Elementi di meccanica del continuo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

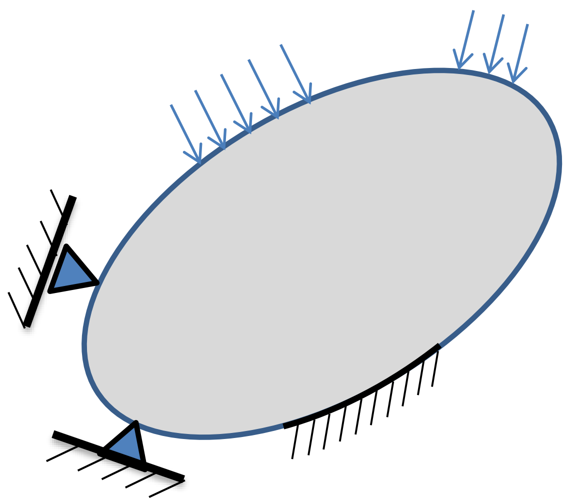
Il principio dei lavori virtuali

Sommario

Nelle lezioni fin qui esposte, relative al nucleo tematico della meccanica del continuo, sono stati esaminati e sviluppati dei concetti fondamentali relativi all'analisi dei continui deformabili.

Data l'importanza di tali argomenti sembra opportuno fare adesso il punto della situazione.

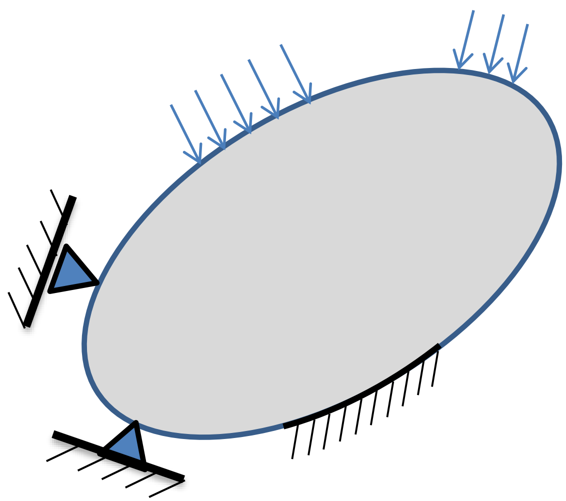
Sommario – i continui deformabili



Si consideri un continuo deformabile di forma qualsiasi. Sia B la sua configurazione, ossia il luogo geometrico delle posizioni occupate dai punti materiali del continuo in esame. Come si è visto, nell'ambito di validità della teoria delle piccole deformazioni, la configurazione deformata del corpo può approssimativamente essere considerata coincidente con la configurazione iniziale e quindi possiamo sinteticamente parlare di configurazione del continuo, senza specificare ulteriormente.

Gli spostamenti associati al campo di deformazione presente nel continuo producono allora una variazione della configurazione che può essere ritenuta trascurabile.

Sommario – i continui deformabili



Sia ∂B la frontiera del continuo in esame. Essa può essere decomposta in una parte, detta ∂B_u, su cui sono presenti dei vincoli cinematici, ed in una parte, detta ∂B_f, su cui sono applicate delle forze. I punti della frontiera su cui non è presente alcun vincolo cinematico e su cui non sono applicati carichi appartengono a ∂B_f in quanto si può dire che su di essi sono applicate delle forze di intensità pari a zero. Per il principio di mutua esclusione si ha

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_u \qquad \partial B_u \cap \partial B_u = \{0\}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sommario – le equazioni di equilibrio e di congruenza

Sono state definite le seguenti condizioni di equilibrio che devono essere soddisfatte in corrispondenza di tutti i punti materiali del continuo in esame:

- equazioni indefinite di equilibrio alla traslazione

$$div(\underline{\boldsymbol{\sigma}})+\mathbf{b}=\mathbf{0} \qquad \forall P \in B$$

- equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}=\underline{\boldsymbol{\sigma}}^T \qquad \forall P \in B$$

- equazioni di equilibrio sulla frontiera caricata

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n}=\mathbf{p} \qquad \forall P \in \partial B_f$$

N.B. nel seguito si assumerà sempre $\underline{\boldsymbol{\sigma}}=\underline{\boldsymbol{\sigma}}^T$ e quindi l'equilibrio alla rotazione sarà identicamente soddisfatto.

Sono state definite le seguenti condizioni cinematiche di congruenza:

- legame spostamenti-deformazioni o legami di congruenza

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad \forall P \in B$$

che in forma compatta si scrivono:

$$\underline{\varepsilon}=sym(\boldsymbol{H}) \qquad \forall P \in B$$

- equazioni di compatibilità sulla parte di frontiera vincolata

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}} \qquad \forall P \in \partial B_u$$

Sommario – le equazioni di equilibrio e di congruenza

Si osservi che:

- le precedenti equazioni di equilibrio sono state ottenute attraverso sole considerazioni di equilibrio e quindi devono essere soddisfatte qualunque sia il campo di deformazione presente nel solido
- le precedenti condizioni di congruenza sono state ottenute attraverso sole considerazioni di carattere cinematico e quindi devono essere soddisfatte qualunque sia lo stato di sollecitazione presente nel materiale.

In ogni caso, anche se le precedenti relazioni sono state ottenute in maniera del tutto indipendente, in uno stesso punto materiale del continuo le equazioni di equilibrio e le equazioni di congruenza devono essere <u>contemporaneamente soddisfatte</u>

$$div(\underline{\boldsymbol{\sigma}})+\mathbf{b}=\mathbf{0} \qquad \forall P \in B$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n}=\mathbf{p} \qquad \forall P \in \partial B_f$$

Equazioni di equilibrio

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = sym(\nabla(\mathbf{u}))$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}} \qquad \forall P \in \partial B_u$$

Equazioni di congruenza

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sommario – le equazioni di equilibrio e di congruenza

Si osservi che:

- le precedenti equazioni di equilibrio sono state ottenute attraverso sole considerazioni di equilibrio e quindi devono essere soddisfatte qualunque sia il campo di deformazione presente nel solido
- le precedenti condizioni di congruenza sono state ottenute attraverso sole considerazioni di carattere cinematico e quindi devono essere soddisfatte qualunque sia lo stato di sollecitazione presente nel materiale.

In ogni caso, anche se le precedenti relazioni sono state ottenute in maniera del tutto indipendente, in uno stesso punto materiale del continuo le equazioni di equilibrio e le equazioni di congruenza devono essere contemporaneamente soddisfatte

$$div(\underline{\sigma})+\mathbf{b}=\mathbf{0} \qquad \forall P \in B \qquad \underline{\varepsilon}=sym(\nabla(\mathbf{u}))$$

$$\underline{\sigma}\,\mathbf{n}=\mathbf{p} \quad \forall P \in \partial B_f \qquad \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}} \quad \forall P \in \partial B_u$$ Condizioni al contorno

Le equazioni di equilibrio o di congruenza relative a punti materiali che si trovano sulla frontiera del continuo si dicono condizioni al contorno. Il tensore di Cauchy permette di calcolare le reazioni vincolari $\mathbf{r}$ sulla parte di frontiera vincolata come segue:

$$\underline{\sigma}\,\mathbf{n}=\mathbf{r} \qquad \forall P \in \partial B_u$$

L'equazione dei lavori virtuali

Di seguito verrà descritto il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) per i continui deformabili. Esso rappresenta uno strumento di analisi molto potente che può essere utilizzato al fine di verificare la condizione di equilibrio di un sistema di forze e di tensioni o la congruenza tra un campo di spostamenti e di deformazioni.

Il PLV trova innumerevoli applicazioni strutturali e, come verrà mostrato nel seguito, può essere utilizzato ad esempio per il calcolo di spostamenti (o rotazioni) di punti particolari di un continuo e per la risoluzione dei sistemi strutturali iperstatici.

Nella presente lezione verrà descritta la formulazione generale del PLV.

Per l'analisi dei sistemi a telaio si utilizzeranno delle particolarizzazioni del PLV sviluppato nella presente lezione.

L'equazione dei lavori virtuali – ipotesi di base

Sia B il dominio di un continuo e sia $\partial B = \partial B_f \cup \partial B_u$ la sua frontiera. Si assuma che sul continuo in esame siano definiti i seguenti sistemi di forze e di deformazione FRA LORO INDIPENDENTI

- sistema forze-tensioni equilibrato, (nel seguito *sistema forze*) ossia un campo di tensioni $\underline{\sigma}_f$, di forze di volume $\mathbf{b}_f$ e di forze di superficie $\mathbf{p}_f$ e di reazioni vincolari $\mathbf{r}_f$ tali che

$$div\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_f\right) + \mathbf{b}_f = \mathbf{0} \qquad \forall P \in \partial B \tag{1}$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_f\,\mathbf{n} = \mathbf{p}_f \qquad \forall P \in \partial B_f \qquad\qquad \underline{\boldsymbol{\sigma}}_f\,\mathbf{n} = \mathbf{r}_f \qquad \forall P \in \partial B_u$$

- sistema spostamenti-deformazioni congruenti, (nel seguito *sistema spostamento*) ossia un campo di spostamenti $\mathbf{u}_s$ e di deformazioni $\underline{\varepsilon}_s$ tali che

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s &= sym\left(\nabla\left(\mathbf{u}_s\right)\right) && \forall P \in \partial B \\ \mathbf{u}_s &= \overline{\mathbf{u}} && \forall P \in \partial B_u \end{aligned} \tag{2}$$

Si osservi che i precedenti campi di forze-tensioni e di spostamenti-deformazioni possono essere tra loro assolutamente indipendenti ed *eventualmente* completamente svincolati dal campo di tensione e di deformazione effettivamente presenti nel continuo. Per tale motivo tali sistemi di forze equilibrate e di spostamenti congruenti si dicono virtuali.

L'equazione dei lavori virtuali – notazioni

Per semplicità di notazione, nel seguito i pedici x, y e z delle componenti di vettori e di tensori saranno sostituiti rispettivamente con gli indici 1, 2 e 3 come segue

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}; \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

I pedici delle componenti dei vettori e dei tensori saranno indicati con gli indici i, j e k.

L'equazione dei lavori virtuali – risultato preliminare

Poiché i precedenti campi di tensione $\underline{\sigma}_f$ e di deformazione $\underline{\varepsilon}_s$ sono definiti nello stesso dominio B, ha senso calcolare la traccia del prodotto $\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s$ come segue

$$tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{f\,ij} \varepsilon_{s\,ji}$$

Per brevità di notazione, nella presente lezione sarà utilizzata la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti nei prodotti, ossia sarà sott'intesa la sommatoria da 1 a 3 rispetto agli indici ripetuti. Utilizzando tale convenzione, la precedente traccia si scrive semplicemente come segue

$$tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) = \sigma_{f\,ij} \varepsilon_{s\,ji}$$

Utilizzando la definizione delle componenti di deformazione e la simmetria del tensore di Cauchy si ha

$$tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) = \sigma_{f\,ij} \varepsilon_{s\,ji} = \sigma_{f\,ij} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{s\,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s\,j}}{\partial x_i}\right) = \sigma_{f\,ij} \frac{\partial u_{s\,j}}{\partial x_i}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

L'equazione dei lavori virtuali – risultato preliminare

Utilizzando la regola di derivazione dei prodotti e la simmetria del tensore di tensione si ha

$$tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) = \sigma_{f\,ij} \frac{\partial u_{s\,j}}{\partial x_i} = \frac{\partial\left(\sigma_{f\,ij} u_{s\,j}\right)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{f\,ij}}{\partial x_i} u_{s\,j}$$

Sinteticamente la precedente relazione si scrive come segue

$$tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) = div\left(\underline{\sigma}_f \cdot \mathbf{u}_s\right) - div\left(\underline{\sigma}_f\right) \cdot \mathbf{u}_s \qquad (3)$$

Il precedente risultato sarà utilizzato nelle dimostrazioni riportate di seguito.

In particolare saranno fornite tre formulaizoni del PLV:

(F1): l’equazione dei lavori virtuali come condizione necessaria di equilibrio e congruenza

(F2): il principio dei lavori virtuali come condizione sufficiente di equilibrio

(F3): il principio dei lavori virtuali come condizione sufficiente di congruenza

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

L'equazione dei lavori virtuali (F1)

Il teorema dei lavori virtuali come condizione necessaria di equilibrio e congruenza si enuncia come segue:

dati un campo di tensioni σ_f, di forze di volume $\mathbf{b}_f$ e di forze di superficie $\mathbf{p}_f$ in equilibrio, ossia tali da soddisfare le (1), ed un campo di spostamenti $\mathbf{u}_s$ e di deformazioni $\underline{\varepsilon}_s$ congruenti, ossia tali da soddisfare le (2), virtuali, ossia arbitrari e tra loro indipendenti purché rispettosi delle (1) e (2), allora essi soddisfano la seguente equazione (detta equazione dei lavori virtuali)

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \overline{\mathbf{u}} ds \qquad (4)$$

È facile verificare che entrambi i membri della precedente equazione hanno la dimensione di un lavoro. Il particolare, il primo membro si indica come *lavoro virtuale interno* (Lvi) mentre il secondo membro si indica come *lavoro virtuale esterno* (Lve). La (4) allora indica l'eguaglianza tra il lavoro virtuale interno ed il lavoro virtuale esterno per ogni campo forze-tensioni equilibrate e spostamenti deformazioni congruenti

$$Lvi = Lve$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

L'equazione dei lavori virtuali (F1)

dim.

L'equazione dei lavori virtuali è la seguente

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \bar{\mathbf{u}} ds$$

utilizzando la (3) si ha

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B div\left(\underline{\sigma}_f \cdot \mathbf{u}_s\right) dv - \int_B div\left(\underline{\sigma}_f\right) \cdot \mathbf{u}_s dv$$

Utilizzando le (1) ed il teorema di Gauss si ottiene

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_{\partial B} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv$$

Utilizzando la seconda riga delle (1) e delle (2) si ha

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \bar{\mathbf{u}} ds$$

■

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il PLV come condizione sufficiente di equilibrio (F2)

Siano σ_f, $\mathbf{b}_f$, $\mathbf{p}_f$ e $\mathbf{r}_f$ dei campi di tensione e di forze di volume e di superficie che soddisfano l'equazione dei lavori virtuali **per ogni** campo di spostamento e deformazione congruente, ossia rispettoso delle (2). Allora il campo di forze e tensioni in esame è equilibrato, ossia soddisfa le (1)

dim.

Per ipotesi si ha

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \overline{\mathbf{u}} ds \qquad \forall \mathbf{u}, \underline{\varepsilon} \text{ congruenti}$$

Utilizzando la (3) (questo è possibile in quanto il sistema spostamento è congruente per ipotesi) ed il teorema di Gauss si ottiene

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B div\left(\underline{\sigma}_f \cdot \mathbf{u}_s\right) dv - \int_B div\left(\underline{\sigma}_f\right) \cdot \mathbf{u}_s dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \overline{\mathbf{u}} ds \qquad \forall \mathbf{u}, \underline{\varepsilon} \text{ congruenti}$$

$$\rightarrow \int_B \left(div\left(\underline{\sigma}_f\right) + \mathbf{b}_f\right) \cdot \mathbf{u}_s dv - \int_{\partial B} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \overline{\mathbf{u}} ds = 0$$

Il PLV come condizione sufficiente di equilibrio (F2)

Raggruppando i termini contenute nella precedente relazione si ha

$$\int_B \left(div\left(\underline{\sigma}_f\right)+\mathbf{b}_f\right)\cdot\mathbf{u}_s dv+\int_{\partial B_f}\left(\mathbf{p}_f-\underline{\sigma}_f\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{u}_s ds+\int_{\partial B_u}\left(\mathbf{r}_f-\underline{\sigma}_f\mathbf{n}\right)\cdot\bar{\mathbf{u}}ds=0 \qquad \forall\mathbf{u},\underline{\varepsilon}\ \text{congruenti}$$

Per la generalità del campo di deformazioni e di spostamenti si ha

$$div\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_f\right)+\mathbf{b}_f=\mathbf{0} \quad \forall P\in\partial B$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_f\,\mathbf{n}=\mathbf{p}_f \quad \forall P\in\partial B_f$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_f\,\mathbf{n}=\mathbf{r}_f \quad \forall P\in\partial B_u$$

Il PLV come condizione sufficiente di congruenza (F3)

Siano $\mathbf{u}_s$ ed $\underline{\varepsilon}_s$ dei campi di spostamento e di deformazione che soddisfano l'equazione dei lavori virtuali **per ogni** campo di forze di volume e di superficie e di tensioni equilibrati, ossia rispettosi delle (1). Allora i campi di spostamento e di deformazione sono congruenti, ossia soddisfano le (2)

dim.

Per ipotesi si ha

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \bar{\mathbf{u}} ds \qquad \forall \mathbf{b}, \mathbf{p}, \underline{\sigma} \text{ equilibrati}$$

Si indichi con $\hat{\underline{\varepsilon}}$ il campo di deformazione congruente con il campo si spostamento $\mathbf{u}$, ossia tale che

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = sym\left(\nabla \mathbf{u}_s\right)$$

Il primo integrale a secondo membro dell'equazione dei lavori virtuali si può scrivere come segue

$$\int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds = \int_{\partial B_f} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s ds = \int_{\partial B} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s ds - \int_{\partial B_u} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s ds$$

Il PLV come condizione sufficiente di congruenza (F3)

Sostituendo il precedente risultato nell'equazione dei lavori virtuali si ha

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \left(\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_s\right) ds \qquad \forall \mathbf{b}, \mathbf{p}, \underline{\sigma} \text{ equilibrati}$$

Utilizzando la (3) nella precedente relazione si ottiene

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}\right) dv + \int_{\partial B_u} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \left(\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_s\right) ds \qquad \forall \mathbf{b}, \mathbf{p}, \underline{\sigma} \text{ equilibrati}$$

Raggruppando si ha

$$\int_B tr\left[\underline{\sigma}_f \cdot \left(\hat{\underline{\varepsilon}} - \underline{\varepsilon}_s\right)\right] dv + \int_{\partial B_u} \underline{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \left(\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_s\right) ds \qquad \forall \mathbf{b}, \mathbf{p}, \underline{\sigma} \text{ equilibrati}$$

Per la generalità del campo di tensione si ha

$$\underline{\varepsilon}_s = \hat{\underline{\varepsilon}} = sym\left(\nabla \mathbf{u}_s\right) \ \forall P \in B \qquad \mathbf{u}_s = \overline{\mathbf{u}} \ \forall P \in \partial B_u$$

Ossia, i campi di deformazione e di spostamento considerati inizialmente sono congruenti

L'equazione dei lavori virtuali

OSSERVAZIONE 1

Si noti che l'espressione del PLV non dipende dalla risposta meccanica del materiale costituente il sistema strutturale in esame. Nella sua formulazione sono state infatti utilizzate solo le equazioni di equilibrio e di congruenza, prescindendo dalla risposta meccanica del materiale. Il suo ambito di validità dipende allora dalla validità delle ipotesi su cui si basa e quindi dalla validità delle ipotesi formulate per la determinazione delle equazioni di equilibrio e di congruenza. In particolare, visto che nella forlulazione di tali equazioni è stato ipotizzato che la configurazione deformata del continuo coincide con quella iniziale, l'espressione del PLV così come riportata nella presente lezione è valida nell'ambito delle piccole deformazioni.

OSSERVAZIONE 2

È stato dimostrato (F1) che l'equazione dei lavori virtuali è soddisfatta da un qualunque campo di "forze e tensioni" equilibrate e di "spostamenti e deformazioni" congruenti. In particolare, il campo di "forze e tensioni" e di "spostamenti e deformazioni" presenti in un continuo deformato in equilibrio sono rispettivamente equilibrati e congruenti. Pertanto tali campi devono soddisfare l'equazione dei lavori virtuali.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

L'equazione dei lavori virtuali per corpi rigidi

Come si è detto, l'equazione dei lavori virtuali

$$\int_B tr\left(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s\right) dv = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \bar{\mathbf{u}} ds$$

rappresenta l'uguaglianza fra il lavoro virtuale interno ed il lavoro virtuale esterno di un sistema forze-tensioni equilibrato ed un sistema spostamenti-deformazioni congruenti eventualmente indipendenti fra loro.

Tale equazione assume una forma molto semplice per i sistemi rigidi.

Si definiscono sistemi rigidi quelli non suscettibili di deformazioni. Per tali sistemi il lavoro virtuale interno è quindi sempre nullo e l'equazione dei lavori virtuali si particolarizza come segue

$$Lvi = 0 \rightarrow Lve = \int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \bar{\mathbf{u}} ds = 0$$

La precedente espressione trova molte applicazioni ad esempio nel calcolo delle reazioni vincolari di un sistema in equilibrio

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831