Elementi di meccanica del continuo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Gli stati tensionali piani: il metodo della circonferenza di Mohr

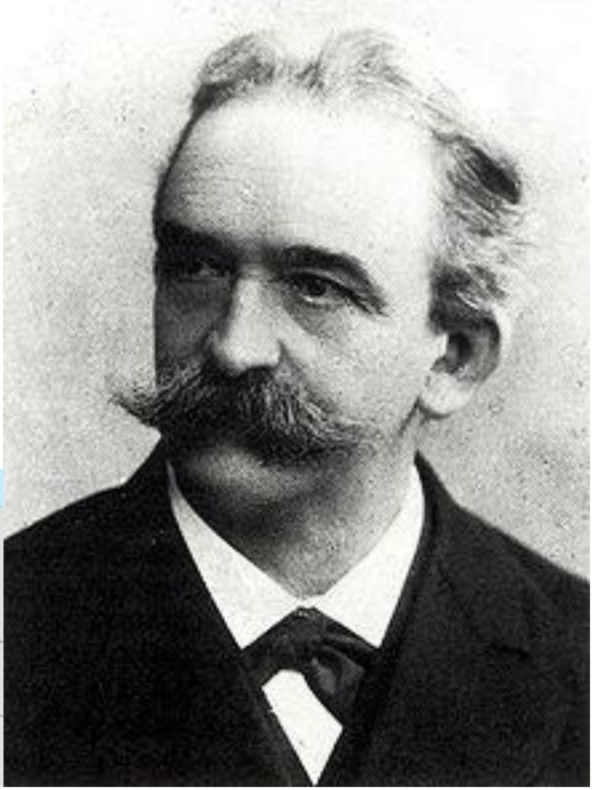
Sommario

Nella scorsa lezione sono stati descritti degli stati tensionali particolari che presentano componenti di tensione non nulla in corrispondenza di un piano, mentre tutte le altre componenti di tensione sono nulle. Tali stati tensionali vengono detti piani. Sono state determinate delle espressioni esplicite che permettono di calcolare le componenti di tensione relative ad una generica giacitura ortogonale al piano di tensione. È stato mostrato inoltre come calcolare, per tali stati tensionali, i valori e le direzioni principali di tensione.

Nella presente lezione ci riferiremo ancora agli stati tensionali piani. In particolare sarà descritta una procedura grafica mediante la quale è possibile determinare le componenti di tensione su una generica giacitura ortogonale al piano delle tensioni nonché i valori e le direzioni principali di tensione. Tale procedura è detta "della circonferenza di Mohr".

Christian Otto Mohr

- N. Wesselburen, 8 ottobre 1835
- M. Dresda, 2 ottobre 1918
- frequentò la Scuola Politecnica di Hannover
- dal 1855 lavorò come ingegnere ferroviario; progettò alcuni famosi ponti facendo uso delle travature reticolari in acciaio
- 1867: divenne professore di Meccanica al Politecnico di Stoccarda
- 1873: professore al Politecnico di Dresda
- 1874: formalizzò l'idea di struttura staticamente determinata
- 1882: sviluppò il metodo del "cerchio di Mohr"
- si ritirò dalla vita pubblica nel 1900

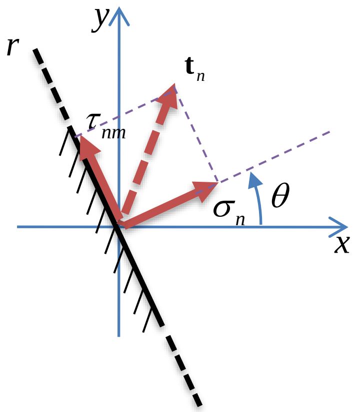


Introduzione

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si assuma che lo stato tensionale relativo ad un punto materiale di un continuo sia descritto dalle seguenti componenti di tensione

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Si è visto nella scorsa lezione che, per tale stato tensionale, le componenti di tensione relative ad una giacitura avente versore normale $\mathbf{n}$ contenuto nel piano delle tensioni possono essere determinate come segue



θ positivo se antiorario

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{nm} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Le precedenti componenti di tensione sono positive se concordi con quanto indicato in figura.

La circonferenza di Mohr

Detta σ_{med} la media fra le tensioni normali σ_x e σ_y

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{1}$$

le precedenti relazioni possono essere riscritte come segue

$$\begin{aligned} \sigma_n - \sigma_{med} &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{nm} &= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \tag{2}$$

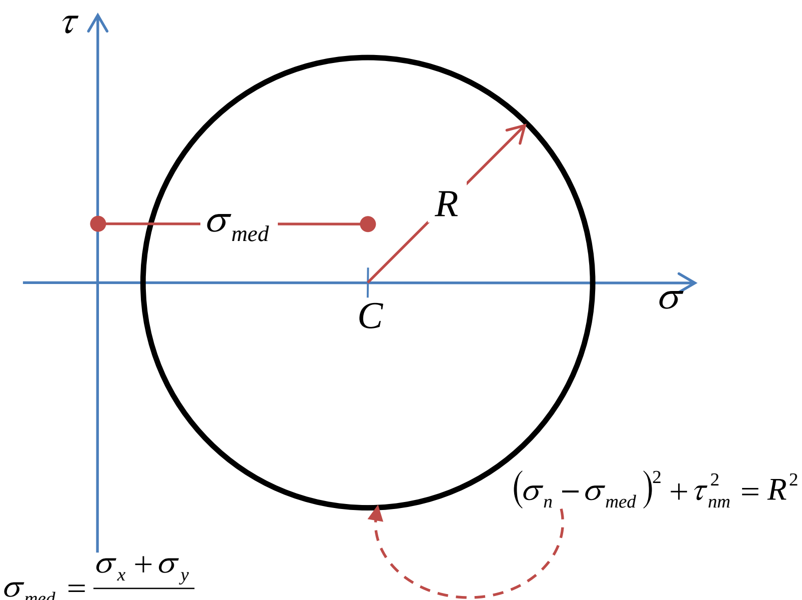
Elevando al quadrato le precedenti relazioni e sommando membro a membro si ottiene

$$(\sigma_n - \sigma_{med})^2 + \tau_{nm}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \rightarrow (\sigma_n - \sigma_{med})^2 + \tau_{nm}^2 = R^2 \tag{3}$$

dove è stato posto

$$R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{4}$$

La circonferenza di Mohr



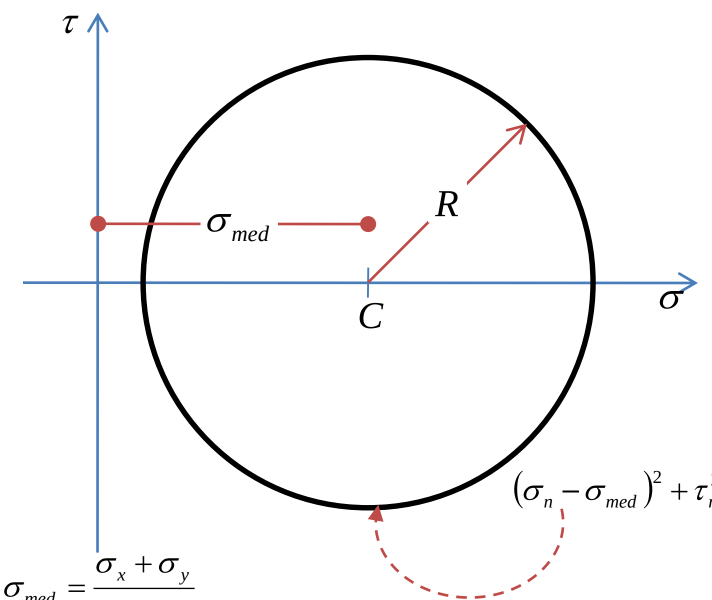
$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

L'uguaglianza *(3)* rappresenta l'equazione di un cerchio sul piano (σ,τ), detto piano di Mohr, avente centro C di coordinate $(\sigma_{med},0)$ e raggio pari ad R come indicato in figura. Pertanto le *(2)* rappresentano le equazioni parametriche di una circonferenza sul piano (σ,τ). Per tale motivo, ad ogni punto della circonferenza in figura può essere associata una ed una sola coppia di componenti di tensione relative ad una giacitura inclinata di θ rispetto all'asse x. Esisterà allora anche un punto X sulla circonferenza in figura rappresentativo dello stato tensionale relativo alla giacitura di normale $\mathbf{e}_x$, un punto Y relativo alla giacitura di normale $\mathbf{e}_y$ e due punti P_1 e P_2 relativi ai valori ed alle direzioni principali di tensione.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr – "convenzione di Mohr"

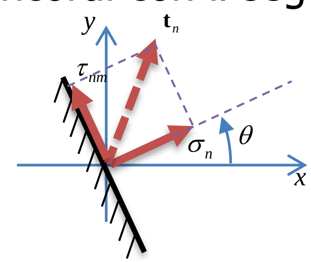


$$(\sigma_n - \sigma_{med})^2 + \tau_{nm}^2 = R^2$$

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

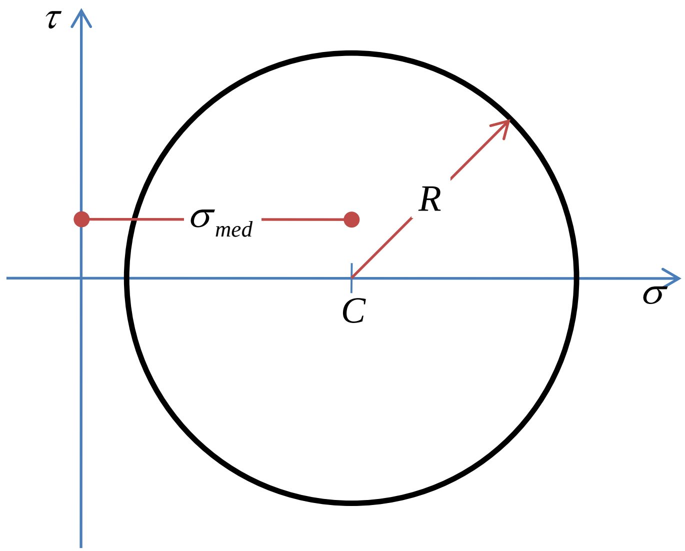
Come si è visto precedentemente, le componenti di tensione normale e tangenziale calcolate attraverso le (2) sono positive se concordi con il seguente schema



La precedente figura definisce allora la "*convenzione di Mohr*" per le componenti di tensione rappresentate <u>sul piano di Mohr</u> (σ, τ), dove <u>si assumono positive le tensioni normali di trazione e le tensioni tangenziali che "tendono a fare ruotare la giacitura in esame in senso antiorario" ossia sono concordi con un vettore ottenuto ruotando in senso antiorario la componente di tensione normale positiva</u>.

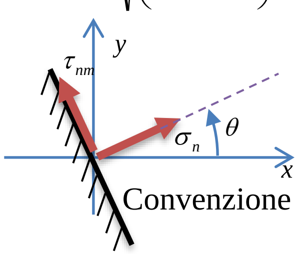
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

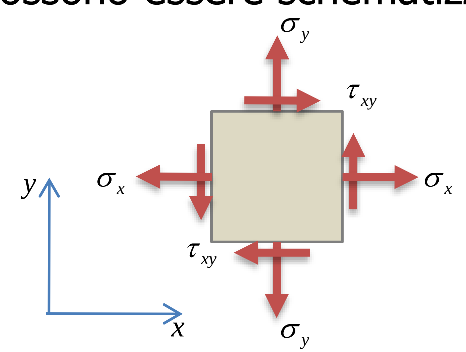


Convenzione di Mohr

Come si è detto inizialmente, si ipotizza che lo stato tensionale sia rappresentato dalle seguenti componenti di tensione

$$\underline{\sigma}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

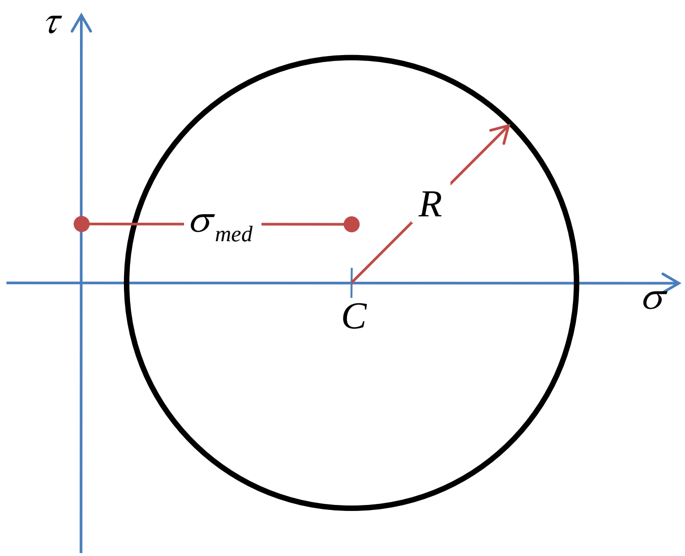
Esse possono essere schematizzate come segue



Di seguito si vogliono determinare sulla circonferenza di Mohr i punti rappresentativi dello stato tensionale presente sulle giaciture normali agli assi del sistema di riferimento utilizzato

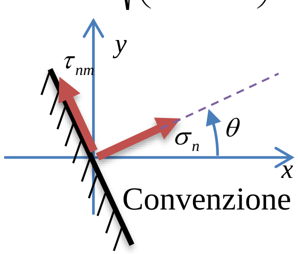
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr



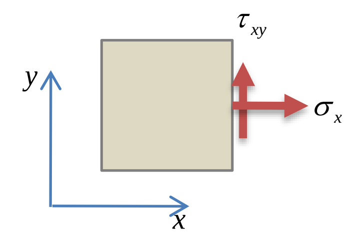
$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

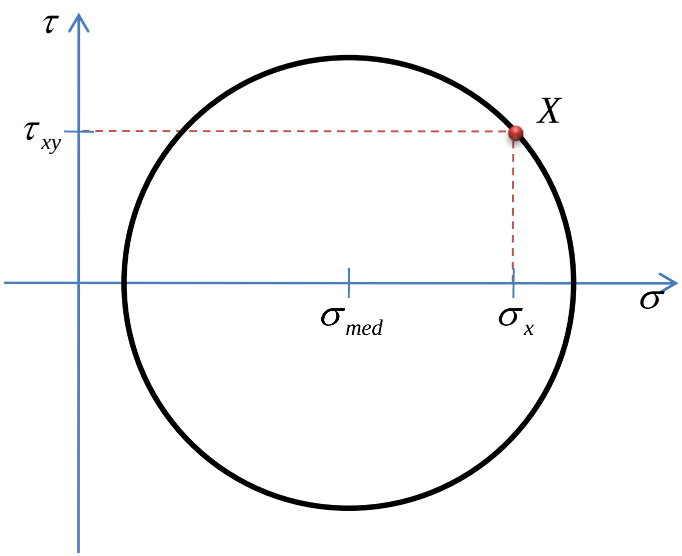


Convenzione di Mohr

In particolare, sulla giacitura di normale x sono presenti le seguenti componenti di tensione (si ipotizza che tutte le componenti del tensore di tensione siano positive)

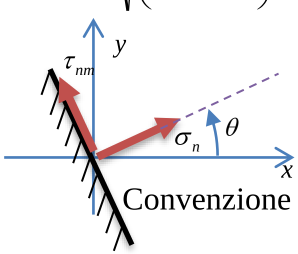


La circonferenza di Mohr



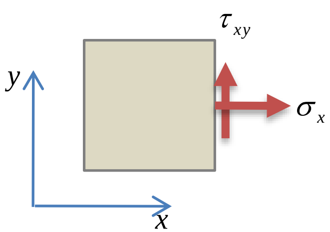
$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Convenzione di Mohr

In particolare, sulla giacitura di normale x sono presenti le seguenti componenti di tensione (si ipotizza che tutte le componenti del tensore di tensione siano positive)

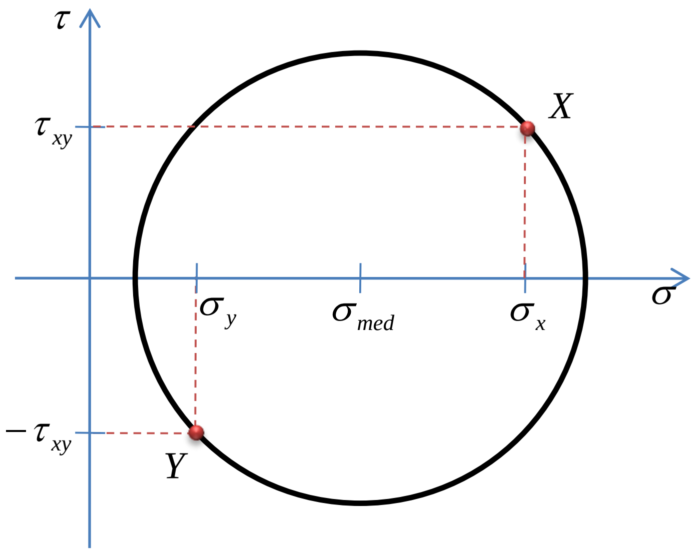


La componente normale è di trazione e la componente tangenziale fa "ruotare" il concio di riferimento in senso antiorario per cui sono entrambe concordi con la convenzione di Mohr. Il punto X sul piano di Mohr, rappresentativo di tali componenti di tensione, è allora il seguente

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

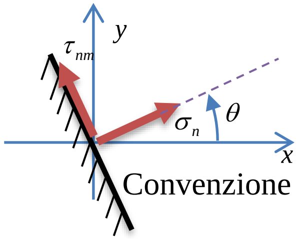
La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

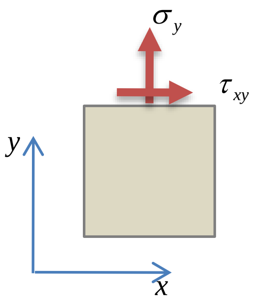
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$



Convenzione di Mohr

Le componenti di tensione presenti sulla giacitura di normale y sono invece le seguenti

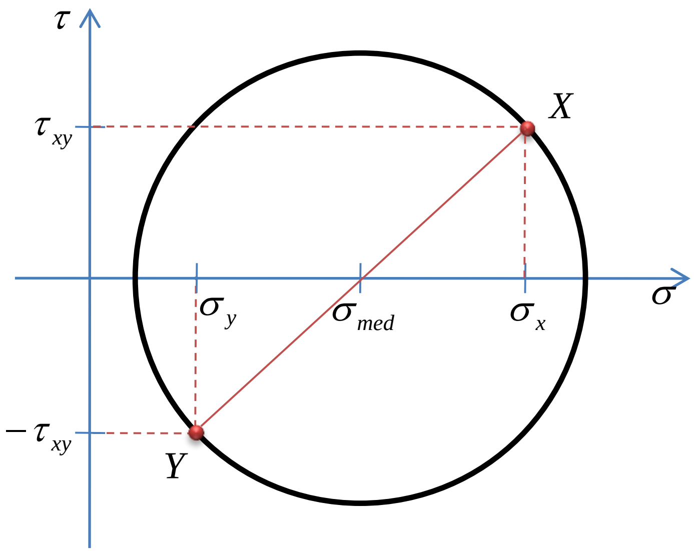


La componente normale è di trazione (concorde con la convenzione di Mohr) e la componente tangenziale fa "ruotare" il concio di riferimento in senso orario per cui è discorde con la convenzione di Mohr. Il punto Y sul piano di Mohr rappresentativo di tali componenti di tensione è allora il seguente

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr

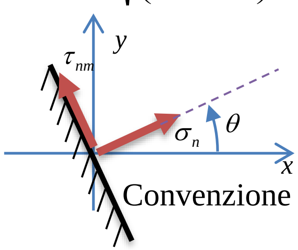


$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

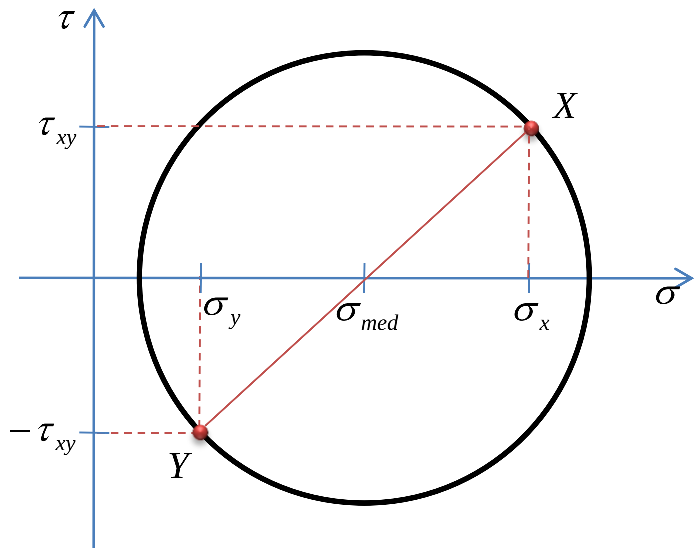
$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$



Convenzione di Mohr

È facile verificare che i punti X ed Y prima determinati sul piano di Mohr sono diametralmente opposti.

La circonferenza di Mohr

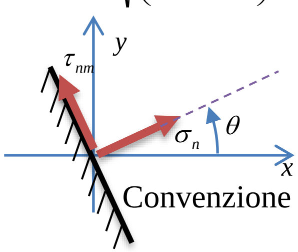


$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

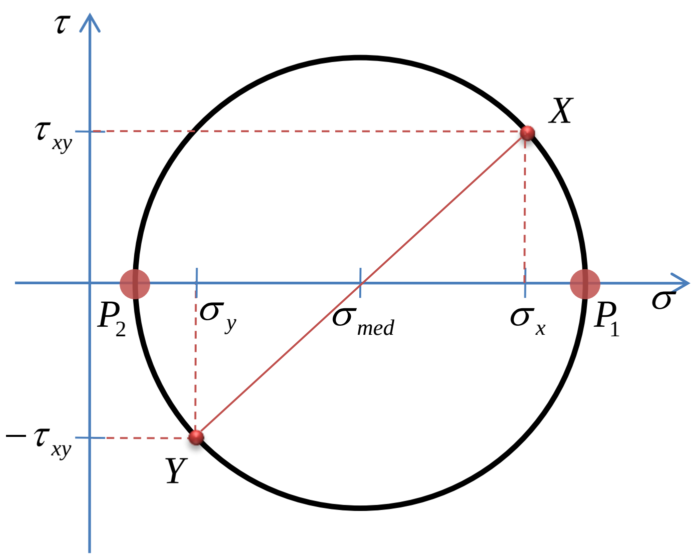


Convenzione di Mohr

Come abbiamo detto in precedenza, i punti della circonferenza di Mohr rappresentano <u>tutti e soli</u> gli stati tensionali relativi ad una generica giacitura passante per il punto in esame.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr

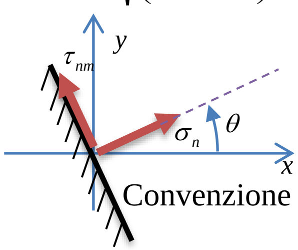


$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$



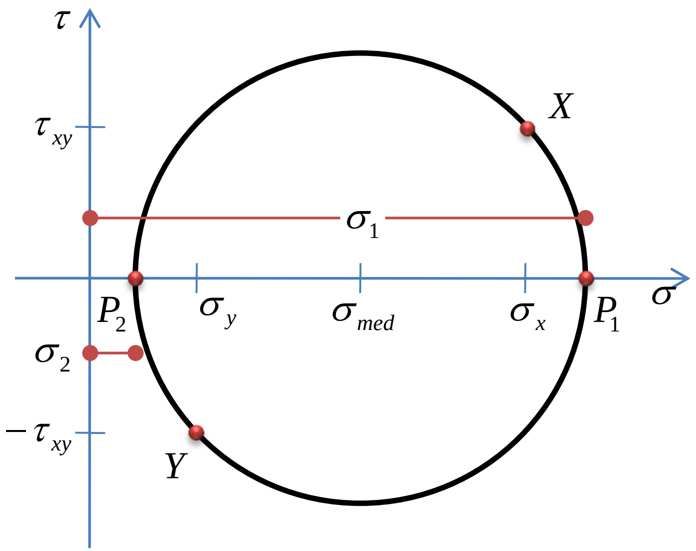
Convenzione di Mohr

Come abbiamo detto in precedenza, i punti della circonferenza di Mohr rappresentano tutti e soli gli stati tensionali relativi ad una generica giacitura passante per il punto in esame.

Non esistono allora giaciture aventi valori di tensione normale maggiori o minori dei punti P_1 e P_2 evidenziati in figura.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr

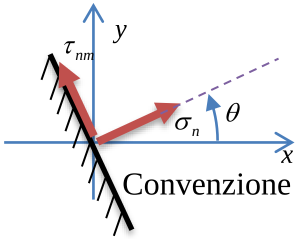


$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$



Convenzione di Mohr

Come abbiamo detto in precedenza, i punti della circonferenza di Mohr rappresentano <u>tutti e soli</u> gli stati tensionali relativi ad una generica giacitura passante per il punto in esame.

Non esistono allora giaciture aventi valori di tensione normale maggiori o minori dei punti P_1 e P_2 evidenziati in figura.

Tali punti allora rappresentano i <u>valori principali</u> di tensione presenti nel punto materiale in esame. Si ha infatti

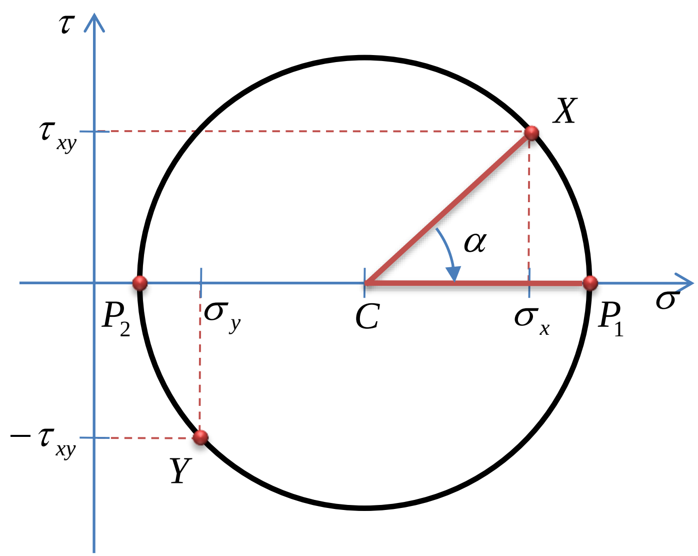
$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Essi coincidono con quelli ricavati analiticamente

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

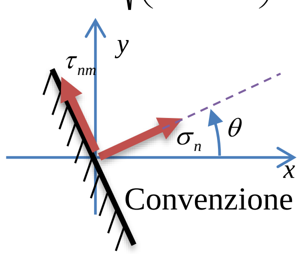
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$



Convenzione di Mohr

Inoltre, la tangente dell'angolo α che il segmento CX deve percorrere <u>in senso orario</u> per sovrapporsi al segmento CP_1 è pari a

$$\tan\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{med}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan 2\theta_1$$

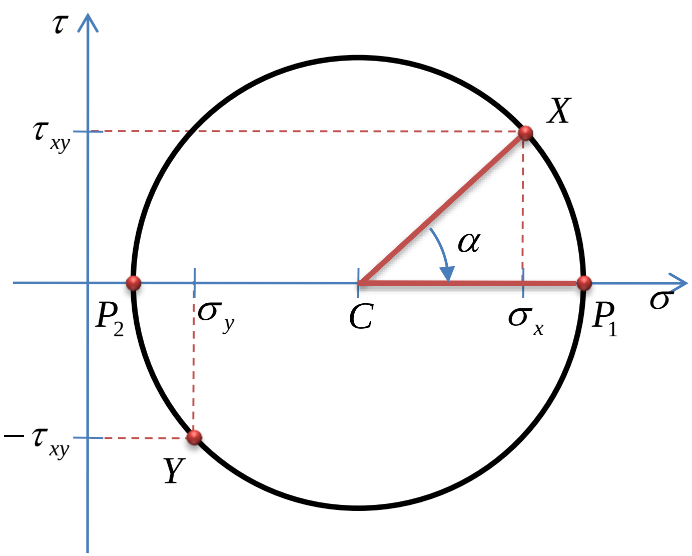
Il precedente valore è pari alla tangente di $2\theta_1$, dove θ_1 è l'angolo di cui l'asse x deve ruotare <u>in senso antiorario</u> per sovrapporsi alla direzione principale corrispondente al valore massimo di tensione (vedi lezione precedente). Pertanto si ha

$$\theta_1 = -\frac{\alpha}{2}$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che gli angoli α e θ_1 sono discordi.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

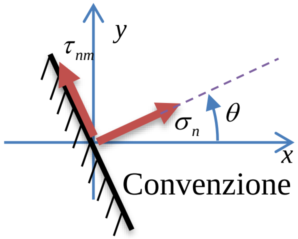
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

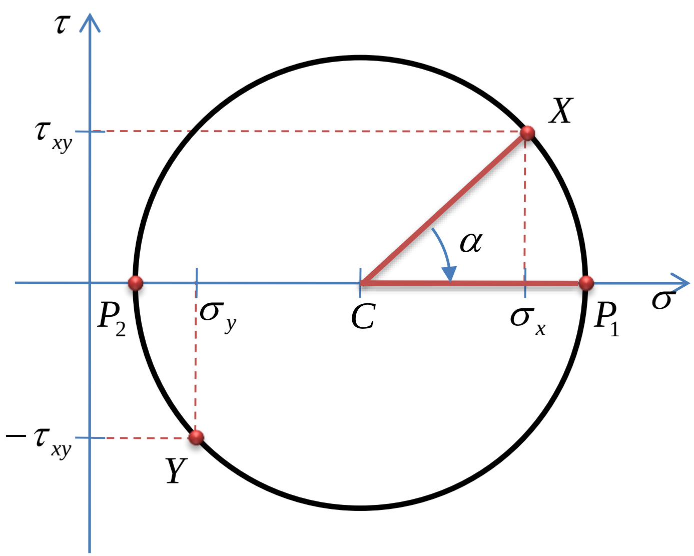


Convenzione di Mohr

Come si è visto nelle precedenti lezioni, l'angolo (positivo se orario) che l'asse x deve percorrere per sovrapporsi alla normale alla giacitura corrispondente alla tensione principale minima è pari a

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

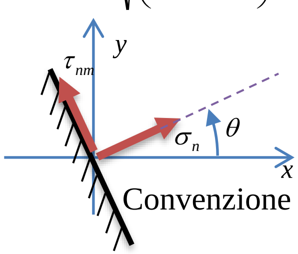
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

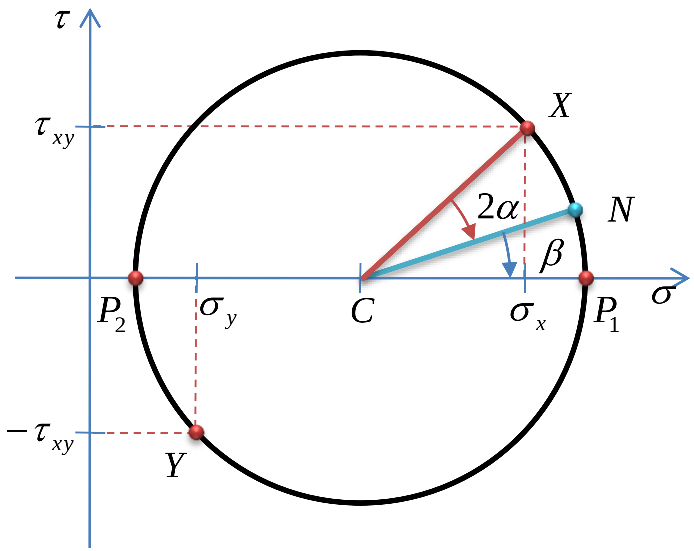


Convenzione di Mohr

A questo punto è stato mostrata la relazione che esiste tra *alcuni punti* caratteristici della circonferenza di Mohr e le componenti di tensione presenti nel punto materiale in esame relative a *particolari giaciture*.

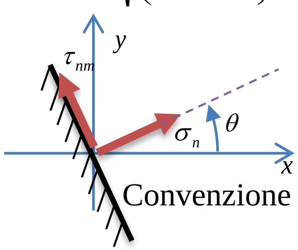
Di seguito sarà individuata la giacitura corrispondente alle componenti di tensione relative ad un generico punto appartenente alla circonferenza di Mohr.

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Convenzione di Mohr

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$
$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$
$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$
$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$
$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Si consideri un generico punto N appartenente alla circonferenza di Mohr avente le seguenti coordinate

$$N \equiv (\sigma_n, \tau_{nm})$$

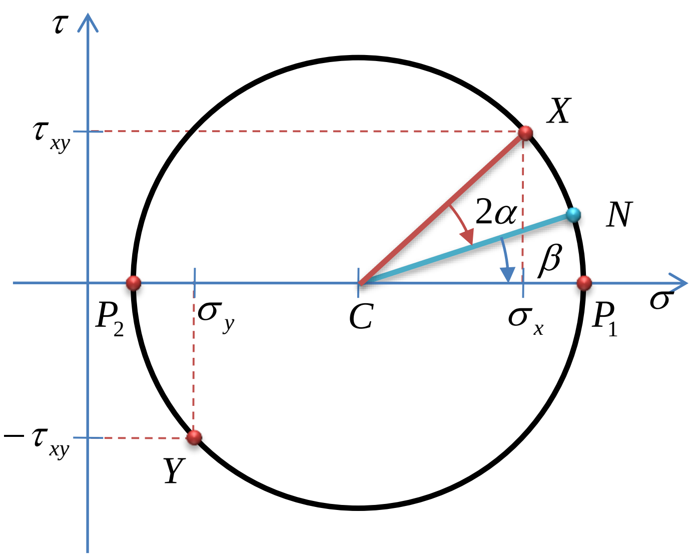
sia 2α l'angolo di cui il segmento CX deve ruotare in senso orario per sovrapporsi al segmento CN e β l'angolo compreso tra i segmenti CN e CP_1.

Le coordinate del punto N in esame si calcolano come segue

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{med} + R\cos\beta \\ \tau_{nm} &= R\sin\beta \end{aligned} \qquad (5)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

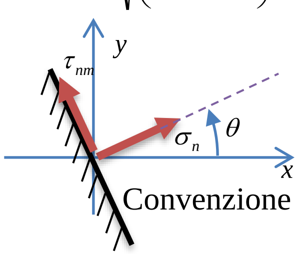
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Convenzione di Mohr

È facile verificare che valgono le seguenti relazioni

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = R\cos(2\alpha + \beta)$$

$$\tau_{xy} = R\sin(2\alpha + \beta)$$

Utilizzando le formule di addizione del seno e del coseno si ha

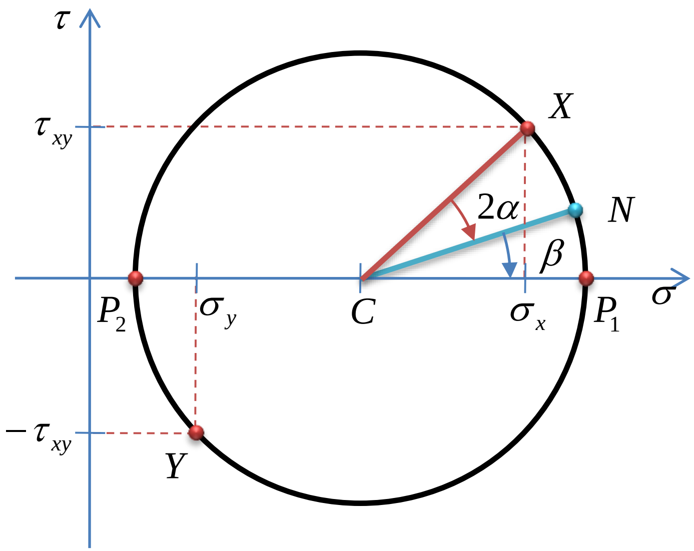
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = R(\cos 2\alpha \cdot \cos\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin\beta)$$

$$\tau_{xy} = R(\sin 2\alpha \cdot \cos\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin\beta)$$

Moltiplicando la prima equazione per $\cos 2\alpha$ e la seconda per $\sin 2\alpha$ e sommando membro a membro si ha

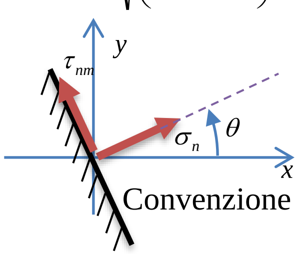
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha = R\cos\beta$$

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Convenzione di Mohr

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Sostituendo la precedente relazione nella prima delle *(5)* si ottiene

$$\sigma_n = \sigma_{med} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

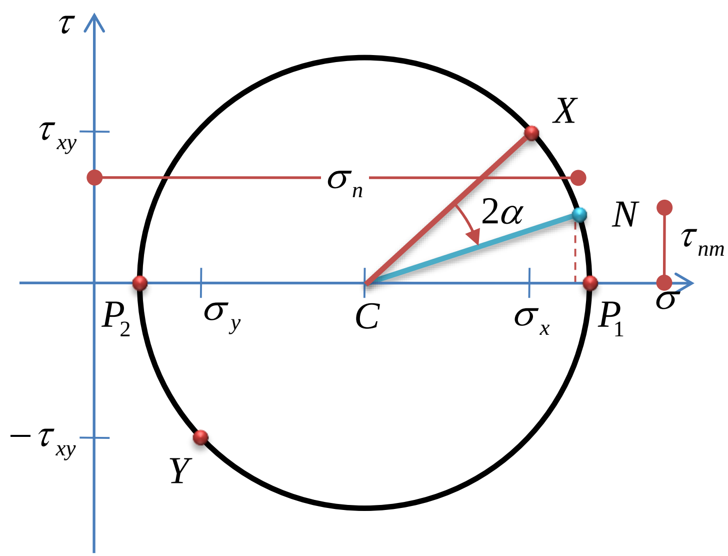
Attraverso una procedura analoga, dalla seconda delle *(5)* si ha

$$\tau_{nm} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

Tali relazioni coincidono con le formule di trasformazione delle tensioni per gli stati tensionali piani determinate nella precedente lezione.

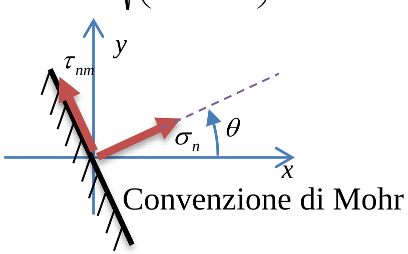
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La circonferenza di Mohr



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

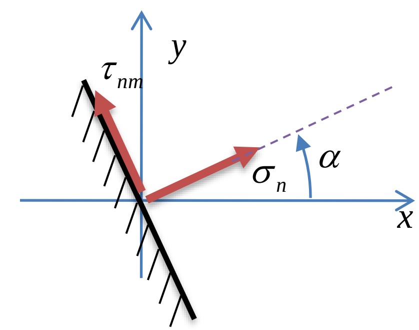
$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Per quanto ottenuto nella precedente slide, le coordinate di un generico punto N sulla circonferenza di Mohr, ottenuto ruotando il segmento CX di 2α in senso orario, coincidono con le componenti di tensione presenti su una giacitura la cui normale si ottiene ruotando l'asse x in senso antiorario di un angolo pari ad α.



I segni delle componenti di tensione così determinate sono ovviamente in accordo con la convenzione di Mohr

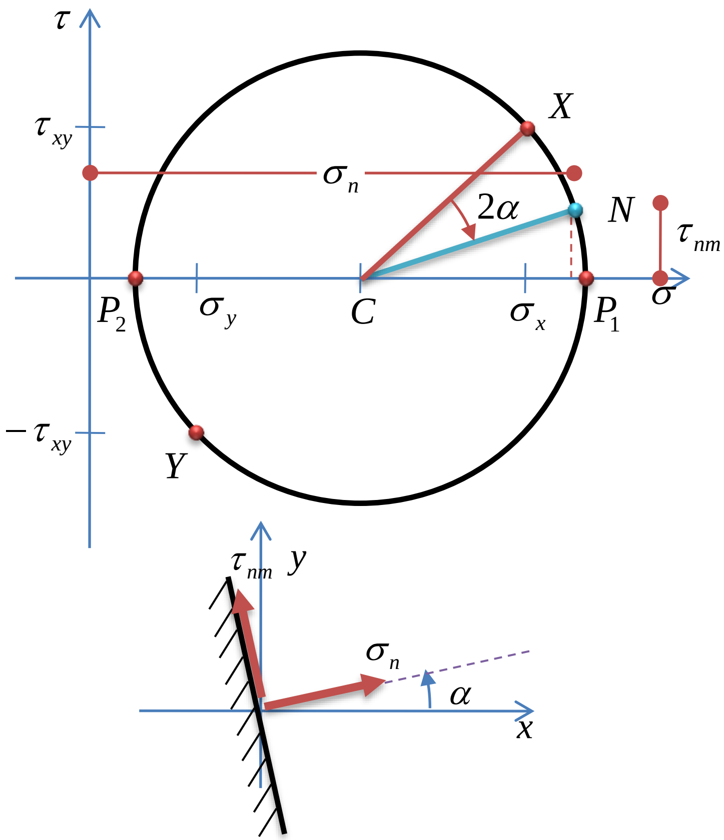
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

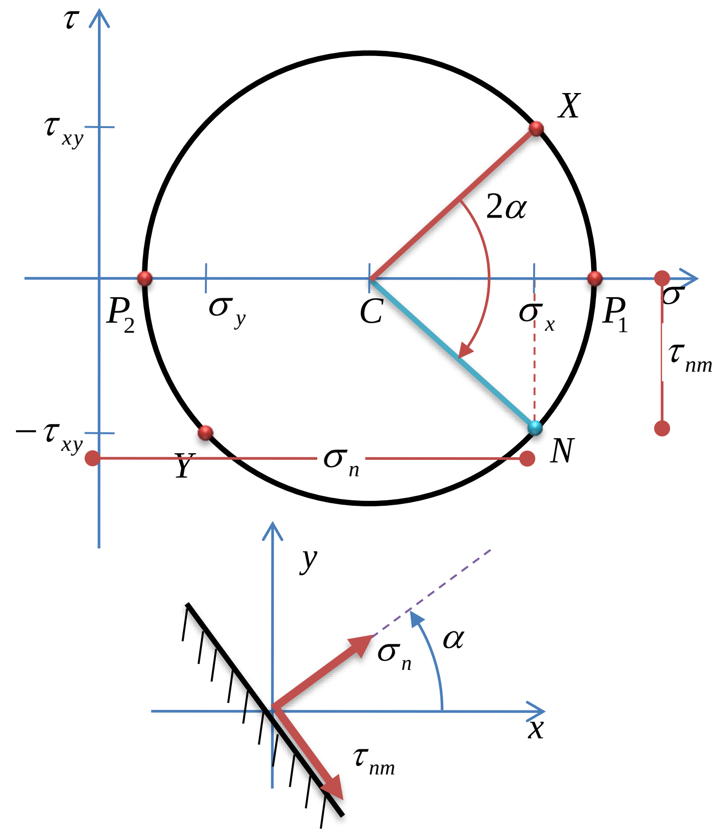
Il metodo della circonferenza di Mohr

Esemplificazioni

La circonferenza di Mohr – esempi

A titolo esemplificativo si schematizzano le componenti di tensione e le giaciture corrispondenti ad alcuni punti individuati sulla circonferenza di Mohr

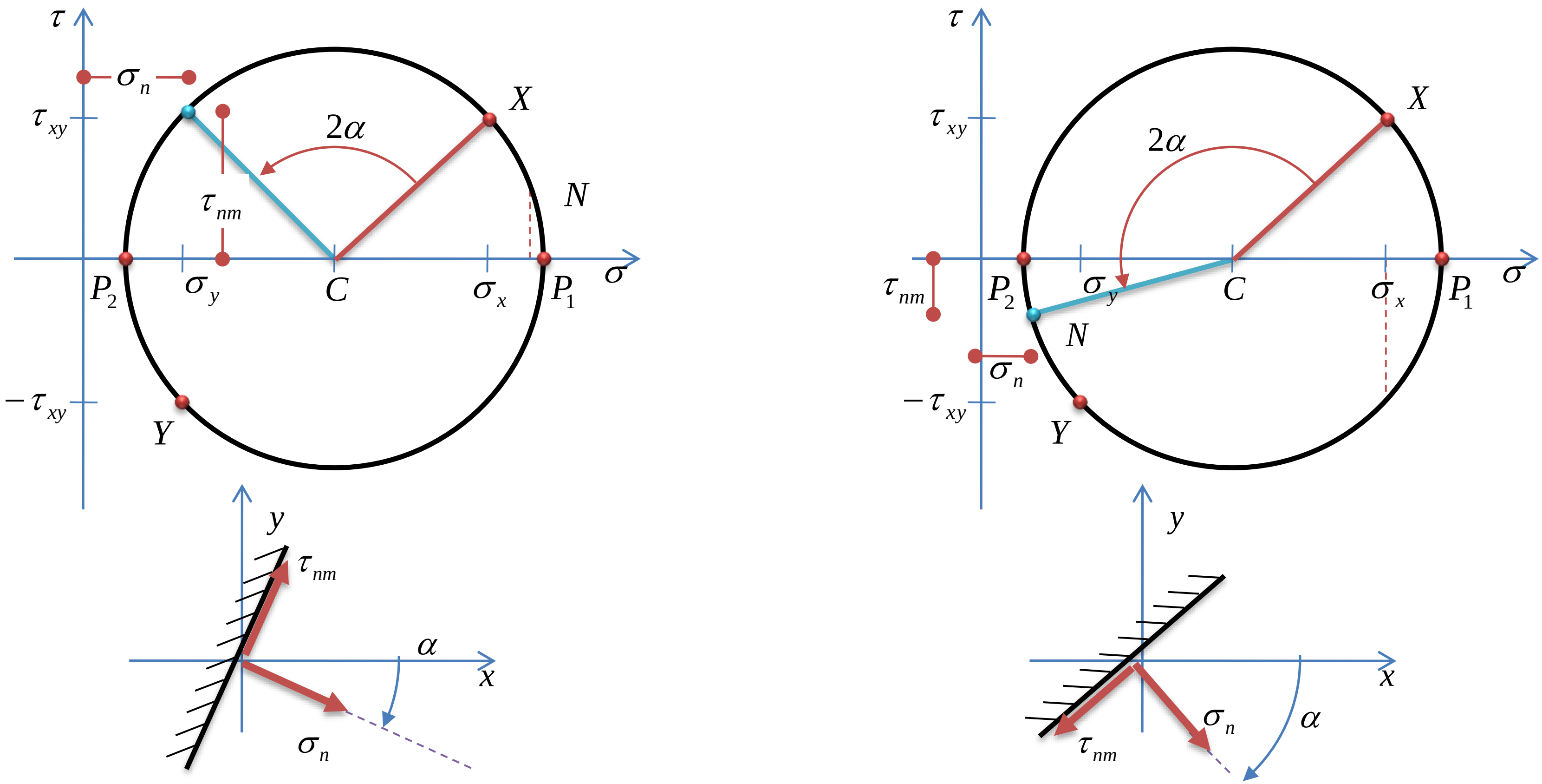




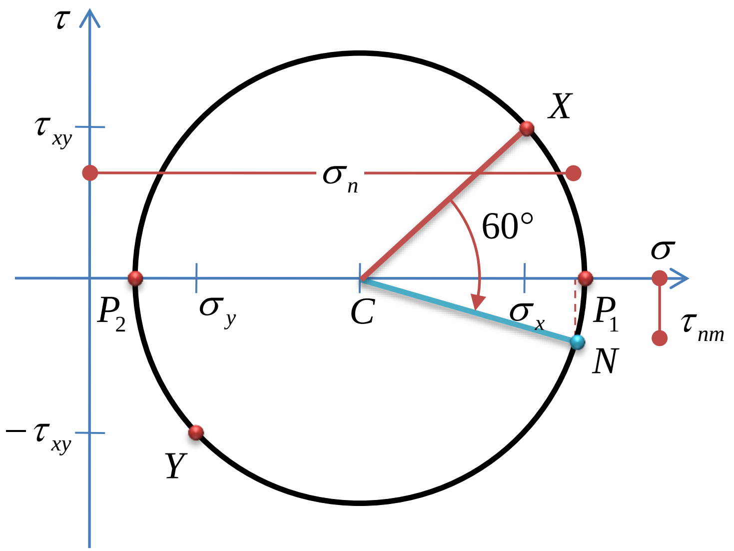
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

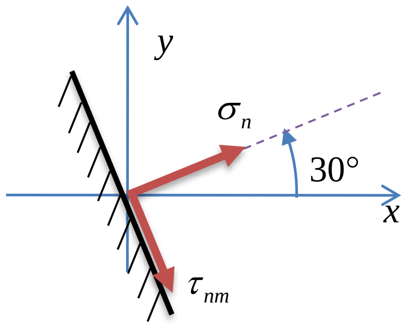
La circonferenza di Mohr – esempi

A titolo esemplificativo si schematizzano le componenti di tensione e le giaciture corrispondenti ad alcuni punti individuati sulla circonferenza di Mohr



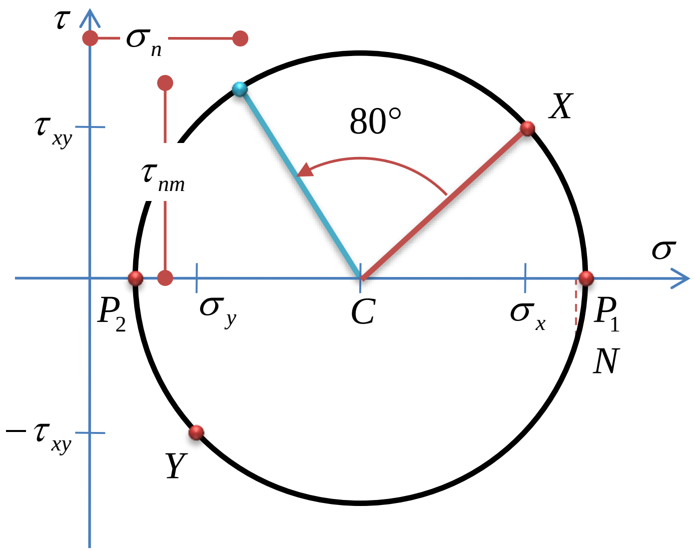
La circonferenza di Mohr – esempi

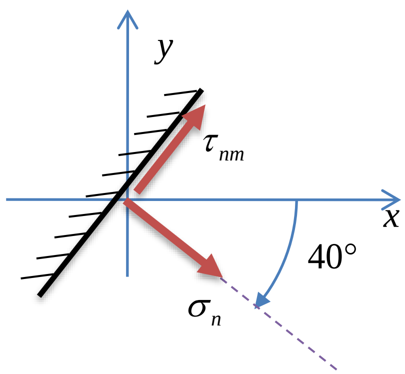




Le componenti di tensione presenti sulla giacitura la cui normale è ruotata di $30°$ in senso antiorario rispetto all'asse x coincidono con le coordinate del punto individuato sulla circonferenza di Mohr ruotando il segmento CX di $60°$ in senso orario.

La circonferenza di Mohr – esempi





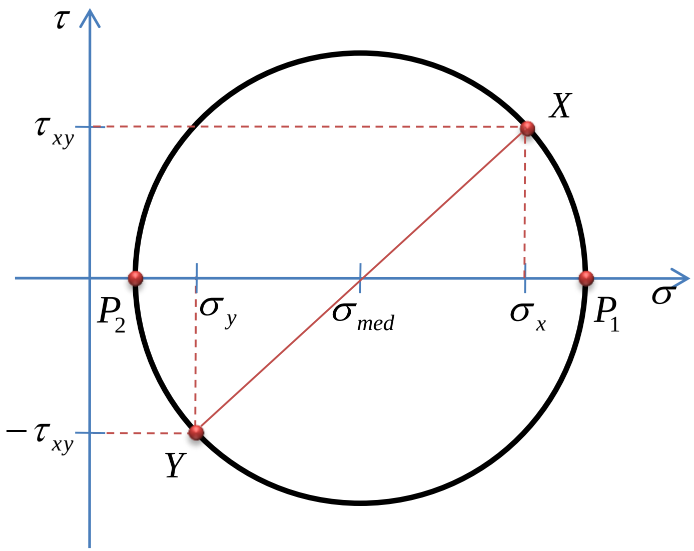
Le componenti di tensione presenti sulla giacitura la cui normale è ruotata di $30°$ in senso antiorario rispetto all'asse x coincidono con le coordinate del punto individuato sulla circonferenza di Mohr ruotando il segmento CX di $60°$ in senso orario.

Le componenti di tensione presenti sulla giacitura la cui normale è ruotata di $40°$ in senso orario rispetto all'asse x coincidono con le coordinate del punto individuato sulla circonferenza di Mohr ruotando il segmento CX di $80°$ in senso antiorario e così via.

Il metodo della circonferenza di Mohr

Tensioni tangenziali massime

Giaciture su cui agiscono le massime tensioni tangenziali



Come si è detto, per lo stato tensionale in esame non esiste una giacitura su cui è presente una componente di tensione normale superiore o inferiore a quella relativa ai punti P_1 e P_2 che pertanto individuano i valori principali di tensione.

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

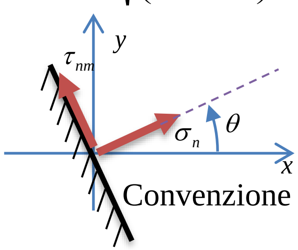
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

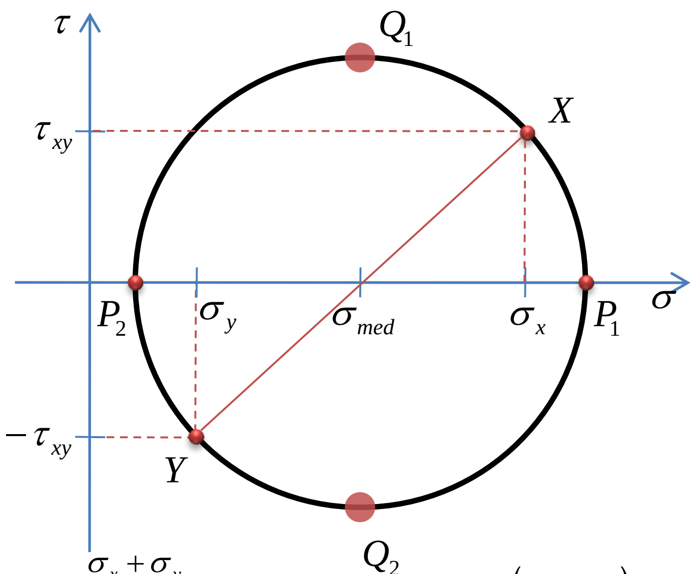
$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Convenzione di Mohr

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Giaciture su cui agiscono le massime tensioni tangenziali



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

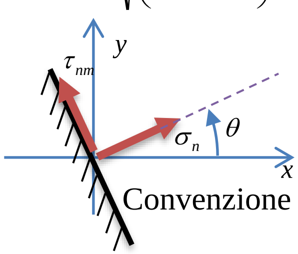
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



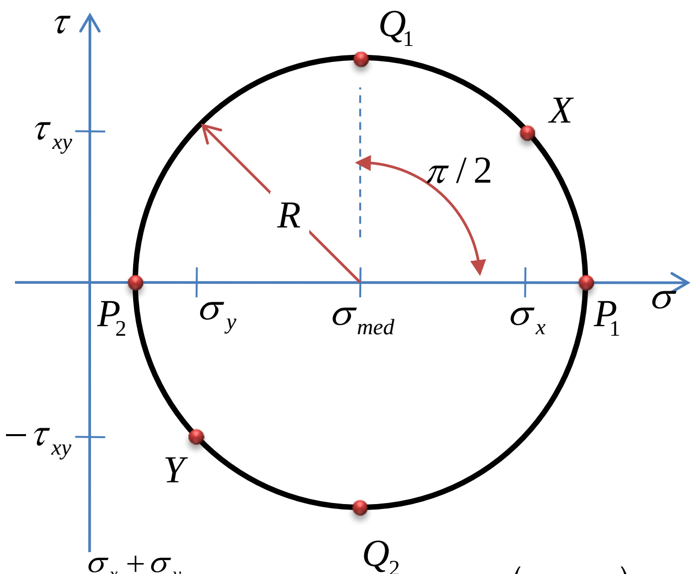
Convenzione di Mohr

Come si è detto, per lo stato tensionale in esame non esiste una giacitura su cui è presente una componente di tensione normale superiore o inferiore a quella relativa ai punti P_1 e P_2 che pertanto individuano i valori principali di tensione.

Analogamente possiamo dire che non esistono giaciture sulle quali è presente un valore di tensione tangenziale più alto o più basso di quelli relativi ai punti Q_1 e Q_2 evidenziati in figura.

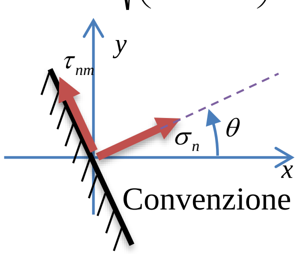
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Giaciture su cui agiscono le massime tensioni tangenziali



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Convenzione di Mohr

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Come si è detto, per lo stato tensionale in esame non esiste una giacitura su cui è presente una componente di tensione normale superiore o inferiore a quella relativa ai punti P_1 e P_2 che pertanto individuano i valori principali di tensione.

Analogamente possiamo dire che non esistono giaciture sulle quali è presente un valore di tensione tangenziale più alto o più basso di quelli relativi ai punti Q_1 e Q_2 evidenziati in figura. Utilizzando le proprietà della circonferenza di Mohr è facile verificare che tali giaciture sono inclinate di $45°$ rispetto alle direzioni principali di tensione e che i valori di tensione tangenziale massima sono

$$\tau_{max} = +R \qquad \tau_{min} = -R$$

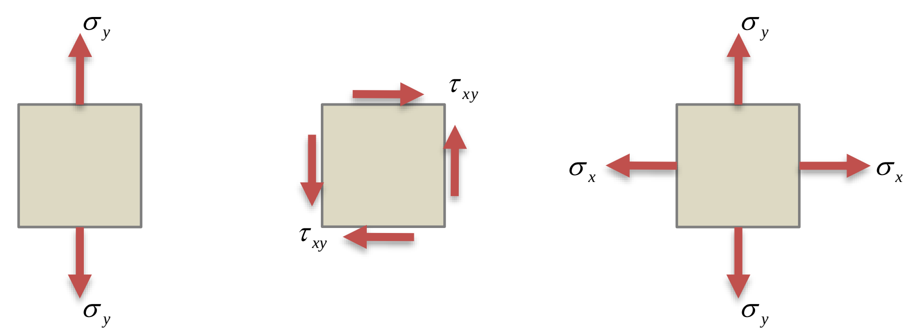
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il metodo della circonferenza di Mohr

Alcuni stati tensionali particolari

Alcuni stati tensionali particolari

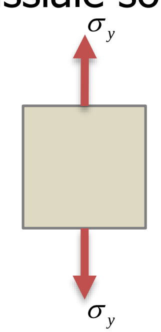
Nella scorsa lezione si è detto che gli stati tensionali uniassiali, biassiali e di puro taglio sono dei particolari stati tensionali piani. La circonferenza di Mohr relativa a tali casi risulta di immediata costruzione e di facile interpretazione.



uniassiale puro taglio biassiale

Stati tensionali uniassiali

Le componenti del tensore di tensione corrispondenti ad uno stato tensionale uniassiale sono le seguenti



$$\underline{\sigma}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Le espressioni precedentemente ricavate per la circonferenza di Mohr si particolarizzano come segue

$$X \equiv (0,0) \qquad R = \sigma_y / 2$$

$$Y \equiv (\sigma_y, 0) \qquad \tan 2\theta_1 = 0$$

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

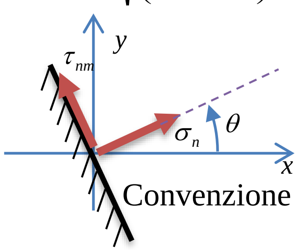
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

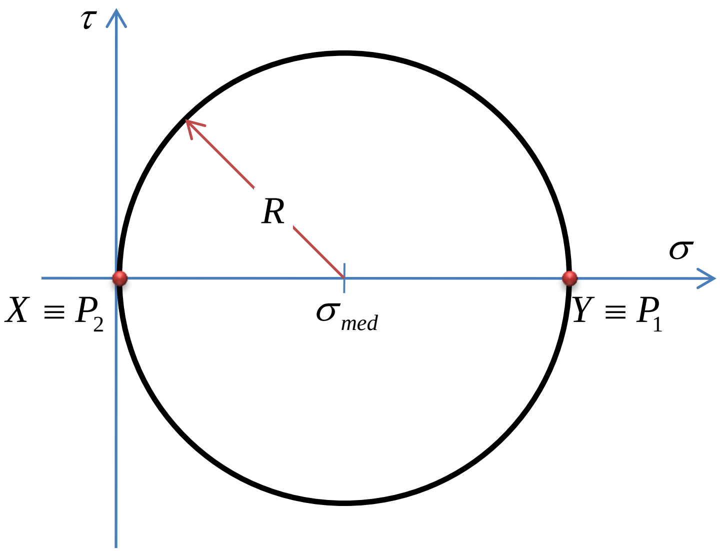
$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



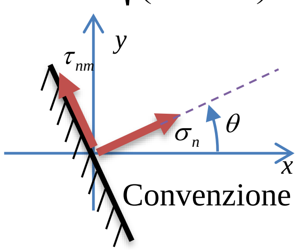
Convenzione di Mohr

Stati tensionali uniassiali



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Convenzione di Mohr

$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

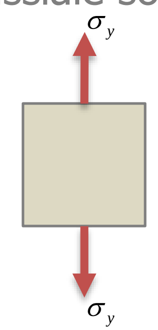
$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Le componenti del tensore di tensione corrispondenti ad uno stato tensionale uniassiale sono le seguenti



$$\underline{\sigma}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Le espressioni precedentemente ricavate per la circonferenza di Mohr si particolarizzano come segue

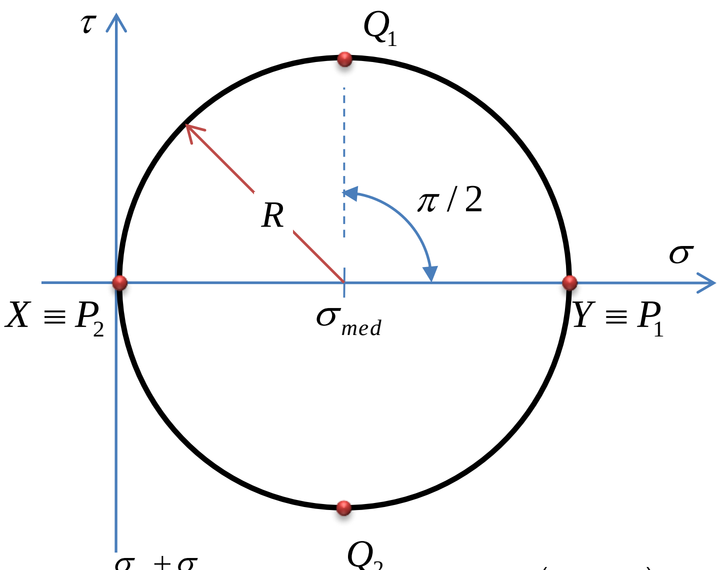
$$X \equiv (0,0) \qquad R = \sigma_y / 2$$

$$Y \equiv (\sigma_y, 0) \qquad \tan 2\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_1 = 0$$

La circonferenza di Mohr per lo stato tensionale esaminato è allora quella indicata in figura

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Stati tensionali uniassiali



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

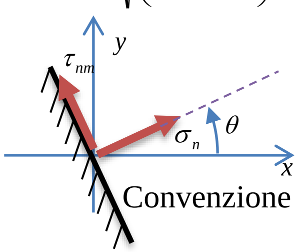
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Convenzione di Mohr

I valori principali di tensione sono allora quelli contenuti nella diagonale principale della matrice delle componenti di tensione.

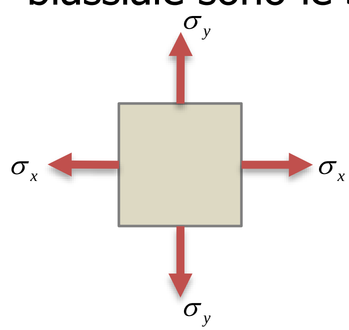
Le direzioni principali coincidono con gli assi del sistema di riferimento.

Le giacitura sulle quali sono presenti le tensioni tangenziali massime sono inclinate di $45°$ rispetto agli assi del sistema di riferimento.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Stati tensionali biassiali

Le componenti del tensore di tensione corrispondenti ad uno stato tensionale biassiale sono le seguenti



$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Le espressioni precedentemente ricavate per la circonferenza di Mohr si particolarizzano come segue

$$X \equiv (\sigma_x, 0) \qquad R = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

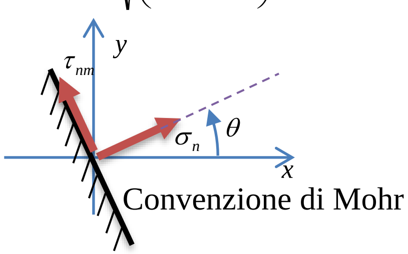
$$Y \equiv (\sigma_y, 0) \qquad \tan 2\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_1 = 0$$

Ipotizziamo, senza perdere di generalità, che sia

$$\sigma_y < \sigma_x$$

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

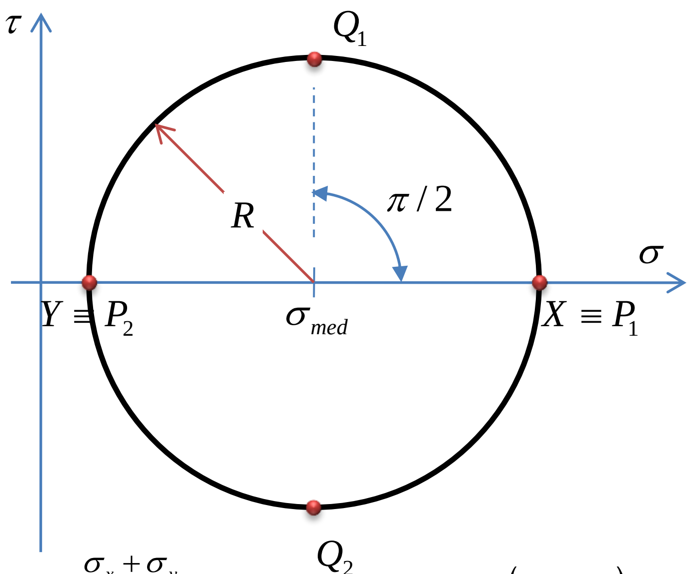
$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Stati tensionali biassiali



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

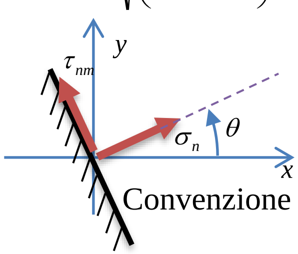
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Convenzione di Mohr

La circonferenza di Mohr per lo stato tensionale esaminato è allora quella indicata in figura.

I valori principali di tensione sono allora quelli contenuti nella diagonale principale della matrice delle componenti di tensione.

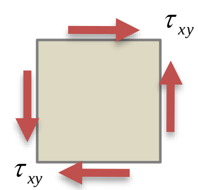
Le direzioni principali coincidono con gli assi del sistema di riferimento.

Le giacitura sulle quali sono presenti le tensioni tangenziali massime sono inclinate di $45°$ rispetto agli assi del sistema di riferimento.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Stati tensionali di puro taglio

Le componenti del tensore di tensione corrispondenti ad uno stato tensionale di puro taglio sono le seguenti



$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{bmatrix}$$

Le espressioni precedentemente ricavate per la circonferenza di Mohr si particolarizzano come segue

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

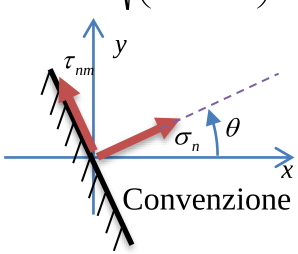
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Convenzione di Mohr

$$X \equiv (0, \tau_{xy})$$

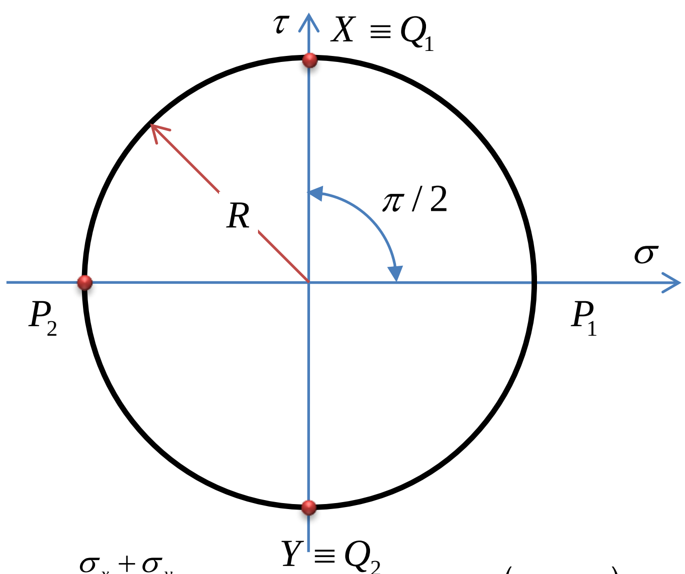
$$Y \equiv (0, -\tau_{xy})$$

$$R = |\tau_{xy}|$$

$$\tan 2\theta_1 \to \infty$$

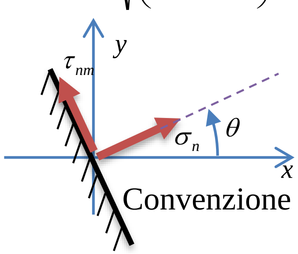
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Stati tensionali di puro taglio



$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Convenzione di Mohr

$$X \equiv \left(\sigma_x, \tau_{xy}\right)$$

$$Y \equiv \left(\sigma_y, -\tau_{xy}\right)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

La circonferenza di Mohr per lo stato tensionale esaminato è allora quella indicata in figura.

Sulle giaciture ortogonali agli assi del sistema di riferimento sono presenti le tensioni tangenziali massime.

Le direzioni principali sono ruotate di $45°$ rispetto agli assi del sistema di riferimento

I valori principali di tensione sono pari a

$$\sigma_1 = \tau_{xy} \qquad \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il metodo della circonferenza di Mohr

Esempio

Esempio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

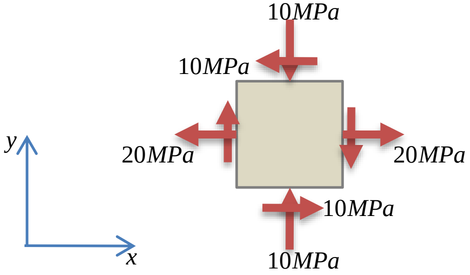
Utilizzando il metodo della circonferenza di Mohr, si calcolino:

- i valori e le direzioni principali di tensione
- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $30°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio

Lo stato tensionale in esame può essere schematizzato come segue



$$\underline{\sigma}_r = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

A tali componenti di tensione corrispondono i seguenti valori

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

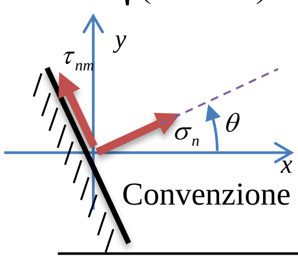
$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Convenzione di Mohr

$$\sigma_{med} = \frac{20-10}{2} = 5MPa$$

$$R = 18{,}03MPa$$

$$X \equiv (20,-10)$$

$$Y \equiv (-10,10)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 23{,}03MPa$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = -13{,}03MPa$$

$$\tan 2\theta_1 = -\frac{2}{3} \rightarrow \theta_1 = -16°{,}85$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio

Per la costruzione della circonferenza di Mohr si utilizza la seguente procedura

$$X \equiv (20,-10)$$

$$Y \equiv (-10,10)$$

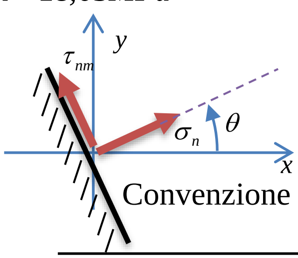
$$\sigma_{med} = \frac{20-10}{2} = 5MPa$$

$$R = 18{,}03MPa$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 23{,}03MPa$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = -13{,}03MPa$$

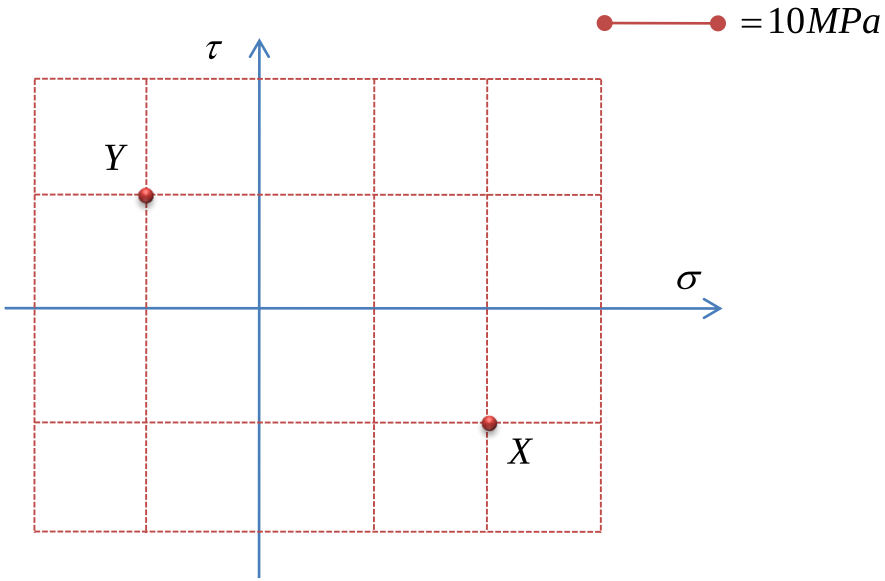
$$\theta_1 = -16°{,}85$$



Convenzione di Mohr

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio



Per la costruzione della circonferenza di Mohr si utilizza la seguente procedura

1. si individuano sul piano di Mohr i punti X ed Y

$$X \equiv (20,-10)$$

$$Y \equiv (-10,10)$$

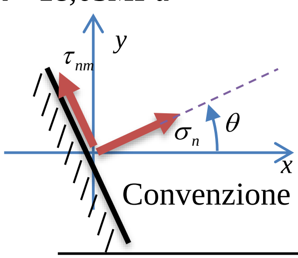
$$\sigma_{med} = \frac{20-10}{2} = 5MPa$$

$$R = 18{,}03MPa$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 23{,}03MPa$$

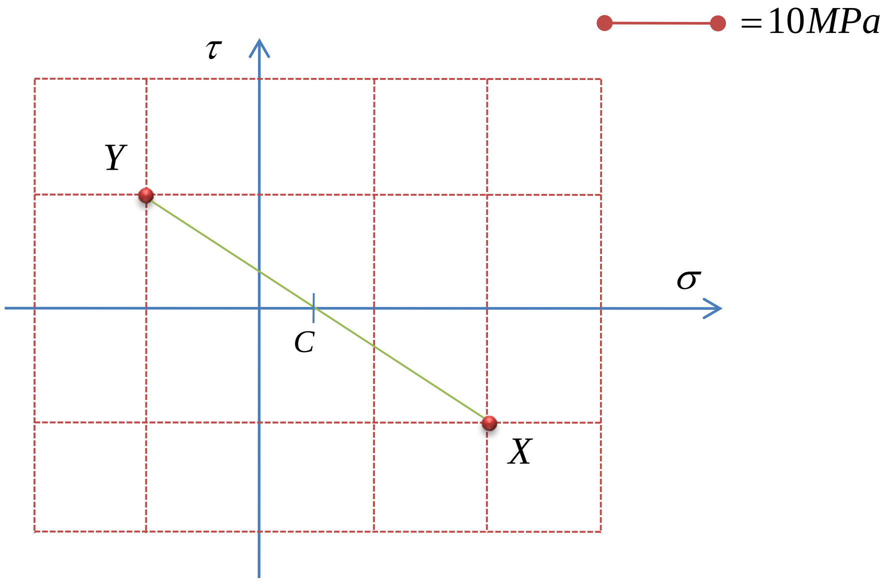
$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = -13{,}03MPa$$

$$\theta_1 = -16°{,}85$$



Convenzione di Mohr

Esempio



Per la costruzione della circonferenza di Mohr si utilizza la seguente procedura

1. si individuano sul piano di Mohr i punti X ed Y
2. la congiungente i punti X ed Y interseca l'asse σ in corrispondenza del centro C della circonferenza avente ascissa pari a σ_{med}

$$X \equiv (20,-10)$$

$$Y \equiv (-10,10)$$

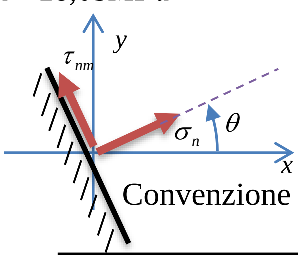
$$\sigma_{med} = \frac{20-10}{2} = 5MPa$$

$$R = 18{,}03MPa$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 23{,}03MPa$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = -13{,}03MPa$$

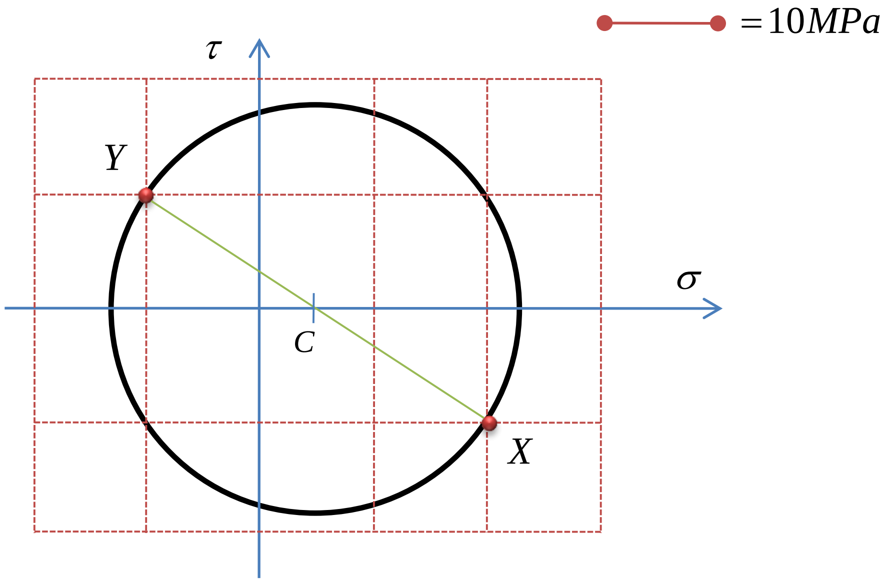
$$\theta_1 = -16°{,}85$$



Convenzione di Mohr

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio



Per la costruzione della circonferenza di Mohr si utilizza la seguente procedura

1. si individuano sul piano di Mohr i punti X ed Y
2. la congiungente i punti X ed Y interseca l'asse σ in corrispondenza del centro C della circonferenza avente ascissa pari a σ_{med}
3. si traccia una circonferenza avente centro C e raggio pari a CX

$$\sigma_{med} = \frac{20-10}{2} = 5MPa$$

$$X \equiv (20,-10)$$

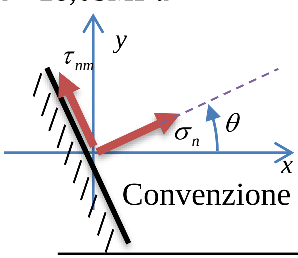
$$Y \equiv (-10,10)$$

$$R = 18{,}03MPa$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 23{,}03MPa$$

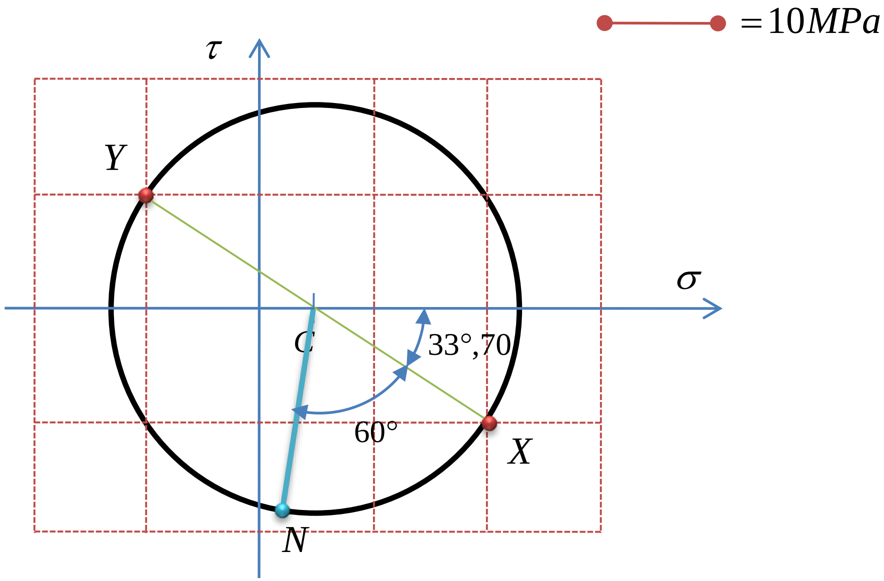
$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = -13{,}03MPa$$

$$\theta_1 = -16°{,}85$$



Convenzione di Mohr

Esempio



L'angolo compreso tra il segmento CX e l'asse σ è pari a $2\theta_1 = 33°,70$.

Le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $30°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x corrispondono alle coordinate del punto N in figura ottenuto ruotando il segmento CX di $60°$ in senso orario.

$$\sigma_{med} = \frac{20-10}{2} = 5MPa$$

$$X \equiv (20,-10)$$

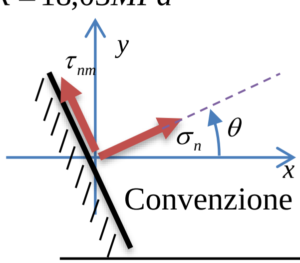
$$Y \equiv (-10,10)$$

$$R = 18{,}03MPa$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 23{,}03MPa$$

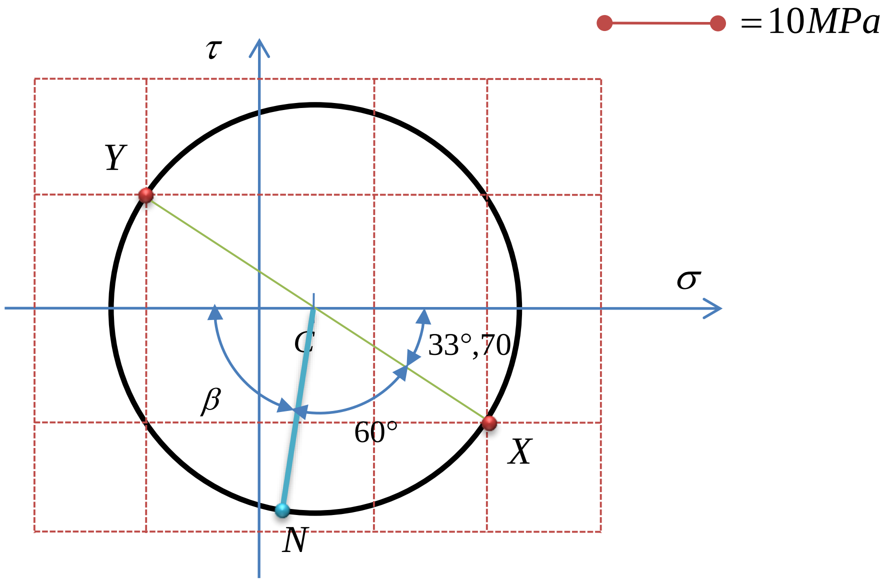
$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = -13{,}03MPa$$

$$\theta_1 = -16°{,}85$$



Convenzione di Mohr

Esempio



L'angolo compreso tra il segmento CX e l'asse σ è pari a $2\theta_1 = 33°,70$.

Le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $30°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x corrispondono alle coordinate del punto N in figura ottenuto ruotando il segmento CX di $60°$ in senso orario.

Le componenti del punto N sono le seguenti

$$\sigma_n = \sigma_{med} - R\cos\beta = 3{,}84MPa$$

$$\tau_{nm} = -R\sin\beta = -17{,}99MPa$$

$$\sigma_{med} = \frac{20-10}{2} = 5MPa$$

$$X \equiv (20,-10)$$

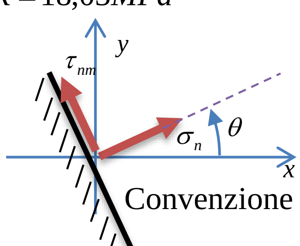
$$Y \equiv (-10,10)$$

$$R = 18{,}03MPa$$

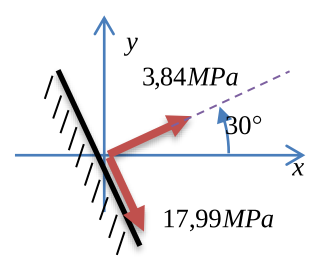
$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 23{,}03MPa$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = -13{,}03MPa$$

$$\theta_1 = -16°,85$$



Convenzione di Mohr



Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il metodo della circonferenza di Mohr

Esercizi proposti

Esercizio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} -30 & 15 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} MPa$$

Utilizzando il metodo della circonferenza di Mohr, si calcolino:

- i valori e le direzioni principali di tensione
- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $45°$ (in senso orario) rispetto all'asse x

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

Utilizzando il metodo della circonferenza di Mohr, si calcolino:

- i valori e le direzioni principali di tensione
- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $60°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x

Esercizio

In corrispondenza di un certo punto materiale P di un continuo è presente uno stato tensionale piano, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono di seguito riportate

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_r = \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 15 & 15 \end{bmatrix} MPa$$

Utilizzando il metodo della circonferenza di Mohr, si calcolino:

- le componenti di tensione presenti su una giacitura avente normale inclinata di $15°$ (in senso antiorario) rispetto all'asse x
- i valori e le direzioni principali di tensione