

Elementi di meccanica del continuo



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



La legge di Hooke per gli stati piani di
tensione e di deformazione



Gli stati piani di tensione e di deformazione

Come si è detto nelle precedenti lezioni, gli stati piani di tensione o di deformazione sono presenti nelle applicazioni ordinarie di molti elementi strutturali. Per tale motivo, al fine di renderli operativi e direttamente applicabili, si particolarizzano le equazioni costitutive a tali stati tensionali e deformativi piani.



I legami costitutivi per gli stati piani di deformazione

Consideriamo inizialmente gli stati piani di deformazione ed ipotizziamo per semplicità che il piano di deformazione sia il piano xy . È ben noto che, in questo caso, le componenti del tensore delle piccole deformazioni sono le seguenti

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È facile verificare, per sostituzione diretta, che in questo caso le equazioni costitutive si particolarizzano come segue

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta t \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta t \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta t \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_y + (1+\nu)\alpha \Delta t \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_x + (1+\nu)\alpha \Delta t \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$



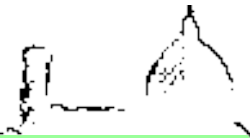
I legami costitutivi per gli stati piani di deformazione

Analizzando le precedenti equazioni costitutive si osserva che:

- ad uno stato piano di deformazione non corrisponde uno stato piano di tensione: il valore di σ_z è infatti in generale non nullo;
- tutte le componenti di deformazione dipendono solo dalle tensioni presenti sul piano di deformazione: non dipendono esplicitamente dalla tensione σ_z
- dalle (4) si ottiene la seguente relazione:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E \alpha \Delta t$$

pertanto, anche se la tensione σ_z è in generale non nulla, essa non è una variabile primaria del problema.



I legami costitutivi per gli stati piani di deformazione

Per i motivi esposti nella precedente slide, al fine di rappresentare in notazione di Voigt le equazioni costitutive per un solido elastico lineare isotropo in stato piano di deformazione, si introducono i seguenti vettori delle componenti di tensione e di deformazione

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \{\underline{\epsilon}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \{\underline{\epsilon}_a\} = \alpha \Delta t (1 + \nu) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le espressioni costitutive riportate nella precedente slide si esprimono come segue

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[S]} \left(\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \alpha \Delta t (1 + \nu) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \longrightarrow \quad \{\underline{\sigma}\} = [S] (\{\underline{\epsilon}\} - \{\underline{\epsilon}_a\})$$

$$\{\underline{\epsilon}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{[S]^{-1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \alpha \Delta t (1 + \nu) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \{\underline{\epsilon}\} = [S]^{-1} \{\underline{\sigma}\} + \{\underline{\epsilon}_a\}$$



I legami costitutivi per gli stati piani di tensione

Consideriamo adesso gli stati piani di tensione ed ipotizziamo per semplicità che il piano delle tensioni sia xy . È ben noto che, in questo caso, le componenti del tensore di Cauchy sono le seguenti

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È facile verificare, per sostituzione diretta, che in questo caso le equazioni costitutive si particolarizzano come segue

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta t \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta t \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha \Delta t \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha \Delta t \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta t \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$



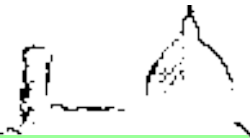
I legami costitutivi per gli stati piani di tensione

Analizzando le precedenti equazioni costitutive si osserva che:

- ad uno stato piano di tensione non corrisponde uno stato piano di deformazione: il valore di ε_z è infatti in generale non nullo;
- tutte le componenti di tensione dipendono solo dalle deformazioni presenti sul piano di deformazione: non dipendono esplicitamente dalla deformazione ε_z
- dalle (7) si ottiene la seguente relazione:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha \Delta t$$

pertanto, anche se la deformazione ε_z è in generale non nulla, essa non è una variabile primaria del problema.



I legami costitutivi per gli stati piani di tensione

Per i motivi esposti nella precedente slide, al fine di rappresentare in notazione di Voigt le equazioni costitutive per un solido elastico lineare isotropo in stato piano di tensione, si introducono i seguenti vettori delle componenti di tensione e di deformazione

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \{\underline{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \{\underline{\varepsilon}_a\} = \alpha \Delta t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le espressioni costitutive riportate nella precedente slide si esprimono come segue

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}}_{[S]} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \alpha \Delta t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \longrightarrow \quad \{\underline{\sigma}\} = [S](\{\underline{\varepsilon}\} - \{\underline{\varepsilon}_a\})$$

$$\{\underline{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}}_{[S]^{-1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \alpha \Delta t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \{\underline{\varepsilon}\} = [S]^{-1}\{\underline{\sigma}\} + \{\underline{\varepsilon}_a\}$$



La legge di Hooke generalizzata

Per quanto è stato esposto nelle precedenti slide, la legge di Hooke generalizzata, sia in forma diretta che in forma inversa, può essere formalmente espressa come segue

$$\{\underline{\sigma}\} = [S](\{\underline{\epsilon}\} - \{\underline{\epsilon}_a\})$$

$$\{\underline{\epsilon}\} = [S]^{-1} \{\underline{\sigma}\} + \{\underline{\epsilon}_a\}$$

I termini contenuti nelle precedenti relazioni si particolarizzano in funzione degli stati tensionali o deformativi presenti nel punto materiale in esame come indicato nelle precedenti slide.



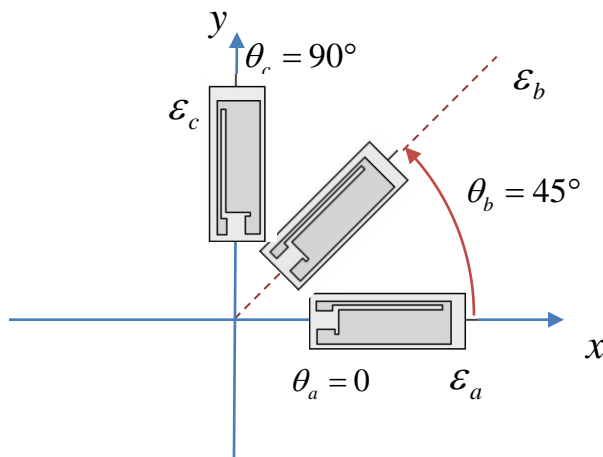
Esercizio

Un elemento in acciaio ($E=210GPa$, $G=70GPa$), è sollecitato in stato piano di tensione. Attraverso la rosetta di estensimetri indicata in figura sono stati misurati i seguenti valori di deformazione:

$$\varepsilon_a = 175 \mu$$

$$\varepsilon_b = 140 \mu$$

$$\varepsilon_c = -105 \mu$$

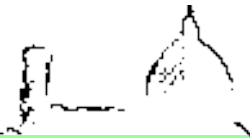


Si determinino i valori e le direzioni principali di tensione.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$$

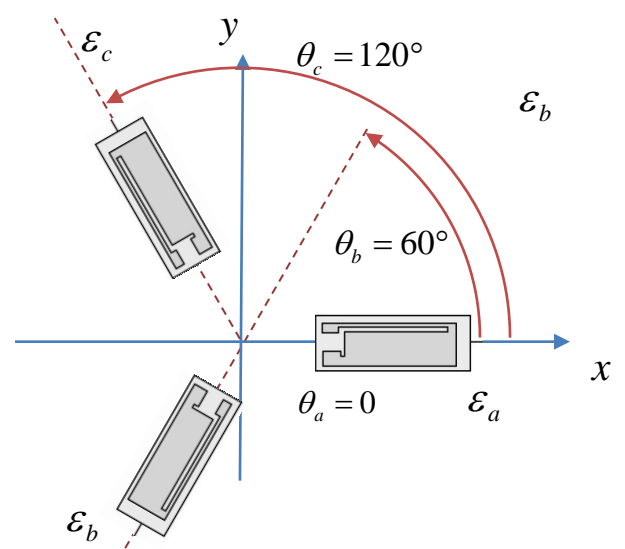


Esercizio

Un elemento in acciaio ($E=210GPa$, $G=70GPa$), è sollecitato in stato piano di deformazione. Attraverso la rosetta di estensimetri indicata in figura sono stati misurati i seguenti valori di deformazione:

- $\epsilon_a = -155 \mu$
- $\epsilon_b = 20 \mu$
- $\epsilon_c = -170 \mu$

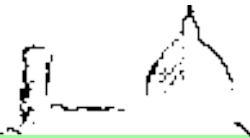
Si determinino i valori e le direzioni principali di tensione.



$$\epsilon_x = \epsilon_a$$

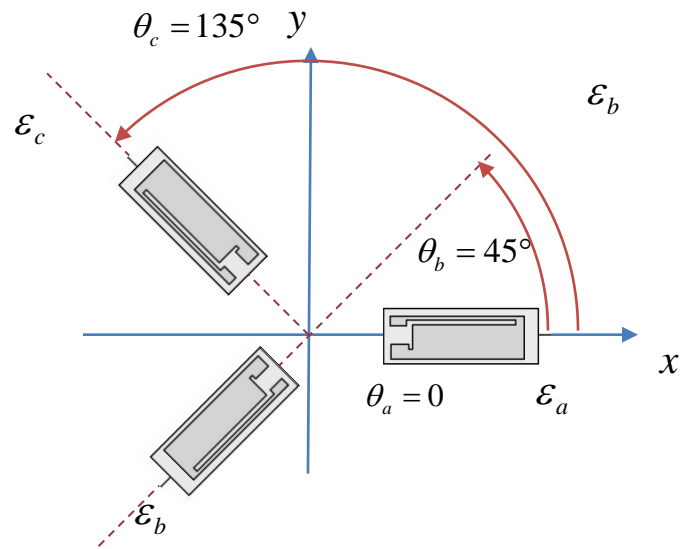
$$\epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c)$$



Esercizio

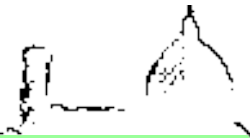
Un elemento in acciaio ($E=210GPa$, $G=70GPa$), è sollecitato in stato piano di deformazione. Attraverso la rosetta di estensimetri indicata in figura sono stati misurati i seguenti valori di deformazione:



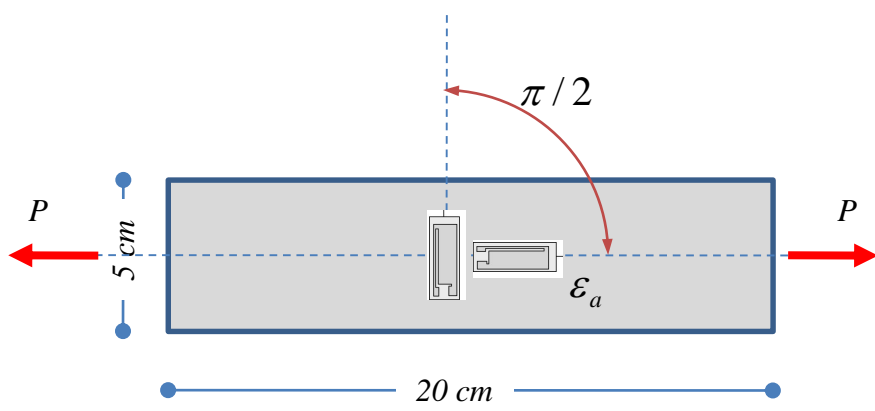
- $\epsilon_a = -25\mu$
- $\epsilon_b = -200\mu$
- $\epsilon_c = -100\mu$

Si determinino i valori e le direzioni principali di tensione.

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c \end{aligned}$$



Esercizio

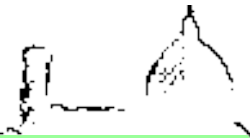


Un provino prismatico avente sezione trasversale quadrata di lato 5 cm ed alto 20 cm , è compresso da un carico $P=20\text{ kN}$ applicato alle basi. Le superfici laterali sono invece scariche. Su una faccia laterale del provino, in un punto abbastanza distante dalle basi, sono stati applicati due strain gauge, come schematizzato in figura, i quali misurano i seguenti valori di deformazione:

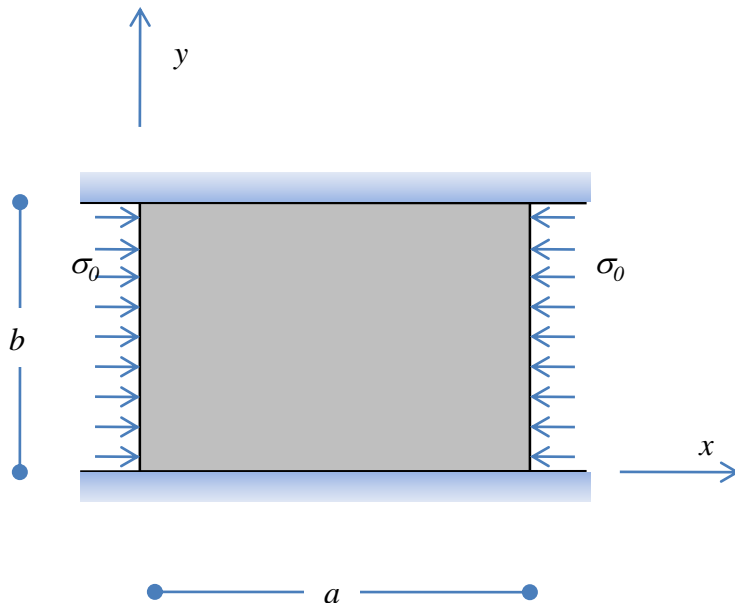
$$\varepsilon_a = 320\mu$$

$$\varepsilon_b = -40\mu$$

Nell'ipotesi che il materiale abbia un comportamento elastico lineare isotropo, si determinino i suoi parametri costitutivi (E, ν, G).

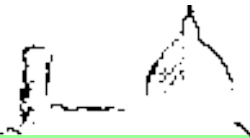


Esercizio – Craig p. 111

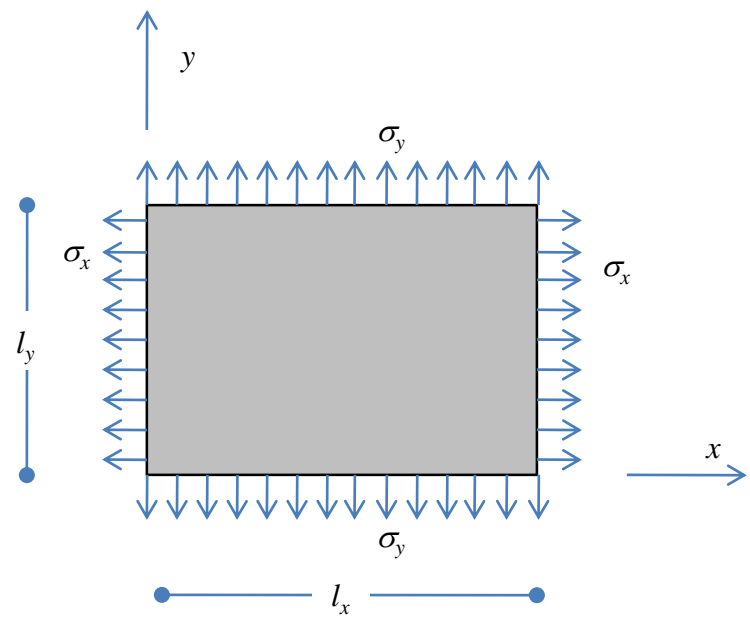


Un blocco di materiale elastico lineare isotropo è confinato da due superfici rigide e lisce che applicano una compressione $\sigma_x = -\sigma_0$ come indicato in figura. Le uniche altre tensioni non nulle sono le tensioni normali σ_y indotte dalle superfici di confinamento poste a $y=0$ e $y=b$.

- Si determini il valore della tensione di confinamento σ_y
- Si determini la variazione Δa li lunghezza del provino in direzione x
- Si determini la variazione Δt di spessore t nella direzione z

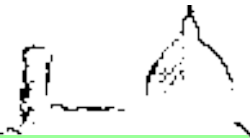


Esercizio – Craig p. 111

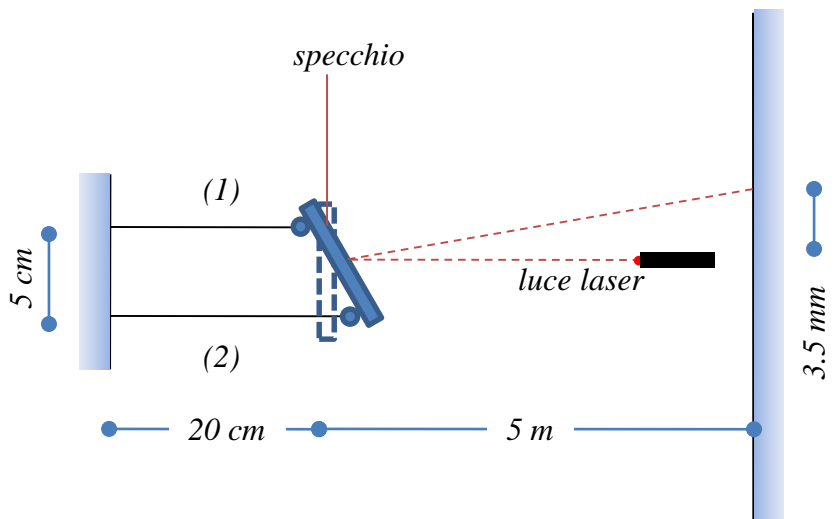


Una piastra rettangolare sottile è soggetta ad uno stato tensionale biassiale come schematizzato in figura. Tutte le altre componenti di tensione sono nulle. Le dimensioni iniziali della piastra in esame sono le seguenti: $L_x=10cm$; $L_y=5cm$. Le dimensioni della piastra dopo l'applicazione del carico sono invece le seguenti: $l_x=10.0044cm$; $l_y=5.0086cm$. Sapendo che la tensione σ_x è pari a $70MPa$ ed il modulo elastico $E=70GPa$, si calcoli:

- il coefficiente di Poisson del materiale
- il valore della tensione σ_y .



Esercizio



Le due barre metalliche (1) e (2), orizzontali e inizialmente lunghe 20 cm, sostengono uno specchio, inizialmente verticale, sul quale incide un fascio di luce laser orizzontale. Le due barre sono costituite dello stesso materiale.

La barra (1) viene raffreddata di 5°C, mentre la barra (2) viene riscaldata di 10°C. A causa di tale processo il fascio di luce laser viene deviato come schematizzato in figura.

Si calcoli il coefficiente di dilatazione termica del materiale.