [C]u \quad \forall P \in B$$

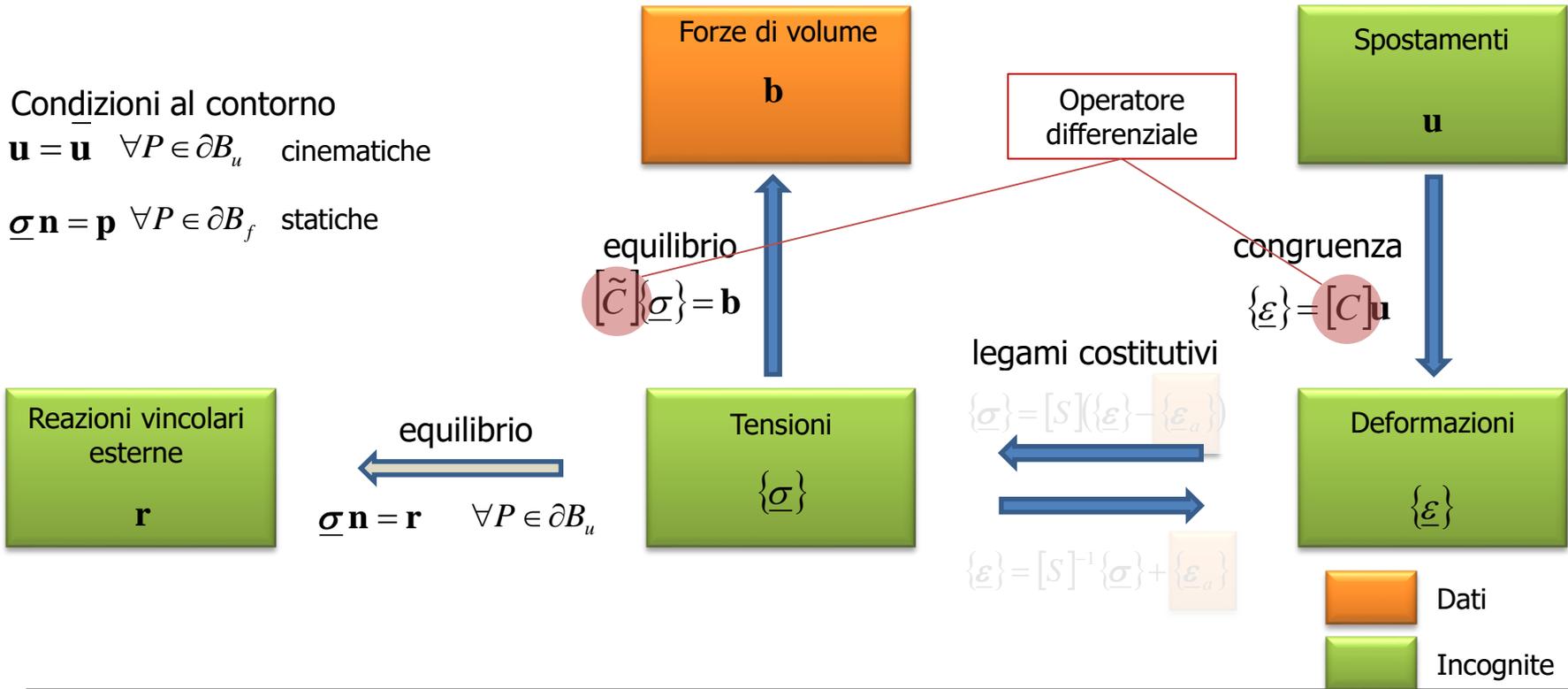


Facoltà di Architettura

# Il problema del solido elastico lineare isotropo

Schematizzazione del problema del solido elastico lineare

Condizioni al contorno  
 $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}} \quad \forall P \in \partial B_u$  cinematiche  
 $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \underline{\mathbf{p}} \quad \forall P \in \partial B_f$  statiche





# Rem. Il problema strutturale per i sistemi reticolari generici

$n$  numero di nodi  
 $b$  numero di aste  
 $v$  vincoli esterni  
 $f=gdl-v$   $gdl$  non vincolati esternamente

 Dati  
 Incognite

