0.1 Infinitesimi e Infiniti

Il seguente teorema è molto utile nel calcolo dei limiti

Teorema (principio di sostituzione degli infinitesimi). *Siano* $f, g, F, G : A \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, x_0 *punto di accumulazione di* A. *Supponiamo che* f, g, F, G *siano infinitesime per per* x *che tende a* x_0. *Supponiamo anche che* f, g, $f+F$, $g+G$ *siano diverse da zero in* $J \cap A \backslash \{x_0\}$, *con* J *intorno di* x_0 *e che* F *sia infinitesimo di ordine superiore rispetto a* f *e* G *sia infinitesimo di ordine superiore rispetto a* g *(per* x *che tende a* x_0*). Allora il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} \tag{1}$$

esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{2}$$

Inoltre, se uno dei due limiti esiste, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{3}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 + \frac{F(x)}{f(x)}}{1 + \frac{G(x)}{g(x)}} \right) \tag{4}$$

e

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} \left(\frac{1 + \frac{G(x)}{g(x)}}{1 + \frac{F(x)}{f(x)}} \right). \tag{5}$$

Poiché $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{G(x)}{g(x)} = 0$, si ha che

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1 + \frac{F(x)}{f(x)}}{1 + \frac{G(x)}{g(x)}} \right) = 1 \ , \ \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1 + \frac{G(x)}{g(x)}}{1 + \frac{F(x)}{f(x)}} \right) = 1. \tag{6}$$

Ora se esiste il limite (2), dalla (4) e dalla prima delle (6) si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 + \frac{F(x)}{f(x)}}{1 + \frac{G(x)}{g(x)}} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Invece, se esiste il limite (1) dalla (5) dalla seconda delle (6) si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}\left(\frac{1+\dfrac{G(x)}{g(x)}}{1+\dfrac{F(x)}{f(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}.$$

■

Esempio. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x^3}{2x+x^2}\ .$$

Osserviamo che a numeratore l'infinitesimo $-x^3$ è di ordine superiore rispetto a $\sin x$, infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right)\frac{x}{\sin x}=0\cdot 1=0.$$

Osserviamo anche che x^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $2x$. Perciò possiamo applicare il principio di sostituzione degli infinitesimi e otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x^3}{2x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\ .$$

Osservazione. Malgrado la semplicità dell'enunciato, il principio di sostituzione degli infinitesimi richiede un'attenta applicazione. In particolare si deve tener ben presente che quando si applica il principio di sostituzione degli infinitesimi a limiti del tipo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}\ ,$$

bisogna conoscere la parte principale di $A(x)$ e di $B(x)$. Più precisamente, bisogna poter esprimere $A(x)$ e $B(x)$ rispettivamente come $f(x)+F(x)$ e $g(x)+G(x)$, con $F(x)$ infinitesimo di ordine superiore rispetto a $f(x)$ e $g(x)$ e $G(x)$ infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per x che tende a x_0 (ovviamente, F o G o entrambi possono essere nulli). Consideriamo il seguente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}\cos x}{x} \tag{7}$$

e mostriamo un primo procedimento errato e un secondo corretto.
1) Procedimento **errato.**
$\ln(1+x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\sqrt{|x|}$ per x che tende a 0, perciò (questa deduzione è **errata**) per il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}\cos x}{x}. \tag{8}$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}\,(1-\cos x)}{x}=0.$$

Quindi il limite (7) sarebbe 0.
2) Procedimento **corretto.**

$\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}\cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\ln(1+x)$. Infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}\cos x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}\,(1-\cos x)}{x}\frac{x}{\ln(1+x)}=0\cdot 1=0.$$

Perciò per il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Quindi il limite (7) è uguale a 1.

Teorema (principio di sostituzione degli infiniti). *Siano* $f,g,F,G:A\to\mathbb{R}$ *e sia* $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$, x_0 *punto di accumulazione di* A. *Supponiamo che* f,g,F,G *siano infiniti per per* x *che tende a* x_0. *Supponiamo anche che* f, g, $f+F$, $g+G$ *siano diverse da zero in* $J\cap A\setminus\{x_0\}$, *con* J *intorno di* x_0 *e che* F *sia un infinito di ordine inferiore rispetto a* f *e* G *sia un infinito di ordine inferiore rispetto a* g *(per* x *che tende a* x_0*). Allora il limite*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)} \tag{9}$$

esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}. \tag{10}$$

Inoltre, se uno dei due limiti esiste, si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}. \tag{11}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1+\dfrac{F(x)}{f(x)}}{1+\dfrac{G(x)}{g(x)}}\right) \tag{12}$$

e

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}\left(\frac{1+\dfrac{G(x)}{g(x)}}{1+\dfrac{F(x)}{f(x)}}\right). \tag{13}$$

Poiché $\lim_{x\to x_0}\dfrac{F(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\dfrac{G(x)}{g(x)}=0$, si ha che

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1+\dfrac{F(x)}{f(x)}}{1+\dfrac{G(x)}{g(x)}}\right)=1\ ,\ \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1+\dfrac{G(x)}{g(x)}}{1+\dfrac{F(x)}{f(x)}}\right)=1. \tag{14}$$

Ora se esiste il limite (10), dalla (12) e dalla prima delle (15) si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1+\dfrac{F(x)}{f(x)}}{1+\dfrac{G(x)}{g(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Invece, se esiste il limite (9) dalla (13) dalla seconda delle (14) si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}\left(\frac{1+\dfrac{G(x)}{g(x)}}{1+\dfrac{F(x)}{f(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)}.$$

■

Esempio. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x^3}{x^2+\sqrt{x^2+1}}\ .$$

Osserviamo che x^3 è un infinito di ordine inferiore rispetto a e^x per x che tende a $+\infty$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty.$$

Inoltre $\sqrt{x^2+1}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a x^2 per x che tende a $+\infty$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=+\infty.$$

Quindi per il principio di sostituzione degli infiniti si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x^3}{x^2+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty\ .$$

0.2 Il simbolo "o" piccolo

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$, x_0 punto di accumulazione di A. Supponiamo che esista un intorno I di x_0 tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$. L'espressione $f = o(g)$ (si legge "f è un o piccolo di g") per x che tende a x_0 significa che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{15}$$

A volte, quando non c'è il rischio di ambiguità, potremo omettere la frase "per x che tende a x_0" e scrivere più brevemente soltanto "$f = o(g)$". Si noti che se f è un qualsiasi infinitesimo per x che tende a x_0 allora $f = o(1)$ per x che tende a x_0. L'espressione $f = o(g)$ va esclusivamente intesa come un'abbreviazione della relazione di limite (15) e, in particolare, il segno "=" nella relazione $f = o(g)$ non va inteso nel senso ordinario. Ad esempio possiamo scrivere $x^2 = o(x)$ per x che tende a 0 e $x^3 = o(x)$ per x che tende a 0, ma non possiamo certo dedurne che $x^2 = x^3$.
L'uso del simbolo "o" è utile quando si intende calcolare un limite mediante il principio di sostituzione degli infinitesimi o degli infiniti. Osserviamo a tale proposito che entrambi i principi di sostituzione si possono sinteticamente ricordare con la formula

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}.$$

Per questo motivo è utile avere a disposizione delle semplici regole di calcolo sugli "o piccolo". Prima di fornire tali regole, negli esempi che seguono, utilizziamo il simbolo "o piccolo" per esprimere alcuni limiti notevoli. Nel seguito di questo sottoparagrafo concentremo l'attenzione sugli infinitesimi.
Negli esempi che seguono utilizzeremo la seguente

Ricordiamo quanto segue:

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ sono due infinitesimi per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}^*$.
i) f è un infinitesimo dello stesso ordine di g per x che tende a x_0 se e solo se esiste $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $f = Kg + o(g)$ per x che tende a x_0.
ii) f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g per x che tende a x_0 se e solo se $f = o(g)$ per x che tende a x_0.
Inoltre se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, con I intorno di x_0 allora la relazione di limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = K\ ,$$

con $K \in \mathbb{R}$, equivale a

$$f = Kg + o(g) \text{ per } x \text{ che tende a } x_0.$$

Esempio. Dai limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

si ha rispettivamente che

$$\sin x = x+o(x)\,,\text{ per } x \text{ che tende a } 0, \tag{16}$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right),\text{ per } x \text{ che tende a } 0, \tag{17}$$

$$e^x = 1+x+o(x)\,,\text{ per } x \text{ che tende a } 0, \tag{18}$$

$$\ln(1+x) = x+o(x)\,,\text{ per } x \text{ che tende a } 0, \tag{19}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x)\,,\text{ per } x \text{ che tende a } 0,\ (\alpha\in\mathbb{R}). \tag{20}$$

Nelle proposizioni che seguono useremo le seguenti abbreviazioni. Sia $f:A\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$, x_0 punto di accumulazione di A. Supponiamo che $f(x)\neq 0$ per ogni $x\in I\cap A\backslash\{x_0\}$, con I intorno di x_0, scriveremo $o(f)$. per indicare una qualsiasi funzione $F:A\to\mathbb{R}$ tale che $F=o(f)$ per x che tende a x_0. Ad esempio il prodotto $o(f)\,o(g)$ indica il prodotto di una qualsiasi funzione F tale che $F=o(f)$ per una qualsiasi funzione G tale che $G=o(g)$.

Proposizione 1. *Valgono le seguenti relazioni:*
i) $o(1)\,f=o(f)$,
ii) $o(f)+o(f)=o(f)$,
iii) se $g=o(f)$ *allora* $o(f)+o(g)=o(f)$,
iv) $o(g)\,f=o(f)\,g=o(f)\,o(g)=o(fg)$.
<u>Dimostrazione</u>. Ci limitiamo a dimostrare la i) e la ii) le altre sono lasciate per esercizio al lettore. Per quanto riguarda la i) è sufficiente dimostrare che se h è un infinitesimo allora $hf=o(f)$, ma questo segue immediatamente da $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{hf}{f}=\lim\limits_{x\to x_0}h=0$. Per quanto riguarda la ii) basta dimostrare che se $F_1=o(f)$ e $F_2=o(f)$ allora $F_1+F_2=o(f)$. Ora, poiché $F_1=o(f)$ si ha che $F_1=h_1 f$ dove $h_1=\frac{F_1}{f}$ e quindi $\lim\limits_{x\to x_0}h_1=0$. Analogamente poiché $F_2=o(f)$ si ha che $F_2=h_2 f$ con $\lim\limits_{x\to x_0}h_2=0$. Perciò

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F_1+F_2}{f}=\lim_{x\to x_0}\frac{(h_1+h_2)\,f}{f}=\lim_{x\to x_0}(h_1+h_2)=0$$

da ciò segue che $F_1+F_2=o(f)$.■

Osservazione. Dalla proposizione precedente si ha quanto segue (K, K_1, K_2 sono numeri reali)

1)
$$(K_1 f + o(f)) + (K_2 f + o(f)) = (K_1 + K_2) f + o(f), \tag{21}$$
infatti dalla ii) si ha
$$(K_1 f + o(f)) + (K_2 f + o(f)) = K_1 f + K_2 f + o(f) + o(f) = (K_1 + K_2) f + o(f)$$

2)
$$(K_1 f + o(f)) (K_2 g + o(g)) = K_1 K_2 fg + o(fg), \tag{22}$$
infatti da iv) si ha
$$(K_1 f + o(f)) (K_2 g + o(g)) = K_1 K_2 fg + K_1 f o(g) + K_2 g o(f) + o(f) o(g) = K_1 K_2 fg + o(fg).$$

3) Dalla (22) si ha
$$(Kf + o(f))^2 = K^2 f^2 + o\left(f^2\right)$$
e, più in generale, se $n \in \mathbb{N}$,
$$(Kf + o(f))^n = K^n f^n + o(f^n). \tag{23}$$

Proposizione 2. *Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ con x_0 punto di accumulazione di A e supponiamo che 0 sia un punto di accumulazione di B. Siano inoltre $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, $h : B \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*
i) f sia un infinitesimo per x che tende a x_0
ii) $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, con I intorno di x_0,
iii) $h(y) \neq 0$ per ogni $y \in B \setminus \{0\}$
iv) $f(I \cap A \setminus \{x_0\}) \subset B$.
Se
$$g(y) = Kh(y) + o(h(y)), \text{ per } y \text{ che tende a } 0, \tag{24}$$
dove $K \in \mathbb{R}$, allora
$$g(f(x)) = Kh(f(x)) + o(h(f(x))), \text{ per } x \text{ che tende a } x_0. \tag{25}$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che
$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - Kh(f(x))}{h(f(x))} = 0. \tag{26}$$

Sia $F : B \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tale che
$$F(y) = \frac{g(y) - Kh(y)}{h(y)}, \text{ per } y \in B \setminus \{0\}.$$

Dalla (24) sappiamo che
$$\lim_{y \to 0} F(y) = 0. \tag{27}$$

Dalla ii) e iv) si ha $f\left(I \cap A \backslash \{x_0\}\right) \subset B \backslash \{0\}$. Perciò

$$\frac{g\left(f\left(x\right)\right) - Kh\left(f\left(x\right)\right)}{h\left(f\left(x\right)\right)} = F\left(f\left(x\right)\right), \text{ per ogni } x \in I \cap A \backslash \{x_0\}. \tag{28}$$

Ora applichiamo il teorema del limite di una funzione composta. Dall'uguaglianza (28) abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g\left(f\left(x\right)\right) - Kh\left(f\left(x\right)\right)}{h\left(f\left(x\right)\right)} = \lim_{x \to x_0} F\left(f\left(x\right)\right). \tag{29}$$

D'altra parte la ii) implica che le ipotesi del Teorema 13 siano soddisfatte, perciò da (27) e (29) abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g\left(f\left(x\right)\right) - Kh\left(f\left(x\right)\right)}{h\left(f\left(x\right)\right)} = \lim_{x \to x_0} F\left(f\left(x\right)\right) = \lim_{y \to 0} F\left(y\right) = 0$$

ottenendo la (26) e la tesi.■

Osservazione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$, x_0 punto di accumulazione di A. Supponiamo che $f\left(x\right) \neq 0$ per ogni $x \in I \cap A \backslash \{x_0\}$, con I intorno di x_0. Dalla Proposizione 2 e dalle (16)-(20) abbiamo, rispettivamente, le seguenti utili relazioni:

$$\sin f\left(x\right) = f\left(x\right) + o\left(f\left(x\right)\right), \text{ per } x \text{ che tende a } x_0, \tag{30}$$

$$\cos f\left(x\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(f\left(x\right)\right)^2 + o\left(\left(f\left(x\right)\right)^2\right), \text{ per } x \text{ che tende a } x_0, \tag{31}$$

$$e^{f(x)} = 1 + f\left(x\right) + o\left(f\left(x\right)\right), \text{ per } x \text{ che tende a } x_0, \tag{32}$$

$$\ln\left(1 + f\left(x\right)\right) = f\left(x\right) + o\left(f\left(x\right)\right), \text{ per } x \text{ che tende a } x_0. \tag{33}$$

$$\left(1 + f\left(x\right)\right)^\alpha = 1 + \alpha f\left(x\right) + o\left(f\left(x\right)\right), \text{ per } x \text{ che tende a } x_0, \ (\alpha \in \mathbb{R}). \tag{34}$$

Esempio. Scriviamo l'infinitesimo $x\left(\sin x^2\right)^2 - 3\left(e^{x^2} - \cos x\right)\ln\left(1 + x^3\right)$, per x che tende a 0, nella forma $Kx^\alpha + o\left(x^\alpha\right)$.
Da (19) e da (23) abbiamo

$$\left(\sin x^2\right)^2 = \left(x^2 + o\left(x^2\right)\right)^2 = x^4 + o\left(x^4\right),$$

perciò

$$x\left(\sin x^2\right)^2 = x^5 + o\left(x^5\right). \tag{35}$$

Da (31) e (32) si ha

$$e^{x^2} - \cos x = \left(1 + x^2 + o\left(x^2\right)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Da quest'ultima e da (33) otteniamo

$$\left(e^{x^2} - \cos x\right)\ln\left(1 + x^3\right) = \left(\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) = \frac{x^5}{2} + o\left(x^5\right).$$

Da quanto appena ottenuto e da (35) si ha

$$x\left(\sin x^2\right)^2-3\left(e^{x^2}-\cos x\right)\ln\left(1+x^3\right)=-\frac{x^5}{2}+o\left(x^5\right), \text{ per } x \text{ che tende a } 0.$$

Prima di concludere questo sottoparagrafo riportiamo per completezza il significato di altri due simboli di cui, comunque, faremo poco uso in seguito. Siano $f:A\to R$, $g:A\to R$ e sia $x_0\in\mathbb{R}^*$, x_0 punto di accumulazione di A. L'espressione $f=O(g)$ (si legge "f è un o grande di g") per x che tende a x_0 significa che esiste un numero reale $K\geq 0$ e un intorno I di x_0 tali che

$$|f(x)|\leq K|g(x)| \text{ , per ogni } x\in I\cap A\setminus\{x_0\}.$$

Inoltre se $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ scriveremo anche $f\sim g$ (si legge "f è asintoticamente uguale a g") per x che tende a x_0. Osserviamo che se $f=o(g)$ per x che tende a x_0 allora si ha anche $f=O(g)$ per x che tende a x_0, ma non vale il viceversa infatti $f=O(f)$ e, evidentemente, è falso che $f=o(f)$. Osserviamo anche che la relazione $f\sim g$ per x che tende a x_0 è equivalente a $f=g+o(g)$.

ESERCIZIO 1

Stabilre se esistono i seguenti limti e eventualmente calcolarli:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$,
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{|x|}$,
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos x$,
4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$,
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\ln(1+x)|}{\sin|x|}$,
6) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$,
7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{x}$,
8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$,
9) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$,
10) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\mathrm{sen}x}{|x-2\pi|}$,
11) $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}$,

12) $\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

1) Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x},$$

il limite proposto non esiste.

2) Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|^2}{|x|} = \lim_{x\to 0} |\sin x| \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0 \cdot 1 = 0.$$

3) Il limite proposto non esiste. Infatti siano $\{x_n\} = \{2\pi n\}$, $\{y_n\} = \left\{2\pi n + \frac{\pi}{2}\right\}$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

ma

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \cos y_n = 0.$$

4) Poiché

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

e

$$|\cos x| \leq 1,$$

per il teorema del confronto si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x = 0.$$

5) Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\ln(1+x)|}{\sin|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|\ln(1+x)|}{|x|} \frac{|x|}{\sin|x|} = \lim_{x\to 0} \left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right| \frac{|x|}{\sin|x|} = 1 \cdot 1 = 1.$$

6) Il limite proposto non esiste. Infatti, i due limiti

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}},$$

sono diversi.

Per calcolare il primo limite poniamo $y = \frac{1}{x}$, poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty.$$

Analogamente, ponendo $y = \frac{1}{x}$, poiché $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \neq \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}.$$

7) Il limite proposto non esiste. Infatti siano $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right\}$ abbiamo $x_n > 0$ e $y_n > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = 1.$$

8) Poiché

$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

e

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1,$$

per il teorema del confronto si ha

$$\lim_{x\to 0} x\mathrm{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

9) Il limite proposto non esiste. Infatti siano $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{1}{2\pi n}\right)^3\right\}$, $\{y_n\} = \left\{\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)^3\right\}$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{\sqrt[3]{x_n}} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{\sqrt[3]{y_n}} = 0.$$

10) Abbiamo

$$\lim_{x\to 2\pi^+} \frac{\sin x}{|x-2\pi|} = \lim_{x\to 2\pi^+} \frac{\sin(x-2\pi)}{x-2\pi} = 1,$$

$$\lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\sin x}{|x-2\pi|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x-2\pi)}{-(x-2\pi)} = -1.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 2\pi^+} \frac{\sin x}{|x-2\pi|} \neq \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\sin x}{|x-2\pi|},$$

il limite proposto non esiste.

11) Poiché

$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

12) Poiché

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0.$$

D'altra parte, poiché

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

quindi

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} \neq \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Perciò il limite proposto non esiste.

ESERCIZIO 2

Determinare l'ordine di infinitesimo di $e^{x^2} - \cos x + x^3 e^x$, per x che tende a 0 da destra, rispetto a $\sqrt{1+x} - 1$.

SOLUZIONE

Da (17) e (18) abbiamo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right),$$

$$e^x = 1 + x + o\left(x\right),$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o\left(x^2\right),$$

per x che tende a 0 (da destra).
Perciò dalla Proposizione 1 abbiamo

$$e^{x^2} - \cos x + x^3 e^x = \left(1 + x^2 + o\left(x^2\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + x^3\left(1 + x + o\left(x\right)\right)$$

$$= \left(1 + x^2 + o\left(x^2\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + o\left(x^2\right) = \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Da (20) si ha, per $\alpha > 0$,

$$\left(\sqrt{1+x} - 1\right)^{\alpha} = x^{\alpha} + o\left(x^{\alpha}\right),$$

per x che tende a 0 (da destra).
Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{x^2} - \cos x + x^3 e^x}{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)^{\alpha}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}{x^{\alpha} + o\left(x^{\alpha}\right)} = \lim_{x \to 0+} \frac{3}{2}x^{2-\alpha},$$

quindi, se $\alpha = 2$ si ha

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{x^2} - \cos x + x^3 e^x}{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)^{\alpha}} = \frac{3}{2}.$$

Perciò l'ordine di infinitesimo di $e^{x^2} - \cos x + x^3 e^x$, per x che tende a 0 da destra, rispetto a $\sqrt{1+x} - 1$ è 2.

ESERCIZIO 3

Determinare l'ordine di infinitesimo di $\ln\left(\cos x + \sqrt[3]{x}\sin x\right)$, per x che tende a 0 da destra, rispetto a $2x - \arcsin x$.

SOLUZIONE

Da (19) abbiamo

$$\ln\left(\cos x + \sqrt[3]{x}\sin x\right) = \ln\left(1 + (\cos x - 1) + \sqrt[3]{x}\sin x\right)$$

$$= (\cos x - 1) + \sqrt[3]{x}\sin x + o\left((\cos x - 1) + \sqrt[3]{x}\sin x\right),$$

per x che tende a 0 (da destra).
Da (17) e (16) si ha

$$(\cos x - 1) + \sqrt[3]{x}\sin x = \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + \sqrt[3]{x}\left(x + o\left(x\right)\right)$$

$$= x^{\frac{4}{3}} + \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^{\frac{4}{3}}\right) + o\left(x^2\right)\right) = x^{\frac{4}{3}} + o\left(x^{\frac{4}{3}}\right).$$

Da quanto ottenuto sopra abbiamo

$$\ln\left(\cos x + \sqrt[3]{x}\sin x\right) = x^{\frac{4}{3}} + o\left(x^{\frac{4}{3}}\right).$$

Poiché

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

abbiamo

$$\arcsin x = x + o\,(x)\,,$$

perciò

$$2x - \arcsin x = 2x - (x + o\,(x)) = x + o\,(x)\,.$$

Quindi l'ordine di infinitesimo di $\ln(\cos x + \sqrt[3]{x}\sin x)$, per x che tende a 0 da destra, rispetto a $2x - \arcsin x$ è $\frac{4}{3}$.

ESERCIZIO 4

Determinare l'ordine di infinitesimo di $x\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{2+x}{x}\right)^4$, per x che tende a $+\infty$, rispetto a $x^{-10}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} - 5 - x^2\right)^3$.

SOLUZIONE

Da (18) si ha

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

per x che tende a $+\infty$.
Quindi da (20)

$$x\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{2+x}{x}\right)^4 = x\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{2}{x} + 1\right)\right)^4 = \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$x^2 e^{\frac{1}{x^2}} + 5 - x^2 = x^3\left(e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{5}{x^2} - 1\right) = x^3\left(\frac{6}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Da quest'ultima, utilizzando (20), abbiamo

$$x^{-10}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} + 5 - x^2\right)^3 = x^{-10}\left(x^3\left(\frac{6}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)^3$$

$$= x^{-10}x^9\left(\frac{6^3}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) = \frac{6^3}{x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right).$$

Utilizzando nuovamente (20) si ha da quanto appena ottenuto, per $\alpha > 0$,

$$\left(x^{-10}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} + 5 - x^2\right)^3\right)^\alpha = \frac{6^{3\alpha}}{x^{7\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{7\alpha}}\right).$$

Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{2+x}{x}\right)^4}{\left(x^{-10}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} + 5 - x^2\right)^3\right)^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{6^{3\alpha}}{x^{7\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{7\alpha}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{7\alpha-3}}{6^{3\alpha}}.$$

quindi, se $\alpha = \frac{3}{7}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{2+x}{x}\right)^4}{\left(x^{-10}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} + 5 - x^2\right)^3\right)^\alpha} = \frac{1}{6^{9/7}}.$$

Perciò l'ordine di infinitesimo di $x\left(e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{2+x}{x}\right)^4$, per x che tende a $+\infty$ rispetto a $x^{-10}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} + 5 - x^2\right)^3$ è $\dfrac{3}{7}$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 5}}$

Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{\sin\sqrt{2}x}$,

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^2}{2x^3+1}$,

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^x\right)$,

4) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{\ln\left(x^3+2x-2\right)}$,

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x - \ln x\right)$,

6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - e^x}{2x^3 + e^{\sqrt{x}}}$,

7) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(1+3x\right)^{\frac{4}{x}}$,

8) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(-2+3e^x\right)^{\frac{4}{x}}$,

9) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^{\sqrt{2}} - e^{(x-1)^2}}{\ln x}$,

10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+x\right) - \ln x\right)$,

11) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$,

12) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x\ln\left(1-x\right)}{x^2 - \cos x}$,

13) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+x\right)^7 - \left(2+x\right)^7}{x^6}$,

14) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}$,

15) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt[5]{1+2x} - \sqrt[4]{1+3x}}$,

16) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)+\cos x - e^{x^4}}{x^2\sin\sqrt{x}-x^3\cos x}$,

17) $\lim_{x\to +\infty} \left(2^{e^x}-e^{2^x}\right)$,

18) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}\right)$,

19) $\lim_{x\to -\infty} e^{-x}\sin e^x$,

20) $\lim_{x\to -\infty} (x+\sin x)\sin\dfrac{1}{x+e^x}$,

21) $\lim_{x\to 0} |\sin x|^x$,

22) $\lim_{x\to 0^+} (e^x-1)^{\frac{1}{\ln \operatorname{sen} x}}$,

23) $\lim_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\sin x\right)$,

24) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\ln(-\cos x+\sin x)}{e^{2\sin x}-1}$.

SOLUZIONE

1) 1^o modo. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin\sqrt{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{1}{1}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

2^o modo. Da (16) si ha

$$\sin 3x = 3x + o(x)\ ,\ \sin\sqrt{2}x=\sqrt{2}x+o(x).$$

Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin\sqrt{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{\sqrt{2}x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{2}x}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

2) Si ha

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-x^2}{2x^3+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{1}=1.$$

3) Ricordiamo che $x^x=e^{x\ln x}$, quindi

$$\lim_{x\to +\infty}(e^x-x^x)=\lim_{x\to +\infty}\left(e^x-e^{x\ln x}\right)=\lim_{x\to +\infty}e^{x\ln x}\left(e^{-x(\ln x-1)}-1\right).$$

Ora

$$\lim_{x\to +\infty}e^{-x(\ln x-1)}-1=-1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x - x^x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x}\left(e^{-x(\ln x-1)} - 1\right) = +\infty.$$

4) Comiciamo a osservare che

$$\lim_{x\to1}\left(x^2+x-1\right) = 1\ ,\ \lim_{x\to1}\left(x^3+2x-2\right) = 1.$$

Risulta

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{\ln\left(x^3+2x-2\right)} = \lim_{x\to1}\frac{\ln\left(\left(x^2+x-2\right)+1\right)}{\ln\left(\left(x^3+2x-3\right)+1\right)} = \lim_{x\to1}\frac{\dfrac{\ln\left(\left(x^2+x-2\right)+1\right)}{x^2+x-2}}{\dfrac{\ln\left(\left(x^3+2x-3\right)+1\right)}{x^3+2x-3}} = \frac{1}{1} = 1.$$

5) Ricordiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

6) Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-e^x}{2x^3+e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\dfrac{x^3}{e^x}-1\right)}{e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{2x^3}{e^{\sqrt{x}}}+1\right)}.$$

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$$

e, ponendo $\sqrt{x} = y$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{2y^6}{e^y} = 0.$$

7) Poniamo $y = 3x$, abbiamo

$$\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{12}{y}} = \lim_{y\to0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{12} = e^{12}.$$

9) <u>1^o modo</u>. Si ha

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{\sqrt{2}}-e^{(x-1)^2}}{\ln x} = \lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{\sqrt{2}}-e^{y^2}}{\ln(1+y)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\left((1+y)^{\sqrt{2}}-1\right)+\left(1-e^{y^2}\right)}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{(1+y)^{\sqrt{2}}-1}{y} - y\dfrac{e^{y^2-1}}{y^2}}{\dfrac{\ln(1+y)}{y}}.$$

D'altra parte

$$\lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{\sqrt{2}}-1}{y} = \sqrt{2} \quad , \quad \lim_{y\to 0} \frac{e^{y^2-1}}{y^2} = 1 \quad , \quad \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Quindi

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{(1+y)^{\sqrt{2}}-1}{y} - y\frac{e^{y^2-1}}{y^2}}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{\sqrt{2}-0\cdot 1}{1} = \sqrt{2}.$$

<u>2^o modo</u>. Da (18), (19) e (20) si ha

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + o\left(y^2\right),$$
$$\ln(1+y) = y + o(y),$$
$$(1+y)^{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}y + o(y).$$

Quindi

$$\frac{(1+y)^{\sqrt{2}} - e^{y^2}}{\ln(1+y)} = \frac{\left(1+\sqrt{2}y+o(y)\right) - \left(1+y^2+o\left(y^2\right)\right)}{y+o(y)} = \frac{\sqrt{2}y+o(y)}{y+o(y)}.$$

Perciò

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\sqrt{2}} - e^{(x-1)^2}}{\ln x} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{\sqrt{2}} - e^{y^2}}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{2}y+o(y)}{y+o(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{2}y}{y} = \sqrt{2}.$$

10) Osseviamo che

$$x\left(\ln(1+x) - \ln x\right) = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Poniamo $y = \frac{1}{x}$. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(1+x) - \ln x\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

11) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to-\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y\to 0^-} \frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y} = \lim_{y\to 0^-} y\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y^2} = 1\cdot 0 = 0.$$

Pertanto
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1.$$

12) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\ln(1-x)}{x^2-\cos x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{\ln(1-x)}{1-x}}{1-\frac{\cos x}{x^2}} = \frac{(-1)\cdot 0}{1} = 0.$$

13) Da (20) si ha

$$\frac{(1+x)^7-(2+x)^7}{x^6} = \frac{x^7\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^7-\left(1+\frac{2}{x}\right)^7\right]}{x^6} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^7-\left(1+\frac{2}{x}\right)^7}{\frac{1}{x}}$$

Da (20) si ha

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^7 = 1+7\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \left(\frac{2}{x}+1\right)^7 = 1+7\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

per x che tende a $-\infty$. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^7-(2+x)^7}{x^6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-7\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-7\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -7.$$

Un altro modo di procedere, più laborioso, consiste nello sviluppare con la formla del binomio di Newton le due espressioni $(1+x)^7$ e $(2+x)^7$, riconducendo il calcolo del limite al calcolo dellimite del rapporto di due polinomi.

14) <u>1^o modo</u>

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}} = \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\right)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \frac{-x}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \frac{-x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}\right)\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \frac{-x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\right)} = \frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+3x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}} = 1.$$

<u>2^o modo</u>. Da (20) si ha

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+o(x) \quad , \quad \sqrt{1+2x} = 1+\frac{1}{2}\cdot 2x+o(x) \quad , \quad \sqrt{1+3x} = 1+\frac{1}{2}\cdot 3x+o(x).$$

Perciò

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}=-\frac{x}{2}+o\left(x\right),$$

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}=-\frac{x}{2}+o\left(x\right).$$

Dal principio di sostituzione degli infinitesimi abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{2}+o\left(x\right)}{-\frac{x}{2}+o\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{2}}{-\frac{x}{2}}=1.$$

15) Da (20) si ha

$$\sqrt[4]{1+x}=1+\frac{1}{4}x+o\left(x\right) \quad , \quad \sqrt[3]{1+2x}=1+\frac{1}{3}\cdot 2x+o\left(x\right),$$

$$\sqrt[5]{1+2x}=1+\frac{1}{5}\cdot 2x+o\left(x\right) \quad , \quad \sqrt[4]{1+3x}=1+\frac{1}{4}\cdot 3x+o\left(x\right).$$

Perciò

$$\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}=-\frac{5}{12}x+o\left(x\right) \ ,$$

$$\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[4]{1+3x}=-\frac{7}{20}x+o\left(x\right).$$

Dal principio di sostituzione degli infinitesimi abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[4]{1+3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{12}x+o\left(x\right)}{-\frac{7}{20}x+o\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{12}x}{-\frac{7}{20}x}=\frac{25}{21}.$$

16) <u>1^o modo</u>. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+x^2\right)+\cos x-e^{x^4}}{x^2\sin\sqrt{x}-x^3\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}-x^2\frac{e^{x^4}-1}{x^4}}{\sin\sqrt{x}-x\cos x}, \tag{36}$$

Ora

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}-x^2\frac{e^{x^4}-1}{x^4}\right)=1-\frac{1}{2}-0\cdot 1=\frac{1}{2} \tag{37}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sin\sqrt{x}-x\cos x\right)=0. \tag{38}$$

Inoltre poiché

$$\sin\sqrt{x}-x\cos x=\sqrt{x}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cos x\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cos x\right)=1>0, \tag{39}$$

si ha che esiste un intorno U di 0 tale che per ogni $x \in U$, $x > 0$,

$$\sin\sqrt{x} - x\cos x > 0.$$

Da (36), (37), (38) abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+x^2\right)+\cos x - e^{x^4}}{x^2\sin\sqrt{x} - x^3\cos x} = +\infty.$$

<u>2^o modo</u>. Da(16), (17), (18) e (19) si ha

$$\ln\left(1+x^2\right) = x^2 + o\left(x^2\right) \quad , \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right),$$

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + o\left(x^4\right) \quad , \quad \mathrm{sen}\sqrt{x} = \sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right).$$

Perciò

$$\ln\left(1+x^2\right)+\cos x - e^{x^4} = \left(x^2 + o\left(x^2\right)\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + \left(1 + x^4 + o\left(x^4\right)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \left(o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right) + x^4 + o\left(x^4\right)\right) = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

e

$$x^2\sin\sqrt{x} - x^3\cos x = x^2\left(\sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right)\right) - x^3\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)$$

$$x^{\frac{5}{2}} + \left(o\left(x^{\frac{5}{2}}\right) - x^3 + \frac{x^5}{2} + o\left(x^5\right)\right) = x^{\frac{5}{2}} + o\left(x^{\frac{5}{2}}\right).$$

Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+x^2\right)+\cos x - e^{x^4}}{x^2\sin\sqrt{x} - x^3\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{x^{\frac{5}{2}} + o\left(x^{\frac{5}{2}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

17) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^{e^x} - e^{2^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{e^x\ln 2} - e^{2^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{2^x}\left(e^{e^x\ln 2 - 2^x} - 1\right), \tag{40}$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\ln 2 - 2^x\right) = \lim_{x\to+\infty} 2^x\left(\left(\frac{e}{2}\right)^x \ln 2 - 1\right) = +\infty.$$

Da quest'ultima e da (40) si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^{e^x} - e^{2^x}\right) = +\infty.$$

18) $\underline{1^o \text{ modo}}$. Abbiamo

$$\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\,\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\,\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\,\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}.$$

Perciò

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\,\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=0.$$

$\underline{2^o \text{ modo.}}$ Da (20) abbiamo

$$\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-1\right)=\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{4}{3x^{2/3}}+o\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right).$$

Perciò

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3x^{2/3}}=0.$$

19) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\sin e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin e^x}{e^x}=1.$$

20) Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sin x)\sin\frac{1}{x+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sin x}{x+e^x}\,\frac{\sin\frac{1}{x+e^x}}{\frac{1}{x+e^x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{e^x}{x}}\,\frac{\sin\frac{1}{x+e^x}}{\frac{1}{x+e^x}}=1\cdot 1=1.$$

21) Risulta

$$|\sin x|^x=e^{x\ln|\sin x|},$$

Consideriamo l'esponente $x\ln|\sin x|$, abbiamo

$$x\ln|\sin x|=x\ln\left(\frac{|\sin x|}{|x|}\,|x|\right)=x\ln\frac{|\sin x|}{|x|}+x\ln|x|\,.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0}x\ln|x|=\lim_{x\to 0}\left(x\frac{\ln|x|}{|x|}\right)=0,$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0}x\ln|\sin x|=\lim_{x\to 0}\left(x\ln\frac{|\sin x|}{|x|}+x\ln|x|\right)=0.$$

Quindi
$$\lim_{x\to 0}|\sin x|^x = 1.$$
22) Risulta
$$(e^x-1)^{\frac{1}{\ln\sin x}} = e^{\frac{\ln(e^x-1)}{\ln\sin x}}.$$
Consideriamo l'esponente $\frac{\ln(e^x-1)}{\ln\sin x}$, abbiamo
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1)}{\ln\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)+\ln x}{\ln\frac{\sin x}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{\ln x}+1}{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x}+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1.$$
23) Poniamo $y=\frac{\pi}{2}-\text{arctag}x$ abbiamo
$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \lim_{y\to 0^+}y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\sin y}\cos y = 1.$$
24) Poniamo $y=x-\pi$ e ricordiamo che $\cos(y+\pi)=-\cos y$, $\sin(y+\pi)=-\sin y$. Abbiamo
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln(-\cos x+\sin x)}{e^{2\sin x}-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(\cos y-\sin y)}{e^{-2\sin y}-1}.$$
Ora possiamo proseguire i due modi
<u>1^o modo</u>. Osserviamo che
$$\frac{\ln(\cos y-\sin y)}{e^{-2\sin y}-1} = \frac{\frac{\ln(1+(\cos y-1)-\sin y)}{(\cos y-1)+\sin y}}{\frac{e^{-2\sin y}-1}{(\cos y-1)+\sin y}} = \frac{\frac{\ln(1+(\cos y-1)-\sin y)}{(\cos y-1)-\sin y}}{\frac{e^{-2\sin y}-1}{-2\sin y}}\,\frac{(\cos y-1)-\sin y}{-2\sin y}.$$
Poiché
$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+(\cos y-1)-\sin y)}{(\cos y-1)-\sin y} = 1,$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{-2\sin y}-1}{-2\sin y} = 1$$
e
$$\lim_{y\to 0}\frac{(\cos y-1)-\sin y}{-2\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos y-1}{y^2}\,\frac{y}{\sin y}y+1\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0+1\right) = \frac{1}{2},$$
abbiamo
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln(-\cos x+\sin x)}{e^{2\sin x}-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\ln(1+(\cos y-1)-\sin y)}{(\cos y-1)-\sin y}}{\frac{e^{-2\sin y}-1}{-2\sin y}}\,\frac{(\cos y-1)-\sin y}{-2\sin y} = \frac{1}{2}.$$
<u>2^o modo</u>. Da (19) abbiamo
$$\ln(\cos y-\sin y) = \ln(1+(\cos y-1)-\sin y)$$

$$= (\cos y - 1) - \sin y + o\left((\cos y - 1) - \sin y\right)$$

e, da (16) e (17),

$$(\cos y - 1) - \sin y = \left(-\frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right) - \left(-y + o\left(y\right)\right) = -y + o\left(y\right),$$

quindi

$$\ln\left(\cos y - \sin y\right) = -y + o\left(y\right).$$

D'altra parte, da (16) e (18) si ha

$$e^{-2\sin y} - 1 = -2\sin y + o\left(-2\sin y\right) = -2y + o\left(y\right).$$

Applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi otteniamo

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\ln\left(-\cos x + \sin x\right)}{e^{2\sin x} - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln\left(\cos y - \sin y\right)}{e^{-2\sin y} - 1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y + o\left(y\right)}{-2y + o\left(y\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{-2y} = \frac{1}{2}.$$