Elementi di meccanica del continuo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Il legame costitutivo per un solido elastico lineare isotropo

Sommario

Nelle lezioni fin qui esposte all'interno del nucleo tematico della meccanica del continuo, sono state esaminate e sviluppate le condizioni di equilibrio e di congruenza che devono essere soddisfatte in un generico punto materiale di un continuo deformabile. In particolare, le condizioni di equilibrio sono state ottenute utilizzando solo considerazioni di equilibrio, mentre le equazioni di congruenza sono state ottenute attraverso sole considerazioni cinematiche. Non è stata finora considerata, nel presente nucleo tematico, la relazione che intercorre fra lo stato tensionale e lo stato deformativo presenti in un punto materiale. Tali relazioni, che definiscono la risposta meccanica dei mezzi continui, vengono dette relazioni costitutive e saranno sviluppate nella presente lezione per un particolare tipo di materiale (**elastico lineare isotropo**).

I legami costitutivi

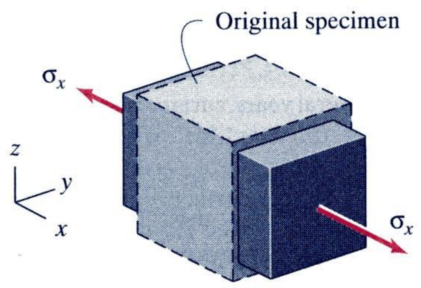
Il termine *"elastico"* significa che in un ciclo di carico e scarico il materiale non manifesta deformazioni residue. In pratica un materiale ha un comportamento elastico (anche non lineare) se, partendo da una configurazione iniziale indeformata, alla fine di un qualunque ciclo di carico e scarico esso ritorna nella sua configurazione iniziale.

Il termine *"lineare"* indica invece che esiste una proporzionalità diretta fra forza e spostamento o, più in generale, fra il valore di tensione presente in un punto materiale ed il valore di deformazione.

Un materiale è *isotropo* se la relazione tensioni/deformazioni non dipende dalla direzione dell'azione

I legami costitutivi

Si è visto che, per un solido a comportamento elastico lineare, le relazioni che esistono fra tensioni normali e deformazioni assiali sono le seguenti

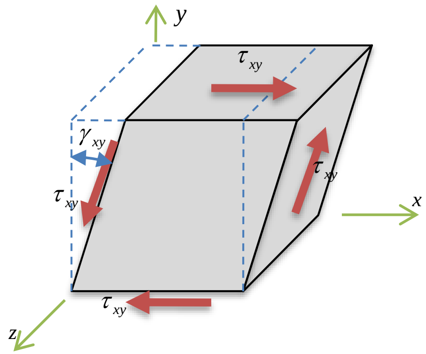


$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E}$$

E = modulo di Young
ν = coefficiente di Poisson

mentre la relazione che intercorre fra le tensioni tangenziali e gli scorrimenti angolari è la seguente



$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

G = modulo di rigidezza a taglio

I legami costitutivi – osservazioni

Il modulo di Young ed il modulo di rigidezza tangenziale rappresentano il termine di proporzionalità fra il valore delle tensioni (normali o tangenziali) e delle deformazioni (deformazioni assiali o scorrimenti angolari) presenti in un punto materiale.

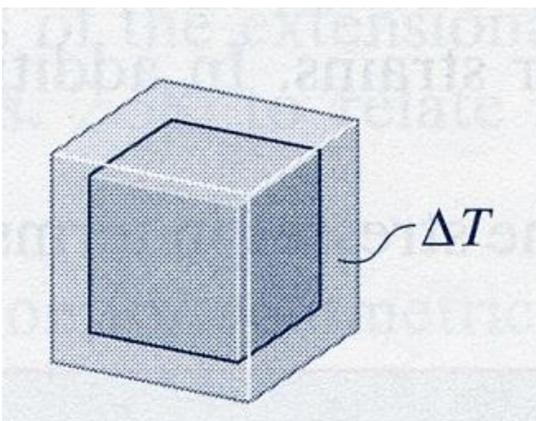
È evidente che nei processi meccanici fisicamente ammissibili, *ad incrementi di deformazione corrispondono incrementi di tensione* (gli incrementi di tensione ed i relativi incrementi di deformazione hanno segno concorde) e pertanto i moduli elastici del materiale devono essere positivi

$$E > 0$$

$$G > 0$$

I legami costitutivi – variazioni termiche

Si è visto che una variazione termica induce nei materiali una variazione di volume che può essere ritenuta uniforme (deformazioni uguali in tutte le direzioni). Entro certi limiti, per molti materiali esiste una proporzionalità diretta tra la variazione termica e le deformazioni assiali che essa induce



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha\,\Delta t$$

α = coefficiente di dilatazione termica
Δt = variazione termica

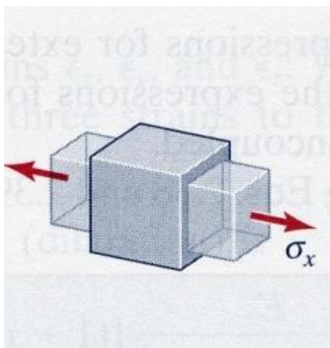
In generale si ha che riscaldando un solido esso aumenta il suo volume, mentre raffreddandolo esso diminuisce il suo volume. Pertanto il coefficiente di dilatazione termica deve essere positivo

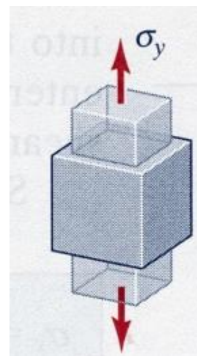
$$\alpha > 0$$

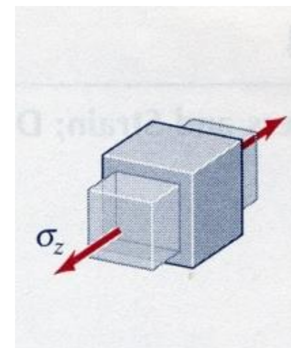
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

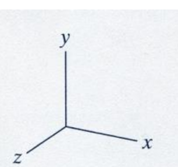
I legami costitutivi

Un solido si dice isotropo se la sua risposta alle sollecitazioni (meccaniche, termiche, …) non dipende dalla direzione del carico. Si ha allora in questo caso





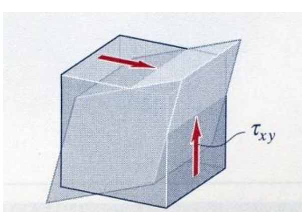




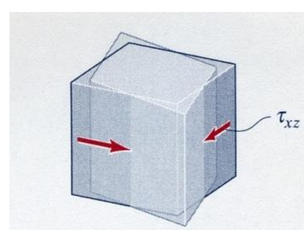
$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = E\varepsilon_y$$
$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y$$

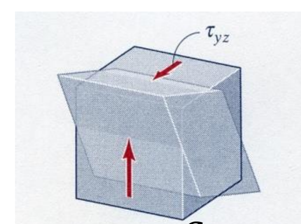
$$\sigma_z = E\varepsilon_z$$
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$



$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$



$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

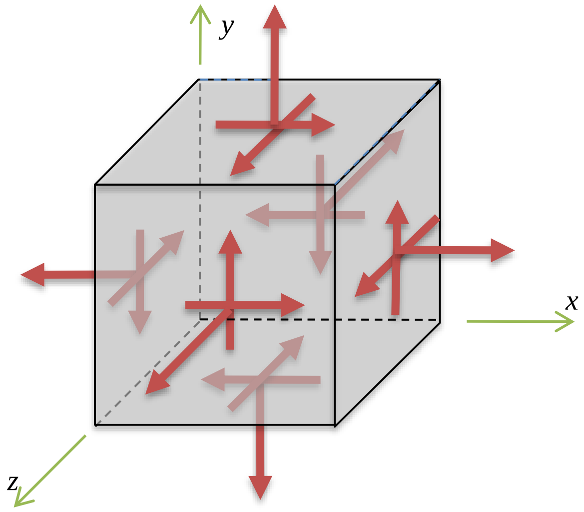


$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La legge di Hooke generalizzata

Si consideri adesso un elemento di volume infinitesimo soggetto alle componenti di tensione σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} ed alla variazione di volume Δt come schematizzato in figura. Nell'ambito di validità della teoria elastica lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti ossia la risposta del materiale ad azioni combinate è uguale alla sovrapposizione lineare della risposta del materiale alle singole azioni.



Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La legge di Hooke generalizzata

Le deformazioni indotte dalle singole azioni considerate è sintetizzata nella seguente tabella

Azione	Deformazione					
	ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}	γ_{xz}	γ_{yz}
σ_x	σ_x / E	$-\nu\,\sigma_x / E$	$-\nu\,\sigma_x / E$	0	0	0
σ_y	$-\nu\,\sigma_y / E$	σ_y / E	$-\nu\,\sigma_y / E$	0	0	0
σ_z	$-\nu\,\sigma_z / E$	$-\nu\,\sigma_z / E$	σ_z / E	0	0	0
τ_{xy}	0	0	0	τ_{xy} / E	0	0
τ_{xz}	0	0	0	0	τ_{xz} / E	0
τ_{yz}	0	0	0	0	0	τ_{yz} / E
Δt	$\alpha\Delta t$	$\alpha\Delta t$	$\alpha\Delta t$	0	0	0

La legge di Hooke generalizzata (forma inversa)

Sovrapponendo allora i singoli effetti deformativi si ottengono le seguenti relazioni

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) + \alpha\,\Delta t \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right) + \alpha\,\Delta t \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right) + \alpha\,\Delta t \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Esse vengono dette "*legge di Hooke generalizzata*" e rappresentano le relazioni costitutive per un generico materiale elastico lineare isotropo. Attraverso le (1) è possibile calcolare le componenti di deformazione corrispondenti ad un determinato stato tensionale ed alle eventuali distorsioni termiche agenti in un punto materiale del continuo in esame.

Le costanti E, ν e G sono delle caratteristiche del materiale e possono essere determinate mediante prove sperimentali.

La legge di Hooke generalizzata (forma diretta)

È facile dimostrare che le precedenti relazioni sono invertibili se $\nu \neq 0{,}5$ e $\nu \neq -1{,}0$. In tal caso si ottengono le seguenti relazioni

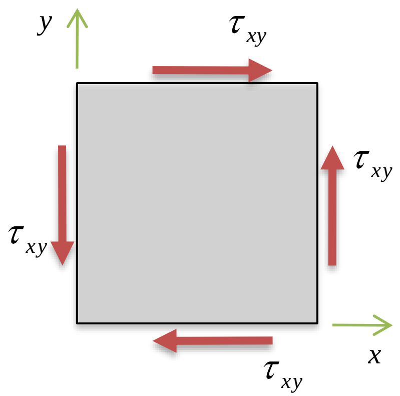
$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\ \Delta t \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\ \Delta t \\
\sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\ \Delta t \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz}
\end{aligned} \qquad (2)$$

che rappresentano la *legge di Hooke generalizzata* scritta in forma diretta. Attraverso le precedenti relazioni è possibile calcolare le componenti di tensione corrispondenti alle generiche componenti di deformazione ed alla distorsione termica presente in un dato punto materiale del continuo in esame.

Di seguito verranno mostrati due esempi dai quali si evince che i valori del coefficiente di Poisson che non permettono l'invertibilità dei legami costitutivi sono tali da simulare comportamenti meccanici del tutto inverosimili (devono comunque essere esclusi perché in contrasto con il comportamento meccanico dei materiali).

Esempio 1 – puro taglio

Si consideri un elemento di volume sollecitato da puro taglio come indicato in figura. Le componenti del tensore di tensione sono in questo caso le seguenti:

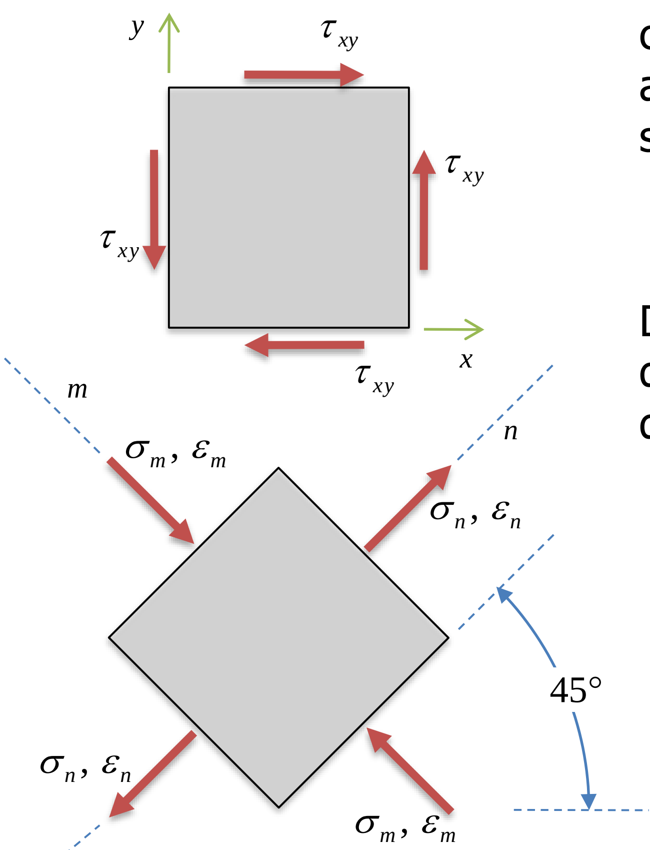


$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le componenti di deformazione corrispondenti a tale stato tensionale si calcolano attraverso la legge di Hooke come segue

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_x = 0 & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y = 0 & \gamma_{xz} = 0 \\ \varepsilon_z = 0 & \gamma_{yz} = 0 \end{array} \qquad (4)$$

Esempio 1 – puro taglio



Utilizzando il metodo analitico o il metodo della circonferenza di Mohr, è facile verificare che in corrispondenza delle giaciture inclinate di 45° rispetto agli assi del sistema di riferimento in figura si hanno solo le seguenti componenti di tensione e di deformazione

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \tau_{xy} \qquad & \varepsilon_n &= \gamma_{xy}/2 \\ \sigma_m &= -\tau_{xy} \qquad & \varepsilon_m &= -\gamma_{xy}/2 \end{aligned} \tag{5}$$

D'altronde, utilizzando le leggi di Hooke generalizzate, la deformazione assiale nella direzione n si calcola in funzione delle tensioni σ_n e σ_m come segue

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \nu\sigma_m\right)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 1 – puro taglio

Utilizzando la (5) e la (4), la precedente equazione si esplicita come segue

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \nu\sigma_m\right) \rightarrow \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{E}\left(1+\nu\right)\tau_{xy} = \frac{1}{E}\left(1+\nu\right)G\gamma_{xy}$$

$$\rightarrow G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \qquad (6)$$

La precedente rappresenta una relazione fra i parametri materiali che abbiamo considerato finora e che caratterizzano il comportamento meccanico di un materiale elastico lineare isotropo.

Come è stato evidenziato in una precedente slide, affinché il modulo di Young ed il modulo di rigidezza tangenziale simulino comportamenti del materiale in accordo con l'evidenza fisica, devono essere entrambi positivi e quindi dalla (6) si ha

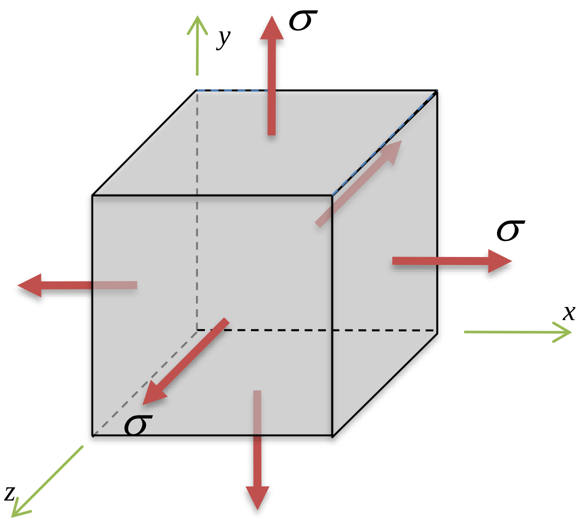
$$1+\nu > 0 \quad \rightarrow \quad \nu > -1$$

La precedente relazione esclude quindi uno dei due valori del coefficiente di Poisson che non permettono l'invertibilità della legge di Hooke generalizzata.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 2 – stato tensionale sferico

Si consideri un elemento di volume infinitesimo sollecitato da sole tensioni normali di uguale intensità in corrispondenza di tutte le giaciture normali agli assi del sistema di riferimento. Le componenti del tensore di tensione sono quelle indicate di seguito

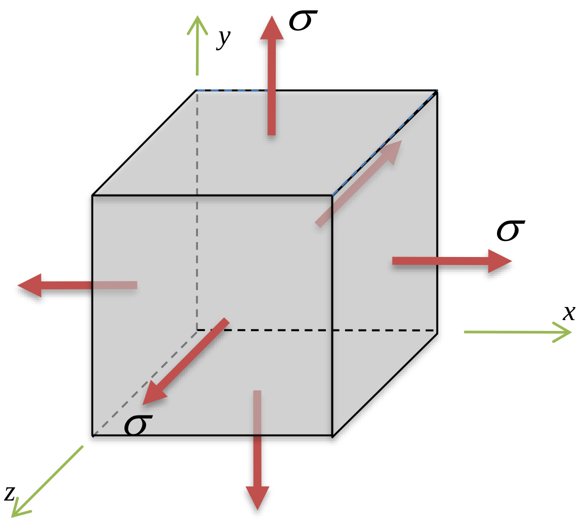


$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Uno stato tensionale siffatto si dice sferico. È facile verificare che in corrispondenza di una qualunque giacitura è presente solo una tensione normale di intensità σ. Le componenti di deformazione corrispondenti a tale stato tensionale si calcolano attraverso la legge di Hooke come segue

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{E}(1-2\nu)\sigma \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Esempio 2 – modulo di rigidezza volumetrico



Ricordando che la variazione specifica di volume è pari alla traccia del tensore delle piccole deformazioni

$$tr(\underline{\varepsilon}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

dalle precedenti relazioni si ha

$$tr(\underline{\varepsilon}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma$$

$$\rightarrow \sigma = \underbrace{\frac{E}{3(1-2\nu)}}_{c_v} tr(\underline{\varepsilon}) = c_v\, tr(\underline{\varepsilon})$$

Nella precedente relazione, c_v indica il modulo di elasticità volumetrica

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 2 – stato tensionale sferico

In accordo con l'evidenza fisica, per il problema in esame ci si aspetta che, a stati tensionali isotropi di trazione corrispondano espansioni dell'elemento in esame e quindi valori di deformazione positiva e, viceversa, a stati tensionali isotropi di compressioni corrispondano contrazioni dell'elemento in esame. Pertanto deve essere

$$c_v = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \quad \rightarrow \quad \nu < \frac{1}{2}$$

Relazioni fra i parametri meccanici

Riassumendo, la legge di Hooke generalizzata modella il comportamento di materiali elastici lineari isotropi attraverso i parametri materiali E, G e ν che possono essere determinati sperimentalmente. Il modulo elastico E può essere determinato mediante una prova di carico monoassiale, mentre il modulo di rigidezza a taglio G può essere determinato attraverso la prova di torsione che sarà descritta successivamente.

I parametri elastici sono legati dalla seguente relazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{7}$$

Si è visto che, affinché la legge di Hooke generalizzata simuli comportamenti dei materiali in accordo con le evidenze sperimentali, i parametri materiali devono soddisfare le seguenti diseguaglianze (costitutive)

$$E > 0; \qquad G > 0; \qquad -1 < \nu < \frac{1}{2} \tag{8}$$

Per tali valori i legami costitutivi definiti dalla legge di Hooke sono sempre invertibili.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Relazioni fra i parametri meccanici

Si osservi che, benché non vi sia teoricamente nessun limite costitutivo, i materiali strutturali presentano un coefficiente di Poisson positivo. Pertanto, in genere si pone:

$$0 \leq \nu < \frac{1}{2} \tag{9}$$

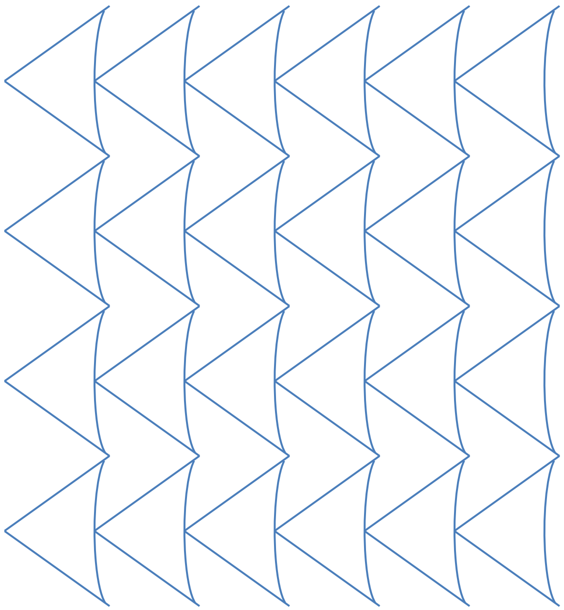
Si osservi inoltre che valori del coefficiente di Poisson nullo rappresentano una condizione, puramente teorica, di materiali che in una prova di carico monoassiale non hanno alcuna contrazione trasversale. Si può dimostrare inoltre che valori del coefficiente di Poisson pari a $0{,}5$ corrispondono a materiali incomprimibili ($c_v \to \infty$). In effetti i materiali perfettamente incomprimibili non esistono: alcuni materiali quali la gomma presentano valori del coefficiente di Poisson intorno a 0,49.

Utilizzando la (9) e la (7) si ottiene che il valore del modulo di rigidezza a taglio deve essere compreso fra i seguenti estremi

$$\frac{E}{3} < G \leq \frac{E}{2}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Materiali a coefficiente di Poisson negativo



Per completezza (v. Nunziante, Gambarotta, Tralli a pag. 381) si riporta che esistono materiali sintetici, aventi una particolare struttura come quella schematizzata in figura, che macroscopicamente manifestano un comportamento paragonabile con quello di un materiale avente coefficiente di Poisson negativo.

I legami costitutivi

Notazione di Voigt

La legge di Hooke generalizzata - Sintesi

I legami costitutivi per un solido elastico lineare isotropo possono essere espressi nelle seguenti forme

Forma diretta

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\,\Delta t \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\,\Delta t \\
\sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\,\Delta t \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}
\end{aligned} \qquad (1)$$

Forma inversa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta t \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta t \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\,\Delta t \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}
\end{aligned} \qquad (2)$$

Per i parametri materiali valgono le seguenti relazioni

$$E > 0 \qquad G > 0 \qquad 0 \le \nu < \frac{1}{2} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{E}{3} < G \le \frac{E}{2} \qquad (3)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La legge di Hooke in notazione di Voigt

Le espressioni della legge di Hooke, sia in forma diretta che in forma inversa, risultano molto snelle se espresse in una notazione vettoriale detta notazione di Voigh. Si introducono a tale scopo le seguenti colonne contenenti rispettivamente le componenti di tensione, di deformazione totale e di deformazione termica

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad \{\underline{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\} = \begin{bmatrix} \alpha\,\Delta t \\ \alpha\,\Delta t \\ \alpha\,\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

I primi tre elementi dei precedenti vettori di tensione e di deformazione coincidono con i termini contenuti sulla diagonale principale dei rispettivi tensori. Gli ultimi tre elementi coincidono invece con i termini fuori diagonale. Si osservi che le componenti fuori diagonale del tensore di deformazione sono raddoppiati nella notazione di Voigt

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La legge di Hooke in notazione di Voigt

È facile verificare che le equazioni costitutive (1) e (2) possono essere espresse nelle seguenti forme matriciali

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[S]} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} = [S](\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_a\})$$

$$\{\underline{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}}_{[S]^{-1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [S]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_a\}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema del solido elastico lineare isotropo

Schematizzazione del problema del solido elastico lineare

Condizioni al contorno

$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall P \in \partial B_u$ cinematiche

$\underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \forall P \in \partial B_f$ statiche

Forze di volume

$\mathbf{b}$

Operatore differenziale

Spostamenti

$\mathbf{u}$

equilibrio

$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{b}$

congruenza

$\{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u}$

legami costitutivi

$\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} = [S](\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\})$

$\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [S]^{-1}\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} + \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\}$

Reazioni vincolari esterne

$\mathbf{r}$

equilibrio

$\underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n} = \mathbf{r} \qquad \forall P \in \partial B_u$

Tensioni

$\{\underline{\sigma}\}$

Deformazioni

$\{\underline{\varepsilon}\}$

Dati

Incognite

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Rem. Il problema strutturale per i sistemi reticolari generici

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
$f=gdl-v$	gdl non vincolati esternamente

Dati

Incognite

Reazioni vincolari esterne $\underline{R}$

$\underline{F}$

Operatore algebrico

Spostam. nodali $\underline{u}_f$

Cedim. vincolari $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente

$$\underset{[v\times 1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

$$\underset{[f\times 1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times f]}{[C_f]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f}$$

congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}}$$

Sforzi normali $\underline{N}$

legami costitutivi

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[D]}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} + \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}$$

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}\right)$$

Allungamenti delle aste

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times f]}{[C_f]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831