Elementi di meccanica del continuo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Il problema del solido elastico lineare isotropo

Sintesi

Sommario

Con riferimento ad un continuo elastico lineare isotropo, nelle precedenti lezioni sono state determinate:

- le equazioni di equilibrio, indefinite e al contorno (ricavate da sole considerazioni statiche);
- le equazioni di congruenza e di compatibilità (ricavate da sole considerazioni cinematiche);
- i legami costitutivi, che legano i valori di tensione e di deformazione presenti in un punto materiale del continuo in esame.

Tali relazioni saranno riassunte di seguito

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

I legami costitutivi per un solido elastico lineare isotropo

Sia B la configurazione (per piccoli spostamenti e piccole deformazioni si può ritenere che la configurazione iniziale coincida con quella deformata) di un generico solido e sia ∂B la sua frontiera.

Quest'ultima può essere decomposta in due parti: una parte (vincolata) indicata con ∂B_u, su cui sono assegnati gli spostamenti, ed una parte (caricata) indicata con ∂B_f, su cui sono assegnati i carichi esterni. Per tali porzioni di frontiera valgono le seguenti relazioni:

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_u \qquad \partial B_u \cap \partial B_u = \{0\}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Tensione e deformazione in notazione di Voigt

Le componenti del tensore delle piccole deformazioni e del tensore di Cauchy sono state espresse in notazione di Voigt come segue:

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad \{\underline{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\} = \begin{bmatrix} \alpha\,\Delta t \\ \alpha\,\Delta t \\ \alpha\,\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Condizioni di congruenza in notazione di Voigt

Nelle precedenti lezioni è stato mostrato che le componenti di spostamento e di deformazione presenti in un punto materiale del continuo in esame sono legate dalle seguenti condizioni di congruenza

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = sym(\nabla(\mathbf{u})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad \forall P \in B$$

È facile verificare che, in notazione di Voigt, le precedenti relazioni possono essere scritte come segue

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \rightarrow \{\underline{\varepsilon}\} = [C]\boldsymbol{u} \quad \forall P \in B$$

NOTA

$[C]$ è un operatore (differenziale) di congruenza: può essere visto come l'analogo, al continuo, dell'operatore di congruenza per le travature reticolari per le quali è stata descritta la seguente relazione:

$$\underline{\delta} = [C]\underline{u}$$

La differenza è che, nei sistemi reticolari l'operatore di congruenza è *algebrico*, mentre per il continuo deformabile $[C]$ è un operatore *differenziale*.

Condizioni di equilibrio in notazione di Voigt

Nelle precedenti lezioni, attraverso considerazioni di equilibrio, è stato mostrato che in un generico punto materiale di un continuo, l'equilibrio alla rotazione è soddisfatto se e solo se il tensore delle tensioni è simmetrico, mentre l'equilibrio alla traslazione impone che

$$div(\underline{\sigma})+\mathbf{b}=\mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x - \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} - \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}\sigma_y - \frac{\partial}{\partial z}\tau_{yz} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} - \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz} - \frac{\partial}{\partial z}\sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \qquad \forall P \in B$$

In notazione di Voigt le precedenti relazioni si scrivono come segue

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_{[\tilde{C}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}}_{\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

$$\rightarrow \quad [\tilde{C}]\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} = \boldsymbol{b} \quad \forall P \in B$$

NOTA

$[\tilde{C}]$ è un operatore (differenziale) di equilibrio: può essere visto come l'analogo, al continuo, dell'operatore di equilibrio per le travature reticolari per le quali si ha:

$$[C]^T \underline{N} = \underline{F}$$

La differenza è che, nei sistemi reticolari l'operatore di equilibrio è *algebrico*, mentre per il continuo deformabile è un operatore *differenziale*.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Condizioni al contorno

Sul contorno, devono invece essere soddisfatte le seguenti:

- condizioni cinematiche

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \qquad \forall P \in \partial B_u$$

- condizioni statiche

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n} = \mathbf{p} \qquad \forall P \in \partial B_f$$

OSS.

sulla frontiera vincolata le tensioni calcolate attraverso il teorema di Cauchy sono pari alle reazioni vincolari

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{n} = \mathbf{r} \qquad \forall P \in \partial B_u$$

La legge di Hooke generalizzata

I legami costitutivi per un solido elastico lineare isotropo possono essere espressi nelle seguenti forme

Forma diretta

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\,\Delta t$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\,\Delta t$$
$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha\,\Delta t$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} \qquad (1)$$

Forma inversa

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta t$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta t$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\,\Delta t$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \qquad (2)$$

Per i parametri materiali valgono le seguenti relazioni

$$E > 0 \qquad G > 0 \qquad 0 \le \nu < \frac{1}{2} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{E}{3} < G \le \frac{E}{2} \qquad (3)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La legge di Hooke in notazione di Voigt

In notazione di Voigt, le precedenti relazioni assumono la forma:

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[S]} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} = [S](\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\})$$

$$\{\underline{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}}_{[S]^{-1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ \alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [S]^{-1}\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} + \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema del solido elastico lineare isotropo

Schematizzazione del problema del solido elastico lineare

Condizioni al contorno

$\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall P \in \partial B_u$ cinematiche

$\underline{\sigma}\,\mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \forall P \in \partial B_f$ statiche

Forze di volume

$\mathbf{b}$

Operatore differenziale

Spostamenti

$\mathbf{u}$

equilibrio

$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{b}$

congruenza

$\{\varepsilon\} = [C]\mathbf{u}$

legami costitutivi

$\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} = [S](\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_a\})$

$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [S]^{-1}\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_a\}$

Reazioni vincolari esterne

$\mathbf{r}$

equilibrio

$\underline{\sigma}\,\mathbf{n} = \mathbf{r} \qquad \forall P \in \partial B_u$

Tensioni

$\{\underline{\sigma}\}$

Deformazioni

$\{\varepsilon\}$

Dati

Incognite

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema strutturale per i sistemi reticolari generici

n	numero di nodi
b	numero di aste
v	vincoli esterni
f=gdl-v	gdl non vincolati esternamente

Dati

Incognite

Reazioni vincolari esterne $\underline{R}$

$\underline{F}$

Operatore algebrico

Spostam. nodali $\underline{u}_f$

Cedim. vincolari $\underline{u}_v = \underline{\Delta}$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni vincolate esternamente

$$\underset{[v\times 1]}{\underline{R}} = \underset{[v\times b]}{[C_v]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

equilibrio dei nodi alla traslazione nelle direzioni non vincolate esternamente

$$\underset{[f\times 1]}{\underline{F}} = \underset{[f\times b]}{[C_f]^T}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}}$$

congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times f]}{[C_f]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f}$$

congruenza

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} \leftarrow \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}}$$

Sforzi normali $\underline{N}$

legami costitutivi

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times b]}{[D]}\,\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} + \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}$$

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{N}} = \underset{[b\times b]}{[k]}\left(\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} - \underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}_a}\right)$$

Allungamenti delle aste

$$\underset{[b\times 1]}{\underline{\delta}} = \underset{[b\times f]}{[C_f]}\,\underset{[f\times 1]}{\underline{u}_f} + \underset{[b\times v]}{[C_v]}\,\underset{[v\times 1]}{\underline{\Delta}}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Analogia fra i sistemi reticolari ed il continuo deformabile

Dalle relazioni riportate nelle precedenti slide è evidente che le equazioni che governano il problema del continuo deformabile sono formalmente analoghe a quelle precedentemente determinate per i sistemi reticolari. Si ha infatti:

Continuo deformabile		Sistemi reticolari
$\{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u}$	*Equazioni di congruenza*	$\underline{\delta} = [C]\underline{u}$
$\{\underline{\boldsymbol{\sigma}}\} = [S](\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\})$	*Legami costitutivi*	$\underline{\delta} = [D]\underline{N} + \underline{\delta_a}$
$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{b}$	*Equazioni di equilibrio*	$[C]^T \underline{N} = \underline{F}$

Come si è visto, gli operatori di congruenza e di equilibrio sono di tipo algebrico per i sistemi reticolari e di tipo differenziale per il continuo. Per entrambi i sistemi, gli operatori di legame costitutivo sono invece sempre di tipo algebrico.

L'operatore di equilibrio è sempre *l'aggiunto* dell'operatore di congruenza. Tale condizione comporta molte implicazioni in termini di dualità statico-cinematica che esulano dagli scopi del presente corso.

Si osservi che l'aggiunto di un operatore algebrico (sistemi reticolari) coincide con il suo trasposto.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema del solido elastico lineare isotropo

Le precedenti relazioni definiscono il problema del solido elastico lineare isotropo.

Esso può essere schematicamente enunciato come segue:
dato un continuo deformabile di dominio B e di frontiera $\partial B = \partial B_u \cup \partial B_f$, vincolato su ∂B_u; assegnato un campo di forze di volume $\mathbf{b}$ (ed eventualmente di distorsioni termiche), assegnato il valore delle tensioni (carichi) su ∂B_f, si calcoli il campo di tensioni, di deformazioni e spostamenti che soddisfano le equazioni di equilibrio, di congruenza ed i legami costitutivi e che siano rispettosi delle condizioni al contorno.

Le equazioni e le (funzioni) incognite del problema in esame sono allora le seguenti

$\left[\tilde{C}\right]\left\{\underline{\sigma}\right\} = \mathbf{b}$	3 equazioni di equilibrio		6 componenti di tensione	$\left\{\underline{\sigma}\right\}$
$\left\{\underline{\sigma}\right\} = \left[S\right]\left(\left\{\underline{\varepsilon}\right\} - \left\{\underline{\varepsilon}_a\right\}\right)$	6 equazioni di legame costitutivo		6 componenti di deformazione	$\left\{\underline{\varepsilon}\right\}$
$\left\{\underline{\varepsilon}\right\} = \left[C\right]\mathbf{u}$	6 equazioni di congruenza		3 componenti di spostamento	$\mathbf{u}$
TOTALE	15 equazioni	TOTALE	15 funzioni incognite	

Si dimostra (la dimostrazione esula dagli scopi del corso) che il problema del solido elastico lineare isotropo è ben posto e che **ammette sempre una ed una sola soluzione** (<u>esistenza ed unicità della soluzione del problema elastico lineare</u>)

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Rem. Equazioni di congruenza interna

Si ricorda che le *condizioni di integrabilità* (o *condizioni di de Saint Venant* o *equazioni di congruenza interna*) sono, per un dominio monoconnesso, condizioni necessarie (devono essere soddisfatte da un generico campo di deformazione) e sufficienti, ossia tali da garantire, per domini monoconnessi, l'integrabilità del campo di deformazione: se un dato campo di deformazione soddisfa le (2), allora esiste un campo di spostamenti legato alle deformazioni assegnate attraverso le (1). Fisicamente le *condizioni di integrabilità* assicurano che il campo di deformazione in esame sia tale da non prevedere la formazione di vuoti (fratture) o la compenetrazione di materia come schematizzato in figura.

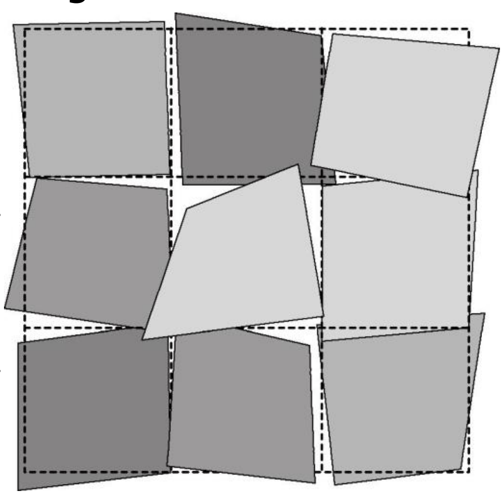

Figura tratta da Nunziante, Gambarotta, Tralli

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}; \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2};$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right); \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right); \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right);$$

N.B. solo tre delle precedenti equazioni sono linearmente indipendenti

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema del solido elastico lineare isotropo
Sintesi

Cenni a possibili strategie di soluzione

Il problema del solido elastico lineare isotropo

Come si è visto, il problema strutturale del continuo elastico lineare isotropo e quello dei sistemi reticolari (formati da materiale elastico lineare isotropo), differiscono per gli operatori (matrici) che li governano: tutti gli operatori (di equilibrio, di congruenza e di legame costitutivo) che governano il problema dei sistemi reticolari sono algebrici (matrici di numeri reali) mentre gli operatori di congruenza e di equilibrio del problema elastico al continuo sono differenziali (matrici di derivate).

Ciononostante essi possono essere risolti mediante procedure e strategie di soluzione formalmente analoghe.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema del solido elastico lineare isotropo

Per i sistemi reticolari è stato ad esempio descritto il metodo degli spostamenti, nel quale si assumono appunto gli spostamenti come variabili primarie e che viene sviluppato condensando tutte le equazioni che regolano in problema nelle equazioni di equilibrio. Il metodo degli spostamenti può essere sviluppato in maniera formalmente analogo per il problema elastico lineare isotropo.

$$\forall P \in B \quad \begin{cases} [\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{b} & \text{3 equazioni di equilibrio} \\ \{\underline{\sigma}\} = [S](\{\underline{\varepsilon}\} - \{\underline{\varepsilon}_a\}) & \text{6 equazioni di legame costitutivo} \\ \{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u} & \text{6 equazioni di congruenza} \end{cases}$$

sostituendo

Sostituendo le equazioni di congruenza nei legami costitutivi e poi nelle equazioni di equilibrio si ottengono le seguenti equazioni (dette di *Navier-Cauchy*)

$$[\tilde{C}][S][C]\mathbf{u} = \mathbf{b} + [\tilde{C}][S]\{\underline{\varepsilon}_a\} = \mathbf{b}^* \qquad \forall P \in B$$

risolvendo le quali si possono ottenere le funzioni spostamento (che devono essere rispettose delle condizioni al contorno sulla frontiera vincolata) e quindi le deformazioni (attraverso le equazioni di congruenza) e le tensioni (attraverso i legami costitutivi).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Il problema del solido elastico lineare isotropo

Per completezza si riportano di seguito le espressioni esplicite delle equazioni di *Navier-Cauchy*

$$
\begin{aligned}
&G\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+b_x^*=0\\
&G\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+b_y^*=0 \qquad \forall P\in B\\
&G\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+b_z^*=0
\end{aligned}
$$

La soluzione del problema elastico lineare isotropo (nella sua forma esplicita o condensata ad esempio nelle equazioni di Navier-Cauchy) può non essere banale per molti problemi di meccanica strutturale.

Iil problema elastico può essere risolto con metodi diretti (come ad esempio l'integrazione delle equazioni di Navier-Cauchy) o con metodi inversi o semi-inversi che, sfruttando i *teoremi di esistenza ed unicità della soluzione*, permettono di risolvere il problema elastico utilizzando anche riscontri derivanti dall'evidenza fisica del particolare problema strutturale in esame.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831