

Programma di Complementi di Algebra A.A.
2018/2019
Teoria dei Numeri

1. Conseguenze della fattorizzazione in \mathbb{Z} . Esistono infiniti primi. Radici quadrate di interi. Primi di Fermat e di Mersenne.
2. Teorema di Wilson. Se $n \in \mathbb{N}$ è composto allora $(n - 1)! \not\equiv -1 \pmod{n}$. Terne pitagoriche.
3. L'equazione diofantea $x^4 + y^4 = z^2$ non ha soluzioni non banali. Equazione di Fermat per esponente 4.
4. L'equazione $x^2 - dy^2 = 1$ ha infinite soluzioni, per ogni $d \in \mathbb{N}$ libero da quadrati.
5. Problema di Frobenius. Esistenza di un minimo intero non rappresentabile.
6. Teorema di Sylvester.
7. Valutazioni p -adiche. Calcolo di $\nu_p(n!)$.
8. Funzioni moltiplicative. Calcolo delle funzioni $\tau(n) = |\{d \mid d \mid n\}|$ e $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$. Caratterizzazione dei numeri perfetti pari.
9. Se f è moltiplicativa, allora $F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$ è moltiplicativa.
10. Anello delle funzioni aritmetiche. Funzione di Möbius.
11. $\sum_{d \mid n} \mu(d) = \delta_{1,n}$.
12. Formula di inversione di Möbius. La convoluzione di funzioni moltiplicative è moltiplicativa.
13. $\varphi(n) = n \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d}$.
14. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
15. Valutazione di $\sum_{i \leq x} \varphi(i)$.

16. Calcolo della probabilità che due interi siano coprimi.
17. La serie dei reciproci dei primi è divergente. Funzioni θ e ψ di Čebichev.
18. Teorema di Čebichev. Postulato di Bertrand.
19. Ogni naturale si scrive come somma di quattro quadrati.