

Homework 2 - Algebra Lineare e geometria analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)

Assegnato 22 Ottobre 2018 - consegna giovedì 25 Ottobre 2018.

1. *Difficile. Suggestione: si usi la doppia inclusione*
Provare che

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Dire perchè il vettore

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

non è sicuramente esprimibile come combinazione lineare dei vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

3. Provare che i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 sono indipendenti

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo F e sia $v \in V \setminus \{0\}$. Provare che se $av = bv$ allora $a = b$.

5. Provare che

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

è una base di \mathbb{R}^2 , mentre non lo è

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right)$$

Si rappresenti la situazione geometrica e si spieghi anche in base ad essa i motivi del risultato ottenuto.

6. Provare che i seguenti vettori di \mathbb{Q}^3 ,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono dipendenti ed esprimerne uno come combinazione lineare dei restanti.

7. Elencare gli elementi dello spazio vettoriale $V = F_2^3$. Dire se in tale spazio vettoriale sono dipendenti o no i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Si considerino gli insiemi

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\},$$

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$

$$\mathbb{R}_{--} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Dire se, rispetto alle usuali operazioni di somma, prodotto e moltiplicazione per uno scalare (definita da $\lambda x :=$ prodotto fra i reali λ e x) essi risultano gruppi, anelli, campi, spazi vettoriali.