Meccanica del continuo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Analisi dello stato tensionale

Calcolo delle tensioni normali massime e minime

Tensioni normali massime e minime

Sia noto il tensore di tensione $\underline{\sigma}$ per un certo punto materiale P di un continuo. Com'è ben noto, la componente di tensione normale relativa ad una generica giacitura di versore normale $\mathbf{n}$ si calcola mediante la seguente relazione

$$\sigma_n = (\underline{\sigma}\,\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}$$

Fra i valori di tensione normale relativi alle infinite giaciture passanti per il punto P, può essere necessario, ad esempio al fine di effettuare una eventuale verifica di resistenza, calcolare la massima tensione di trazione (valore massimo positivo) o di compressione (valore minimo perché negativo). Le giaciture su cui si hanno i valori estremi di tensione si dicono giaciture principali i versori ad esse normali si dicono direzioni principali di tensione ed i relativi valori di tensione normale si dicono tensioni principali.

Si può dimostrare che in corrispondenza di una giacitura principale le componenti tangenziali di tensione sono nulle per cui il vettore di tensione ha la forma:

$$\underline{\sigma}\,\mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n}$$

Dalla precedente relazione è evidente che i valori principali di tensione coincidono con gli autovalori del tensore di Cauchy, mentre le direzioni principali di tensione coincidono con i relativi autovettori.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Valori e direzioni principali di tensione

È ben noto che gli autovalori di un tensore si determinano risolvendo la sua equazione caratteristica

$$\det\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_n \underline{\mathbf{I}}\right) = 0$$

e l'autovettore relativo all'autovalore σ_n si calcola risolvendo il seguente sistema

$$\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_n \underline{\mathbf{I}}\right) \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Nelle precedenti relazioni $\underline{\mathbf{I}}$ indica il tensore identico.

Equazioni caratteristica:

$$\det\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_n \underline{\mathbf{I}}\right) = \sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \det\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

Esempio

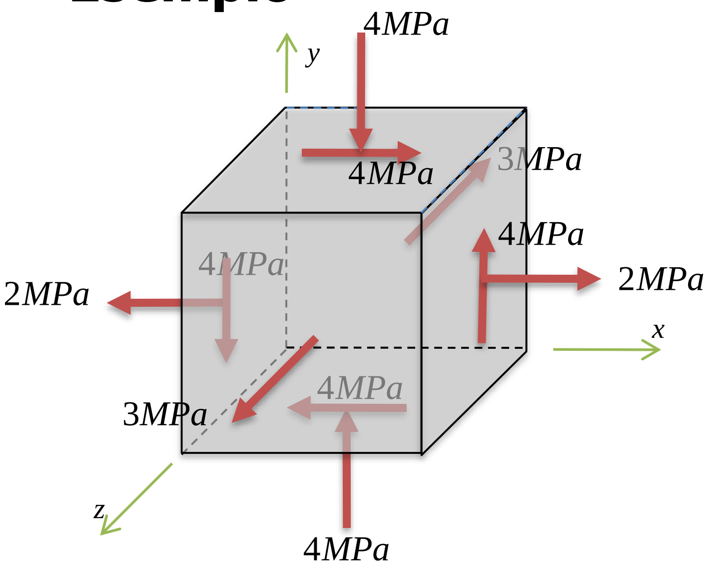
Si consideri che le componenti del tensore di tensione relative ad un certo punto materiale siano le seguenti

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} MPa$$

Si schematizzino le precedenti componenti di tensione e si calcolino i valori e le direzioni principali di tensione

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio



Le componenti del tensore di tensione in esame

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} MPa$$

corrispondono allo stato tensionale schematizzato in figura

Gli autovalori del tensore $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ si calcolano come segue

$$\det(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_n \underline{\mathbf{I}}) = -\sigma_n^3 + \sigma_n^2 + 30\sigma_n - 72 = 0$$

le radici della precedente equazione caratteristica sono le seguenti

$$\sigma_1 = 4MPa$$
$$\sigma_2 = 3MPa$$
$$\sigma_3 = -6MPa$$

La tensione normale massima presente nel punto materiale in esame è allora pari a $4MPa$, mentre la tensione minima (massima di compressione) è pari a $-6MPa$.

Esempio

Calcolo della direzione principale relativa all'autovalore $\sigma_1=4MPa$.

I coseni direttori relativi a tale direzione soddisfano le seguenti equazioni

$$\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\mathbf{I}}\right)\mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{0}$$

Esplicitamente si ha

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \sigma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ n_y^{(1)} \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} (2-\sigma_1)n_x^{(1)} + 4n_y^{(1)} = 0 \\ 4n_x^{(1)} - (4+\sigma_1)n_y^{(1)} = 0 \\ (3-\sigma_1)n_z^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni del precedente sistema sono linearmente dipendenti. Il sistema ammette allora infinite soluzioni

$$\begin{matrix} n_x^{(1)} = 2n_y^{(1)} \\ n_z^{(1)} = 0 \end{matrix} \rightarrow \mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\alpha$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio

Calcolo della direzione principale relativa all'autovalore $\sigma_2 = 3MPa$.

I coseni direttori relativi a tale direzione soddisfano le seguenti equazioni

$$(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_2 \underline{\mathbf{I}})\mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{0}$$

Esplicitamente si ha

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \sigma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ n_y^{(2)} \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} (2-\sigma_2)n_x^{(2)} + 4n_y^{(2)} = 0 \\ 4n_x^{(2)} - (4+\sigma_2)n_y^{(2)} = 0 \\ (3-\sigma_2)n_z^{(2)} = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni del precedente sistema sono linearmente indipendenti, mentre la terza è indeterminata. Il sistema ammette allora infinite soluzioni

$$\begin{matrix} n_x^{(2)} = n_y^{(2)} = 0 \\ n_z^{(2)} = ind \end{matrix} \rightarrow \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\beta$$

Esempio

Calcolo della direzione principale relativa all'autovalore σ_3=-6MPa.

I coseni direttori relativi a tale direzione soddisfano le seguenti equazioni

$$\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_3 \underline{\mathbf{I}}\right)\mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{0}$$

Esplicitamente si ha

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \sigma_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} n_x^{(3)} \\ n_y^{(3)} \\ n_z^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \left(2-\sigma_3\right)n_x^{(3)} + 4n_y^{(3)} = 0 \\ 4n_x^{(3)} - \left(4+\sigma_3\right)n_y^{(3)} = 0 \\ \left(3-\sigma_3\right)n_z^{(3)} = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni del precedente sistema sono linearmente dipendenti. Il sistema ammette allora infinite soluzioni

$$\begin{matrix} n_y^{(3)} = -2n_x^{(3)} = 0 \\ n_z^{(3)} = 0 \end{matrix} \rightarrow \mathbf{n}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\gamma$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio

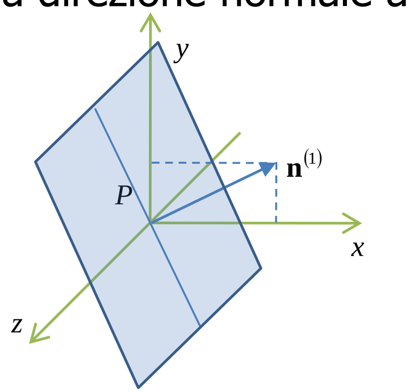
Riassumendo, i valori e le direzioni principali di tensione per il tensore

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} MPa$$

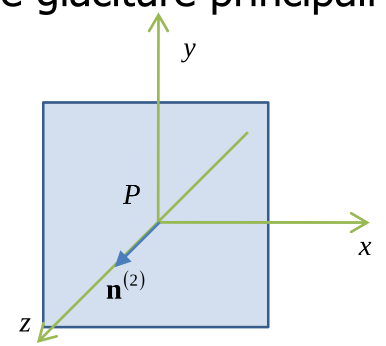
sono i seguenti

$$\sigma_1 = 4MPa \rightarrow \mathbf{n}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\alpha \qquad \sigma_2 = 3MPa \rightarrow \mathbf{n}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\beta \qquad \sigma_3 = -6MPa \rightarrow \mathbf{n}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\gamma$$

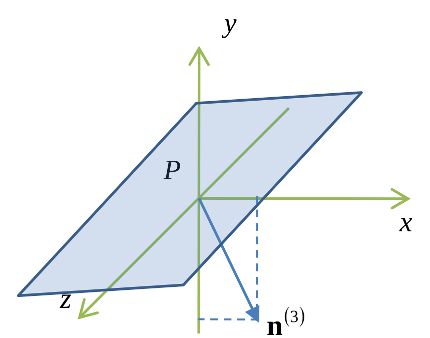
Si osservi che non tutti i precedenti vettori sono normalizzati. In ogni caso essi indicano la direzione normale alle giaciture principali



Giacitura associata σ_1



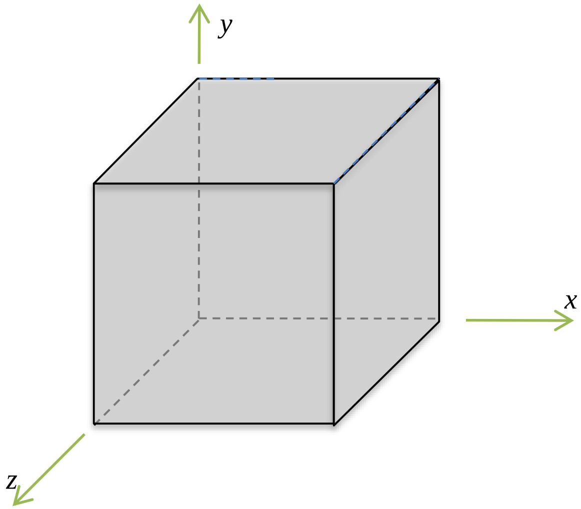
Giacitura associata σ_2



Giacitura associata σ_3

È immediato verificare che le direzioni principali sono fra loro ortogonali

Esercizio

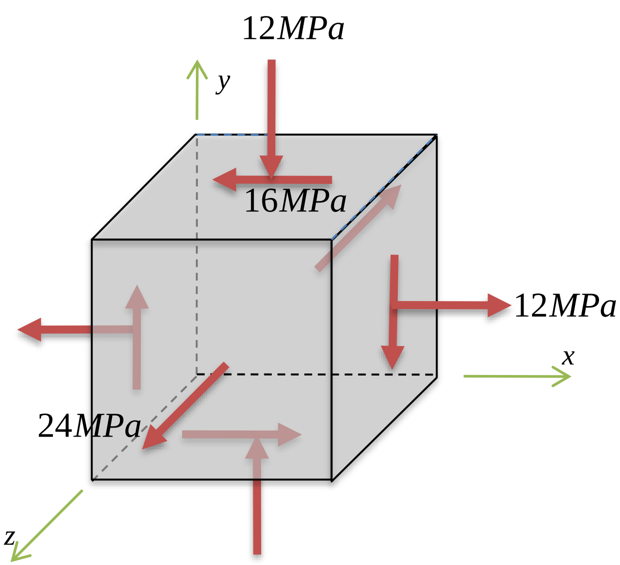


Si consideri che le componenti del tensore di tensione relative ad un certo punto materiale siano le seguenti

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} MPa$$

Si schematizzino le precedenti componenti di tensione sulle facce dell'elemento di riferimento in figura e si calcolino i valori e le direzioni principali di tensione

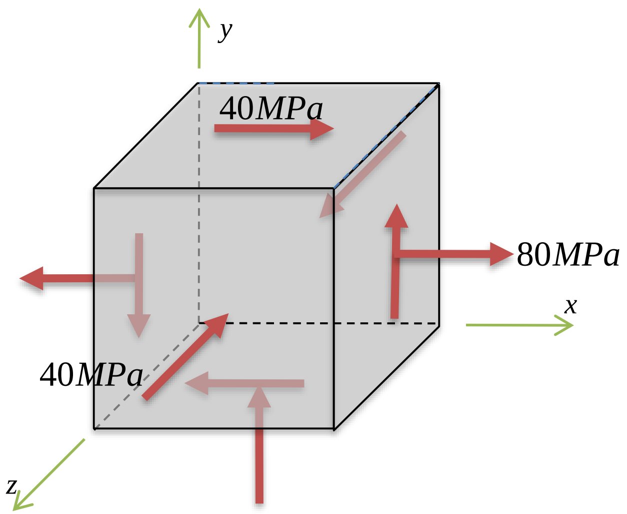
Esercizio



Si determinino le componenti del tensore di tensione relative allo schema riportato in figura e si calcolino i valori e le direzioni principali di tensione

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio



Si determinino le componenti del tensore di tensione relative allo schema riportato in figura e si calcolino i valori e le direzioni principali di tensione

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831