

Elementi di meccanica del continuo



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Un particolare problema elastico: il solido di
de Saint Venant



Sommario

È stato descritto il problema di un continuo (generico) a comportamento meccanico elastico lineare isotropo.

Per le sue vaste implicazioni ingegneristiche, risulta di particolare importanza la risoluzione di un particolare problema elastico, detto *problema di de Saint Venant*, che riguarda l'analisi di:

- un solido cilindrico
- ad asse rettilineo
- privo di vincoli
- sollecitato solo in corrispondenza delle basi di estremità.

Per la trattazione del problema di de Saint Venant si veda il volume di Nunziante, Gambarotta, Tralli, "Scienza delle Costruzioni", Mc-Graw-Hill, capitolo 6, da cui sono tratte le figura utilizzate di seguito.



Sommario

I risultati ottenuti dalla risoluzione del problema di *de Saint Venant*, benché riferiti a un particolare solido elastico lineare, possono essere estesi (utilizzando la teoria tecnica della trave) a:

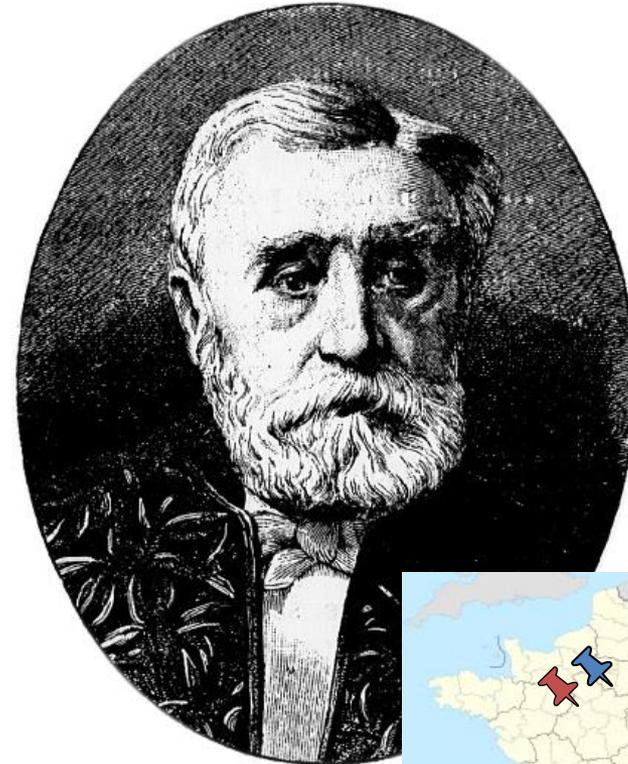
- sistemi vincolati esternamente
- sistemi caricati in campata
- travi ad asse curvilineo
- travi eterogenee e non isotrope

Per la trattazione del problema di de Saint Venant si veda il volume di Nunziante, Gambarotta, Tralli, "Scienza delle Costruzioni", Mc-Graw-Hill, capitolo 6, da cui sono tratte le figura utilizzate di seguito.



Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant

- N. da nobile famiglia nel castello di Fortoiseau, Villiers-en-Bière (Seine-et-Marne), 23 agosto 1797
- **M. Saint-Ouen, 6 gennaio 1886**
- 1814: si rifiutò di manifestare a favore di Napoleone, in contrasto con i maestri e con i compagni; fu espulso dall'École Polytechnique (per otto anni)
- 1823: riuscì ad essere ammesso all'École des Ponts et Chaussées
- 1825-1837: lavorò come ingegnere (canale di Nivernais e canale delle Ardenne)
- 1837-1837: incarico all'École des Ponts et Chaussées come supplente di Coriolis
- dal 1852: nessun incarico pubblico
- 1855: Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion



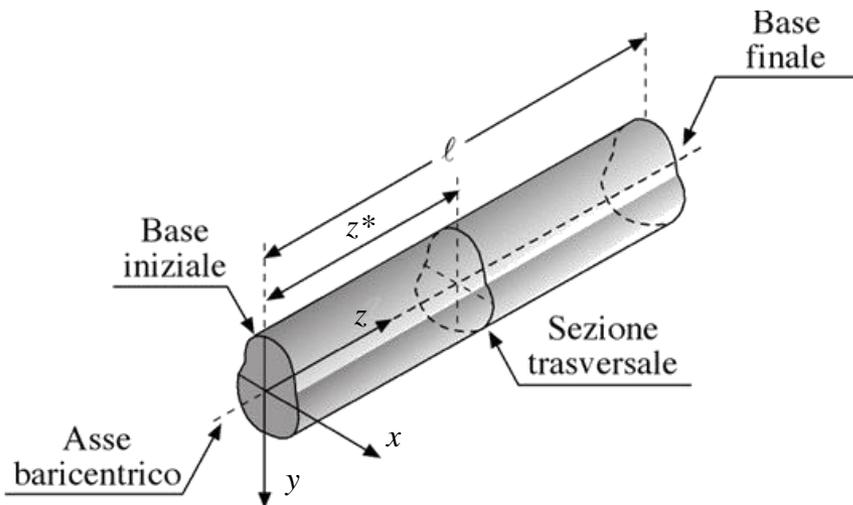


Il solido di de Saint-Venant

Definizione del problema



Il solido di de Saint Venant – materiale e geometria



Il problema di de Saint Venant riguarda l'analisi di:

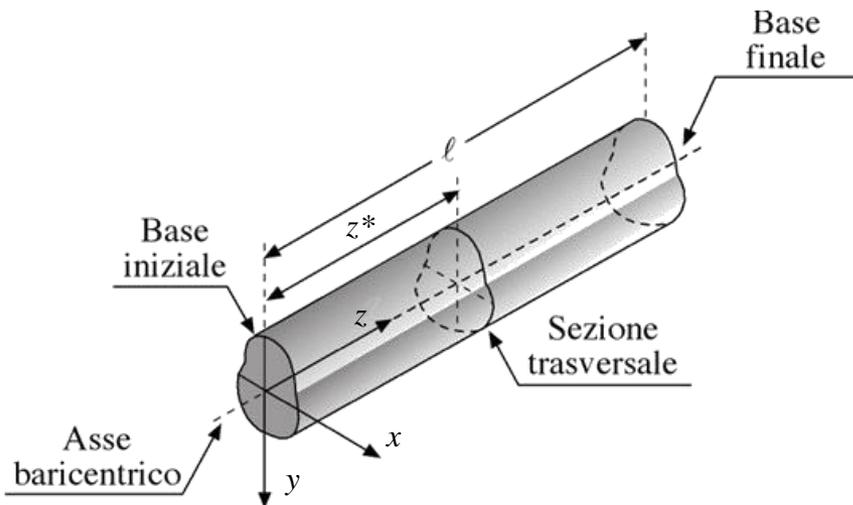
- un solido cilindrico
- ad asse rettilineo
- costituito da materiale omogeneo, elastico lineare isotropo

La frontiera di tale solido è costituita:

- dalla superficie laterale del cilindro, detta *mantello*
- dalle sezioni terminali, dette *basi*.



Il solido di de Saint Venant – materiale e geometria



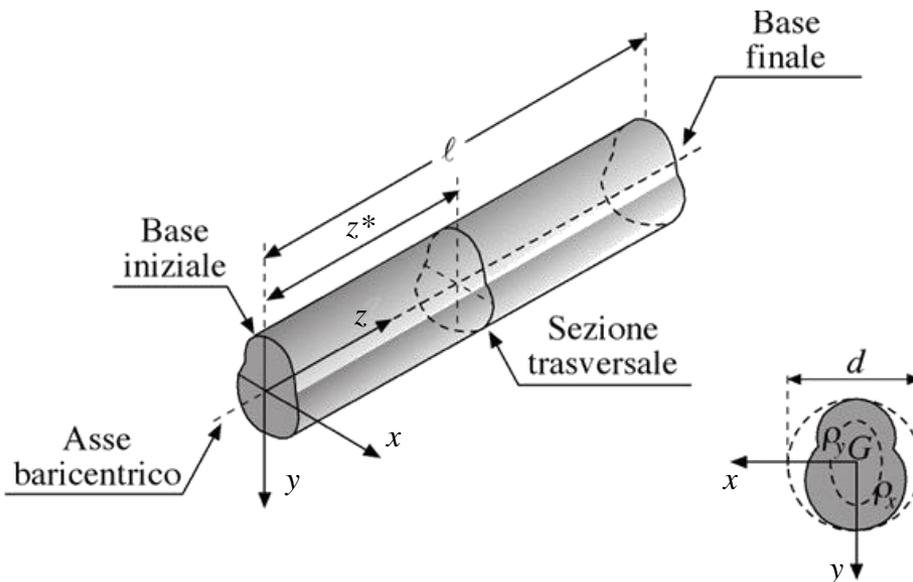
Per la descrizione del problema elastico si considera un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, avente:

- origine in corrispondenza del baricentro di una delle due basi
- asse z coincidente con l'asse baricentrico del cilindro
- assi x e y coincidenti con gli *assi principali d'inerzia* della sezione trasversale.

Per quanto è stato detto, la sezione trasversale del solido di de Saint Venant è costante.



Il solido di de Saint Venant – materiale e geometria



Il problema del de Saint Venant analizza un solido **"snello"** ossia tale che la lunghezza della sua linea d'asse sia preponderante rispetto alle dimensioni della sezione trasversale. Detta l la lunghezza della linea d'asse del cilindro e d il diametro della più piccola circonferenza che circoscrive la sezione trasversale, deve essere

$$d \ll l$$

Si ipotizza inoltre che la **sezione trasversale** del solido sia **compatta**: la massima dimensione della sezione trasversale non deve essere molto differente da quella minima.



Il solido di de Saint Venant – condizioni di vincolo

Si assume che il solido di de Saint Venant sia privo di vincoli e quindi libero nello spazio. Nel solido di de Saint Venant la porzione di frontiera vincolata è quindi pari all'insieme vuoto.

$$\partial B_u \equiv \{0\}$$

Si ipotizza che il solido sia in equilibrio: vista l'assenza di vincoli questo implica che il sistema di carichi agente sul solido deve essere (auto)equilibrato. In ogni caso, **visto che il sistema non è vincolato, la soluzione del problema elastico sarà valida a meno di un moto rigido.**



Il solido di de Saint Venant – condizioni di carico

Indicando con B il dominio del solido, ∂B_m il mantello e con ∂B_{bi} e ∂B_{bf} rispettivamente la base iniziale quella finale, nel problema di de Saint Venant si assume:

-assenza di forze di volume $\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall P \in B$

-mantello scarico $\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \forall P \in \partial B_m$

Il solido di de Saint Venant può allora essere al più caricato in corrispondenza delle basi mediante una generica distribuzione di tensioni (normali e tangenziali).



Il solido di de Saint Venant – OSSERVAZIONI

OSSERVAZIONE 1

È evidente che le ipotesi introdotte nella definizione del problema del solido di Saint Venant sono **in contrasto con molte delle ordinarie condizioni di utilizzo delle travi** nella pratica tecnica. È molto frequente infatti che le travi siano caricate anche in corrispondenza della superficie laterale o che il materiale che le costituisce abbia un comportamento non elastico lineare isotropo (es. il legno ha un comportamento anisotropo). Inoltre l'ipotesi di assenza delle forze di volume implica che azioni quali ad esempio il peso proprio siano trascurate.

Ciononostante i risultati ottenuti risolvendo il problema di de Saint Venant risultano sufficientemente accurati ed estendibili alle normali applicazioni tecniche.

OSSERVAZIONE 2

Come si è detto, si assume che il solido sia privo di vincoli. In tale condizione (**sistema labile ma equilibrato**) le **distorsioni termiche** producono deformazioni anelastiche alle quali è associato uno stato tensionale nullo (le distorsioni termiche producono solo deformazioni anelastiche e non tensioni all'interno del solido). Visto allora che il loro effetto è completamente noto, esse vengono trascurate nella presente trattazione.



Facoltà di Architettura

Il problema elastico del solido di de Saint Venant

Il problema del de Saint Venant è un classico problema elastico particolarizzato secondo le ipotesi formulate nelle precedenti slide.

Le ormai ben note equazioni di dominio ed al contorno del problema elastico sono le seguenti

Equazioni di dominio

Condizioni al contorno

$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{b}$	equazioni di equilibrio
$\{\underline{\sigma}\} = [S]\{\underline{\varepsilon}\}$	equazioni di legame costitutivo
$\{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u}$	equazioni di congruenza

$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$	$\forall P \in \partial B_u$
$\underline{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p}$	$\forall P \in \partial B_f$

La loro particolarizzazione al problema di de Saint Venant è la seguente

Equazioni di dominio

Condizioni al contorno

$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{0}$	equazioni di equilibrio	
$\{\underline{\sigma}\} = [S]\{\underline{\varepsilon}\}$	equazioni di legame costitutivo	(1)
$\{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u}$	equazioni di congruenza	

	$\partial B_u = \{0\}$	
$\underline{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}$	$\forall P \in \partial B_m$	(2)
$\underline{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p}$	$\forall P \in \partial B_b$	



Il problema di de Saint Venant – ipotesi sullo stato tensionale

Per le caratteristiche del problema in esame, in particolare in considerazione del fatto che il mantello è scarico, de Saint Venant ha ipotizzato che in tutti i punti materiali interni al solido, in corrispondenza di giaciture parallele all'asse siano nulle le tensioni normali e quelle tangenziali ortogonali all'asse della trave. In particolare questo corrisponde ad ipotizzare che le seguenti componenti di tensione siano sempre nulle

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

e quindi il tensore di tensione assume la seguente forma semplificata

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

È facile verificare che in questo caso il determinante del tensore di tensione è nullo e pertanto lo stato tensionale è piano.

La precedente ipotesi corrisponde alla seguente affermazione: immaginando che il solido di de Saint Venant sia costituito da fibre cilindriche parallele all'asse della trave e di sezione trasversale infinitesima, i punti che idealmente si trovano sul mantello di tali fibre si trasmettono solo tensioni tangenziali in direzione parallela all'asse.



Il problema di de Saint Venant – equazioni di equilibrio

Utilizzando le (3), le equazioni di equilibrio sul dominio ed al contorno si particolarizzano come segue:

- equazioni indefinite di equilibrio (1.1)

$$(4) \quad [\tilde{C}]\{\sigma\} = \mathbf{0} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Queste due condizioni implicano che le tensioni tangenziali siano indipendenti} \\ \text{da } z \text{ e quindi, nel solido di de Saint Venant, la loro distribuzione è uguale per} \\ \text{tutte le sezioni trasversali} \end{array} \right.$$

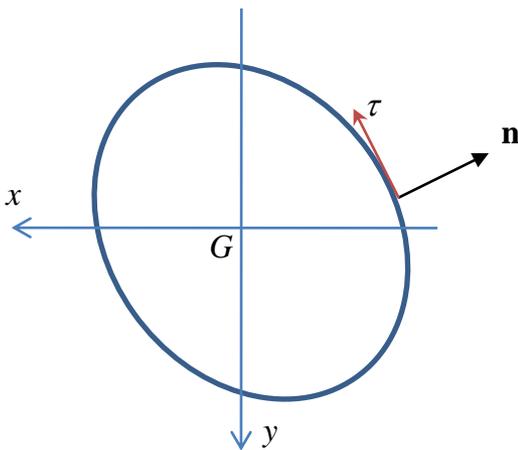


Il problema di de Saint Venant – equazioni di equilibrio

Utilizzando le (3), le equazioni di equilibrio sul dominio ed al contorno si particolarizzano come segue:

- condizioni al contorno sul mantello (2.2)

visto che il solido in esame è cilindrico, la normale uscente in corrispondenza di un punto che si trova sul mantello ha le seguenti componenti $\mathbf{n}=[n_x, n_y, 0]^T$. Le equazioni di equilibrio (2) sul mantello si particolarizzano allora come segue



Sezione trasversale

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad \forall P \in \partial B_m \quad (5)$$

Tale condizione implica che il campo di tensioni tangenziali agenti su una generica sezione trasversale della trave, deve essere tale che, sul bordo, le tensioni tangenziali siano tangenti al contorno.



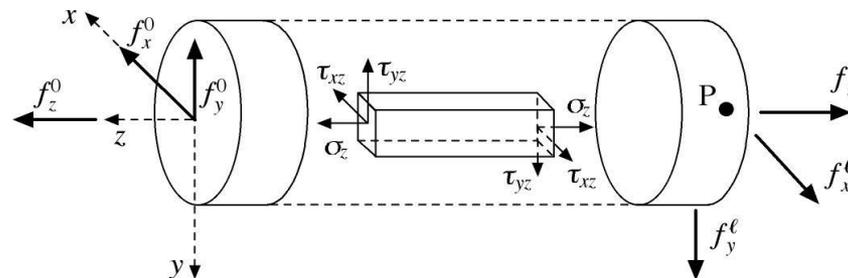
Il problema di de Saint Venant – equazioni di equilibrio

Utilizzando le (3), le equazioni di equilibrio sul dominio ed al contorno si particolarizzano come segue:

- condizioni al contorno sulle basi (2.3)

la normale uscente dal solido in corrispondenza di un punto che si trova sulle basi è parallela all'asse z . In particolare, la normale uscente in corrispondenza di un punto che si trova sulla base finale del solido ha le seguenti componenti $\mathbf{n}=[0, 0, 1]^T$, mentre la normale uscente in corrispondenza di un punto che si trova sulla base iniziale ha le seguenti componenti $\mathbf{n}=[0, 0, -1]^T$. Le condizioni al contorno si particolarizzano allora come segue:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in \partial B_{bi} \qquad \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in \partial B_{bf} \qquad (6)$$





Il problema di de Saint Venant – equazioni costitutive

In virtù dell'ipotesi (3) sullo stato tensionale, le equazioni costitutive (1.2) si particolarizzano come segue

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} &= 0; & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (7)$$

Indicando con u , v e w le componenti del vettore spostamento rispetto agli assi del sistema di riferimento, sostituendo le (7) nelle equazioni di congruenza (1.3) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\sigma_z}{E} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\tau_{xz}}{G}; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (8)$$

Le precedenti relazioni sono allora rappresentative sia delle equazioni di legame (1.2) che di quelle di congruenza (1.3) in quanto ottenute dalla loro combinazione.



Il problema di de Saint Venant – riepilogo

Riepilogando, il problema di de Saint Venant è governato dalle seguenti equazioni

Equazioni di dominio

$$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{(SV1)}$$

(SV1)

equazioni di equilibrio

Condizioni al contorno

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad \forall P \in \partial B_m \quad \text{(SV3)}$$

(SV3)

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in \partial B_{bf}$$

$\forall P \in \partial B_{bf}$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in \partial B_{bi}$$

$\forall P \in \partial B_{bi}$

(SV4)

$$\begin{cases} \{\underline{\sigma}\} = [S]\{\underline{\varepsilon}\} \\ \{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases} \quad \text{(SV2)}$$

(SV2)

equazioni di congruenza e legame costitutivo

Affinché il campo di deformazione ottenuto dalle precedenti relazioni sia integrabile, devono inoltre essere soddisfatte le equazioni di congruenza interna, introdotte a suo tempo e riportate nella slide seguente.



Il problema di de Saint Venant – congruenza interna

Affinché sia garantita la condizione di integrabilità del campo di deformazione, esso deve soddisfare le seguenti equazioni di congruenza interna

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}; & \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

Sostituendo i legami costitutivi nelle precedenti relazioni di integrabilità ed utilizzando le equazioni di equilibrio (4) si ottengono le seguenti relazioni di integrabilità del campo di deformazione espresse in termini di componenti di tensione

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (SV5)$$

In pratica, le precedenti relazioni rappresentano la condizione che deve essere rispettata dalle componenti di tensione affinché il corrispondente campo di deformazione soddisfi le condizioni di congruenza interna o di integrabilità.



Il solido di de Saint-Venant

Postulato di de Saint-Venant e condizioni al contorno «globali»



Postulato di de Saint Venant

È ovvio che la soluzione del precedente problema, così come è stato posto, dipende dalla particolare distribuzione dei carichi sulle basi del solido. Esso dovrebbe allora essere risolto ogni volta in maniera differente in base alla effettiva distribuzione di carico.

Nell'analisi delle aste sollecitate assialmente agli estremi si è visto che, ad una certa distanza dal punto di applicazione del carico (e quindi dagli estremi dell'asta), la risposta dell'elemento non dipende dall'effettiva distribuzione locale delle azioni ma solo dalla sua risultante. In altri termini, lo stato tensionale (e deformativo) di un punto materiale abbastanza lontano dalle zone di applicazione del carico non dipende dall'effettiva distribuzione del carico (es. puntuale, distribuito, ...) ma solo dalla sua risultante. Tale considerazione, fatta per aste sollecitate assialmente, è generalizzata dal così detto *principio di de Saint Venant* che si enuncia come segue:

"in punti del solido a sufficiente distanza dalle basi caricate, lo stato di tensione non dipende dalla particolare distribuzione del carico esterno ma unicamente dalla sua risultante e dal suo momento risultante".



Postulato di de Saint Venant – enunciato alternativo

In maniera alternativa, il postulato di de Saint Venant può essere enunciato come segue:

“lo stato tensionale indotto da una distribuzione di carico autoequilibrato applicato a ciascuna base è nullo ad una sufficiente distanza (distanza di estinzione) dalle basi”.

La distanza di estinzione dipende dal particolare sistema che si vuole analizzare. Per solidi del tipo di de Saint Venant aventi sezione trasversale compatta, la distanza di estinzione può essere assunta pari al diametro della più piccola circonferenza che circonda la sezione.



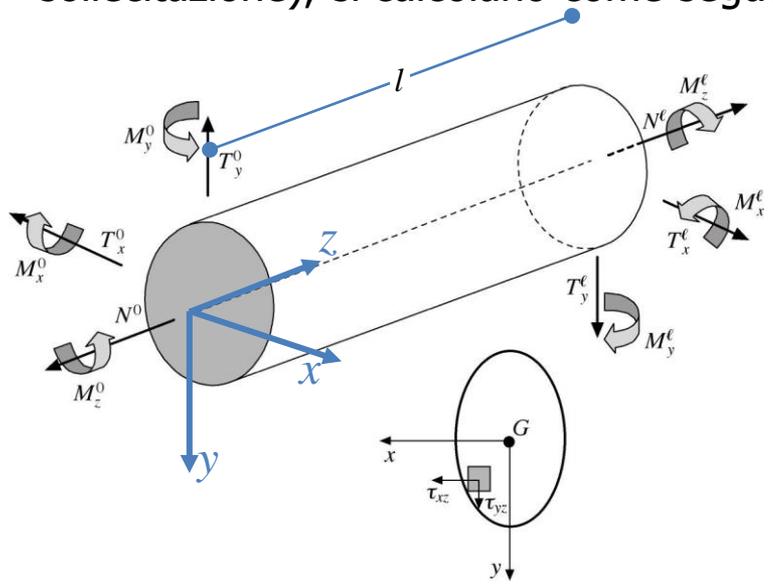
Postulato di de Saint

Il postulato di de Saint Venant permette di classificare e risolvere il problema del solido di de Saint Venant secondo tipologie di problemi definiti in funzione della risultante e del momento risultante della distribuzione di carico presente sulle basi. Infatti, visto che, qualunque sia la particolare distribuzione di carichi sulle basi, ad una distanza maggiore della distanza di estinzione la risposta del materiale, e quindi la soluzione del problema di de Saint Venant, dipende solo dalle componenti della risultante e del momento risultante dei carichi, le condizioni al contorno (6) possono essere espresse in funzione delle componenti della risultante e del momento risultante dei carichi applicati sulle basi.



Condizioni al contorno sulla base finale

Sia $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ una generica distribuzione di forze di superficie applicate sulla *base finale* del solido di *de Saint Venant*. Ovviamente, le componenti di tali forze si assumono positive se concordi con gli assi del sistema di riferimento indicato in figura. Utilizzando le seconde delle (6), le componenti della risultante $\mathbf{R}^\ell = [T_x^\ell \ T_y^\ell \ N^\ell]^T$ e del momento risultante $\mathbf{M}^\ell = [M_x^\ell \ M_y^\ell \ M_z^\ell]^T$ di tale distribuzione, positive se concordi con gli assi del sistema di riferimento (rem. convenzione sui segni delle caratteristiche della sollecitazione), si calcolano come segue



$$N^\ell = \int_A p_z dA = \int_A \sigma_z dA$$

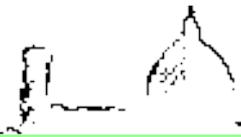
$$T_x^\ell = \int_A p_x dA = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T_y^\ell = \int_A p_y dA = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x^\ell = \int_A p_z y dA = \int_A \sigma_z y dA$$

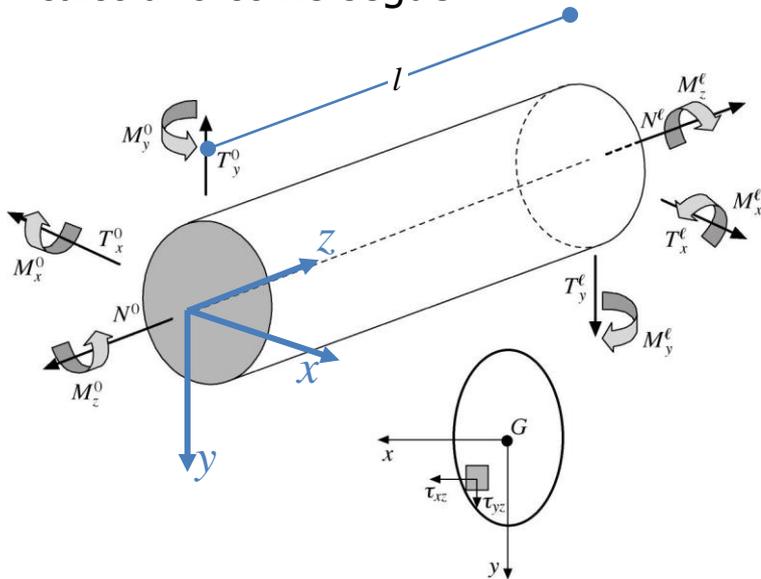
$$M_y^\ell = - \int_A p_z x dA = - \int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z^\ell = \int_A (p_y x - p_x y) dA = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$



Condizioni al contorno sulla base iniziale

Sia $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ una generica distribuzione di forze di superficie applicate sulla *base iniziale* del solido di *de Saint Venant*. Le componenti di tali forze si assumono positive se concordi con gli assi del sistema di riferimento indicato in figura. Utilizzando le prime delle (6), le componenti della risultante $\mathbf{R}^0 = [T_x^0 \ T_y^0 \ N^0]^T$ e del momento risultante $\mathbf{M}^0 = [M_x^0 \ M_y^0 \ M_z^0]^T$ di tale distribuzione, positive se discordi con gli assi del sistema di riferimento (rem. convenzione sui segni delle caratteristiche della sollecitazione), si calcolano come segue



$$N^0 = - \int_A p_z dA = \int_A \sigma_z dA$$

$$T_x^0 = - \int_A p_x dA = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T_y^0 = - \int_A p_y dA = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x^0 = - \int_A p_z y dA = \int_A \sigma_z y dA$$

$$M_y^0 = \int_A p_z x dA = - \int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z^0 = - \int_A (p_y x - p_x y) dA = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$



Condizioni al contorno sulle basi

Il postulato di de Saint Venant consente di sostituire le uguaglianze puntuali fra tensione e forze superficiali esterne con quelle riportate nella presente slide

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$\forall P \in \partial B_{bf}$ \longrightarrow

$$N^\ell = \int_A p_z dA = \int_A \sigma_z dA$$

$$T_x^\ell = \int_A p_x dA = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T_y^\ell = \int_A p_y dA = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x^\ell = \int_A p_z y dA = \int_A \sigma_z y dA$$

$$M_y^\ell = -\int_A p_z x dA = -\int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z^\ell = \int_A (p_y x - p_x y) dA = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

su ∂B_{bf}

(SV4)

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix}$$

$\forall P \in \partial B_{bi}$ \longrightarrow

$$N^0 = -\int_A p_z dA = \int_A \sigma_z dA$$

$$T_x^0 = -\int_A p_x dA = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T_y^0 = -\int_A p_y dA = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x^0 = -\int_A p_z y dA = \int_A \sigma_z y dA$$

$$M_y^0 = \int_A p_z x dA = -\int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z^0 = -\int_A (p_y x - p_x y) dA = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

su ∂B_{bi}

In questo caso però, nella parte del solido che si trova in prossimità delle basi (ossia ad una distanza inferiore a quella di estinzione) le soluzioni del problema di de Saint Venant sono valide solo in media.



Il solido di *de Saint Venant*

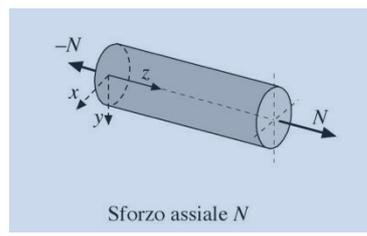
Caratteristiche della sollecitazione



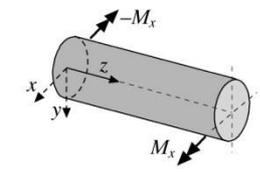
Caratteristiche della sollecitazione

Inoltre, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione del problema di *de Saint Venant* può essere ottenuta sovrapponendo le soluzioni relative alle condizioni di carico elementari riportate in figura

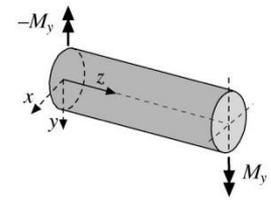
Per il caso dello sforzo assiale verrà mostrato che la soluzione del problema di *de Saint Venant* coincide con quanto ottenuto nella parte del corso relativo all'analisi di un'asta sollecitata assialmente (fase preliminare all'analisi delle strutture reticolari).



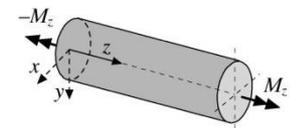
Sforzo assiale N



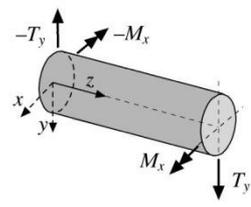
Flessione retta di momento flettente M_x



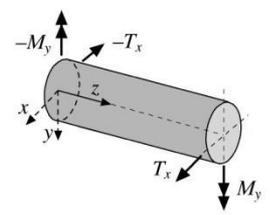
Flessione retta di momento flettente M_y



Torsione di momento torcente M_z



Taglio T_y e momento flettente M_x

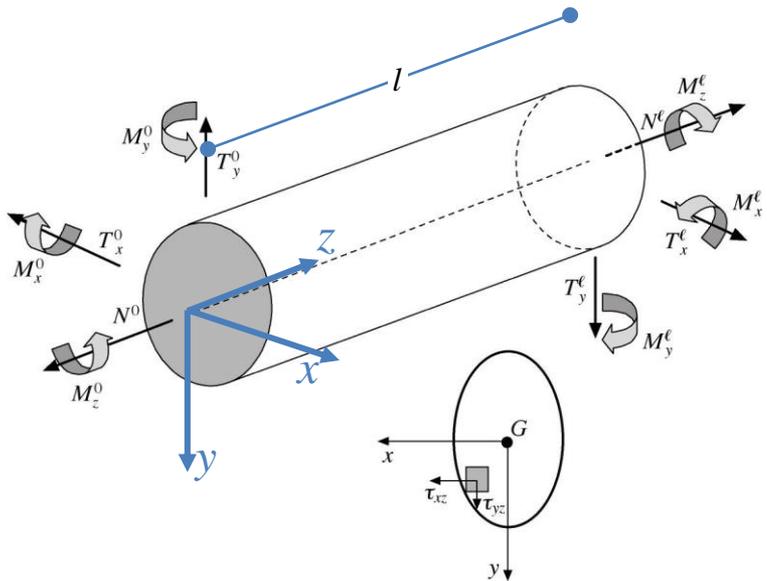


Taglio T_x e momento flettente M_y

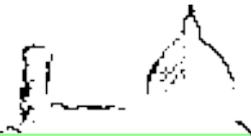


Equazioni di equilibrio globale

È stato ipotizzato che il solido di de Saint Venant sia in equilibrio. Pertanto le risultanti dei carichi distribuiti sulle basi devono soddisfare le seguenti equazioni di equilibrio globali alla traslazione ed alla rotazione

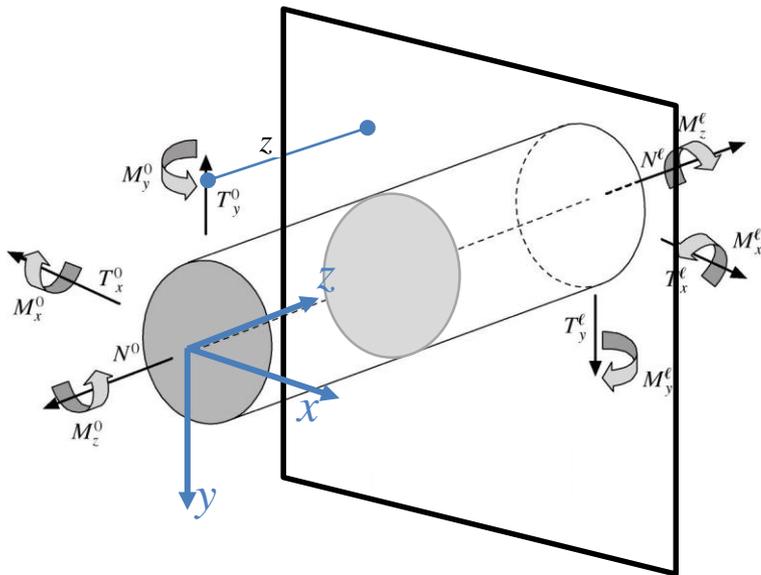


$$\begin{aligned}
 N^l &= N^0 & T_x^l &= T_x^0 & T_y^l &= T_y^0 \\
 M_z^l &= M_z^0 & M_x^l &= M_x^0 + lT_y^0 & M_y^l &= M_y^0 - lT_x^0
 \end{aligned}
 \tag{12}$$



Caratteristiche della sollecitazione

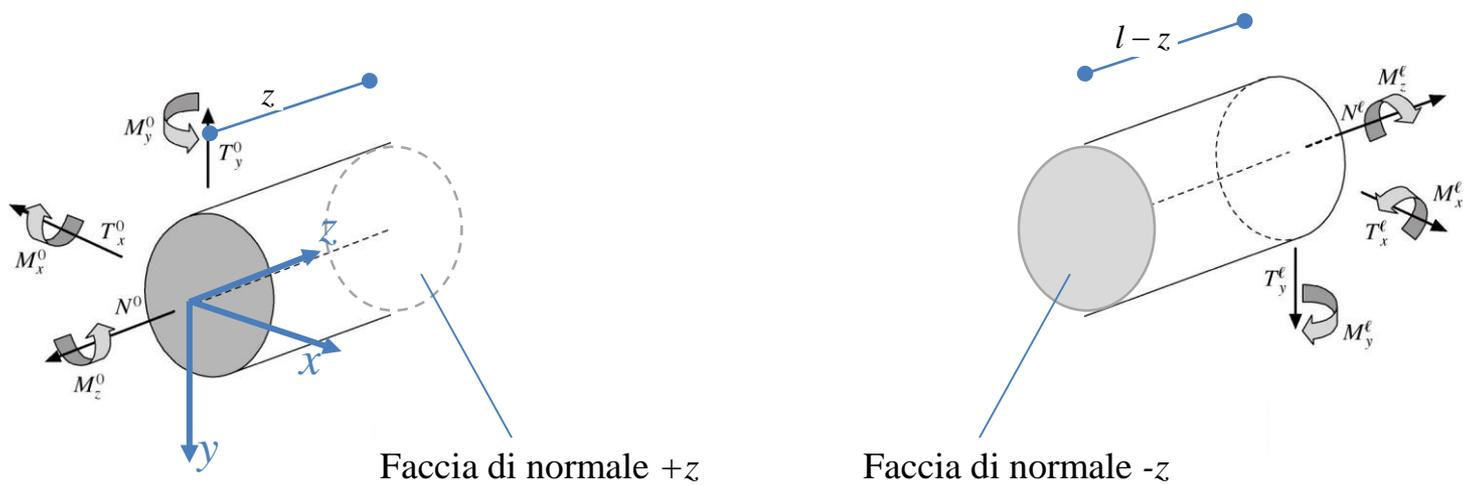
Si immagini suddividere il solido di de Saint Venant in due parti, attraverso un piano di sezione ortogonale all'asse, posto ad una distanza z dalla faccia iniziale.





Caratteristiche della sollecitazione

Le uniche componenti di tensione presenti sui punti materiali del solido appartenenti al piano di tensione saranno al più $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ (3). Inoltre, le tensioni presenti sulla faccia appartenente alla parte destra del solido saranno uguali ed opposte a quelle presenti sulla faccia appartenente alla parte sinistra. Pertanto, anche le risultanti ed i momenti risultanti di tali tensioni saranno uguali ed opposti.

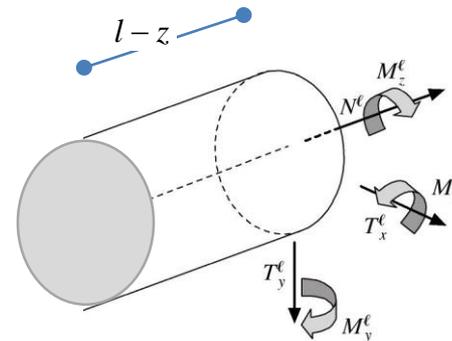
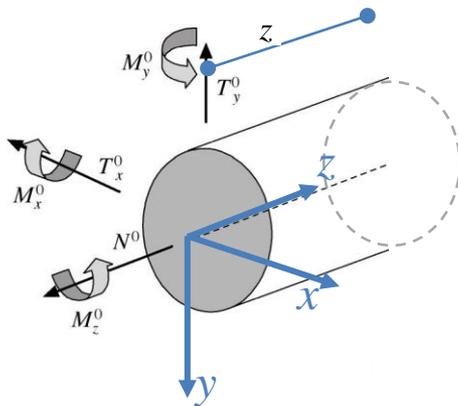




Caratteristiche della sollecitazione

Si assumono positive le componenti della risultante e del momento risultante delle tensioni se (vedi figura)

- sono concordi con gli assi del sistema di riferimento, per la faccia di normale $+z$
- sono discordi con gli assi del sistema di riferimento, per la faccia di normale $-z$.





Caratteristiche della sollecitazione

I moduli di tali componenti si calcolano come segue

$$N(z) = \int_A \sigma_z dA \quad \text{Sforzo normale}$$

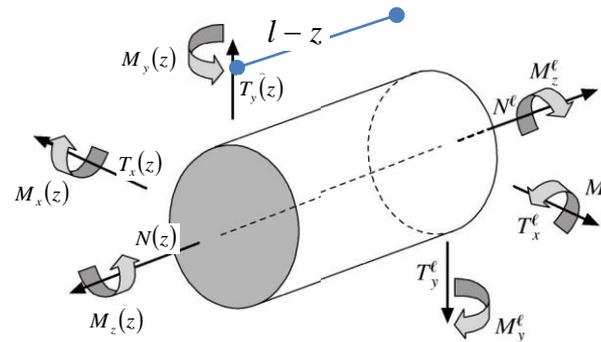
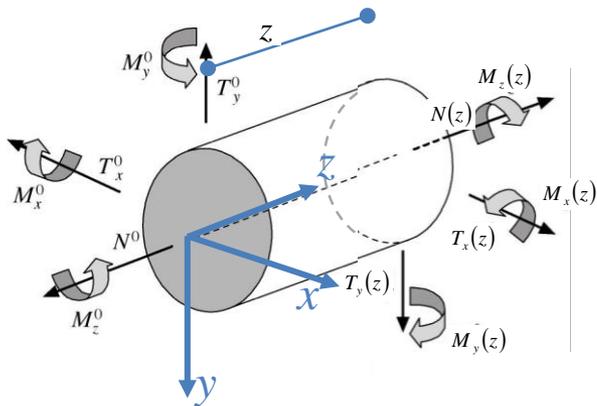
$$T_x(z) = \int_A \tau_{zx} dA \quad \text{Taglio in direzione } x$$

$$T_y(z) = \int_A \tau_{zy} dA \quad \text{Taglio in direzione } y$$

$$M_x(z) = \int_A \sigma_z y dA \quad \text{Momento flettente in direzione } x$$

$$M_y(z) = - \int_A \sigma_z x dA \quad \text{Momento flettente in direzione } y$$

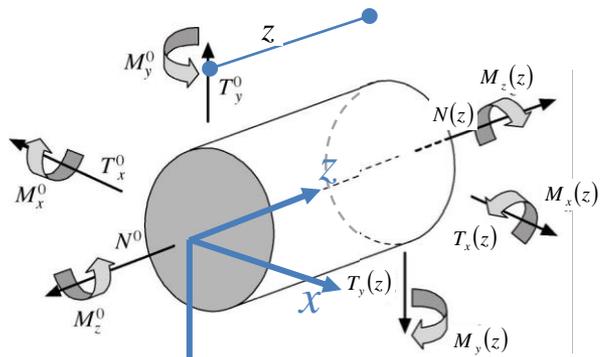
$$M_z(z) = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \quad \text{Momento torcente}$$





Caratteristiche della sollecitazione

Lo stato tensionale presente sulle facce di sezione (e quindi anche le risultanti), deve essere tale da garantire l'equilibrio di entrambe le parti in cui si è suddiviso il solido (rem. principio di separazione di Eulero)



$$T_x(z) = T_x^0$$

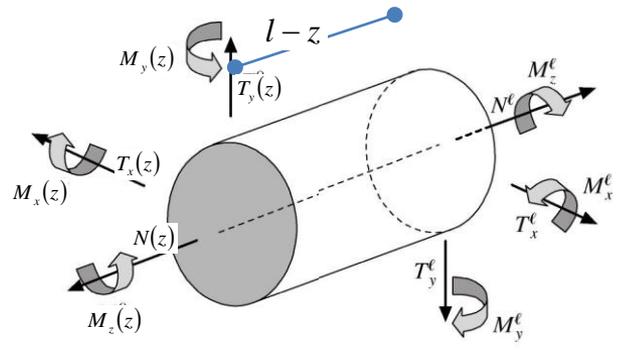
$$T_y(z) = T_y^0$$

$$N(z) = N^0$$

$$M_x(z) = M_x^0 + zT_y^0$$

$$M_y(z) = M_y^0 - zT_x^0$$

$$M_z(z) = M_z^0$$



$$T_x(z) = T_x^l$$

$$T_y(z) = T_y^l$$

$$N(z) = N^l$$

$$M_x(z) = M_x^l - (l-z)T_y^l$$

$$M_y(z) = M_y^l + (l-z)T_x^l$$

$$M_z(z) = M_z^l$$



Caratteristiche della sollecitazione

In un certo senso si può dire che le componenti della risultante e del momento risultante definite nelle precedenti slide, "riassumano", e quindi "caratterizzano", lo stato tensionale a cui si riferiscono. Per tale motivo esse si dicono *caratteristiche della sollecitazione*.

Utilizzando le (12) si può facilmente dimostrare che i due insiemi di equazioni di equilibrio riportati nella precedente slide sono assolutamente equivalenti. Pertanto, come era possibile aspettarsi, imponendo indifferentemente l'equilibrio della parte destra o della parte sinistra del solido di *de Saint Venant*, si ottiene il medesimo valore delle caratteristiche della sollecitazione .



Il solido di *de Saint Venant*

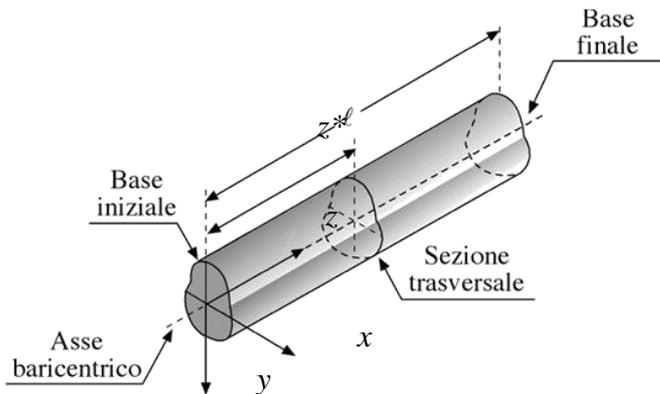
Riepilogo delle relazioni ottenute



Rem.

È stato descritto il problema di *de Saint Venant*, un particolare problema elastico lineare isotropo che riguarda l'analisi di un solido cilindrico ad asse rettilineo, privo di vincoli e sollecitato solo in corrispondenza delle basi di estremità. Nonostante la particolarità del problema, i suoi risultati possono essere utilizzati anche per l'analisi di travi sottoposte ad usuali condizioni di carico e di vincolo. Questa generalizzazione viene effettuata attraverso la teoria tecnica della trave.

Per la particolare geometria e per la particolare condizione di carico e di vincolo, si è visto che in ogni punto materiale del solido di *de Saint Venant* le componenti di tensione non nulle sono al più le seguenti.



$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3)$$



Rem. Il problema di de Saint Venant – riepilogo

Il problema di de Saint Venant è governato dalle seguenti equazioni

Equazioni di dominio

Condizioni al contorno

$$[\tilde{C}]\{\underline{\sigma}\} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{(SV1)}$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad \forall P \in \partial B_m \quad \text{(SV3)}$$

equazioni di equilibrio

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in \partial B_{bf}$$

(SV4)

$$\begin{cases} \{\underline{\sigma}\} = [S]\{\underline{\varepsilon}\} \\ \{\underline{\varepsilon}\} = [C]\mathbf{u} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases} \quad \text{(SV2)}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix} \quad \forall P \in \partial B_{bi}$$

Affinché il campo di deformazione ottenuto dalle precedenti relazioni sia integrabile, devono inoltre essere soddisfatte le equazioni di congruenza interna, introdotte a suo tempo e riportate nella slide seguente.



Rem. Condizioni al contorno sulle basi

Il postulato di de Saint Venant consente di sostituire le uguaglianze puntuali fra tensione e forze superficiali esterne con quelle riportate nella presente slide

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$\forall P \in \partial B_{bf}$ \longrightarrow

$$N^\ell = \int_A p_z dA = \int_A \sigma_z dA$$

$$T_x^\ell = \int_A p_x dA = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T_y^\ell = \int_A p_y dA = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x^\ell = \int_A p_z y dA = \int_A \sigma_z y dA$$

$$M_y^\ell = -\int_A p_z x dA = -\int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z^\ell = \int_A (p_y x - p_x y) dA = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

su ∂B_{bf}

(SV4)

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix}$$

$\forall P \in \partial B_{bi}$ \longrightarrow

$$N^0 = -\int_A p_z dA = \int_A \sigma_z dA$$

$$T_x^0 = -\int_A p_x dA = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T_y^0 = -\int_A p_y dA = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x^0 = -\int_A p_z y dA = \int_A \sigma_z y dA$$

$$M_y^0 = \int_A p_z x dA = -\int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z^0 = -\int_A (p_y x - p_x y) dA = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

su ∂B_{bi}

In questo caso però, nella parte del solido che si trova in prossimità delle basi (ossia ad una distanza inferiore a quella di estinzione) le soluzioni del problema di de Saint Venant sono valide solo in media.



Rem. Il problema di de Saint Venant – congruenza interna

Affinché sia garantita la condizione di integrabilità del campo di deformazione, esso deve soddisfare le seguenti equazioni di congruenza interna

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}; & \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

Sostituendo i legami costitutivi nelle precedenti relazioni di integrabilità ed utilizzando le equazioni di equilibrio (SV1) si ottengono le seguenti relazioni di integrabilità del campo di deformazione espresse in termini di componenti di tensione

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) &= -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (SV5)$$

In pratica, le precedenti relazioni rappresentano la condizione che deve essere rispettata dalle componenti di tensione presenti nel solido di de Saint-Venant affinché il corrispondente campo di deformazione soddisfi le condizioni di congruenza interna o di integrabilità.



Rem.

Infine sono state determinate le caratteristiche della sollecitazione presenti in una generica sezione trasversale del solido come segue

$$N(z) = \int_A \sigma_z dA$$
Sforzo normale

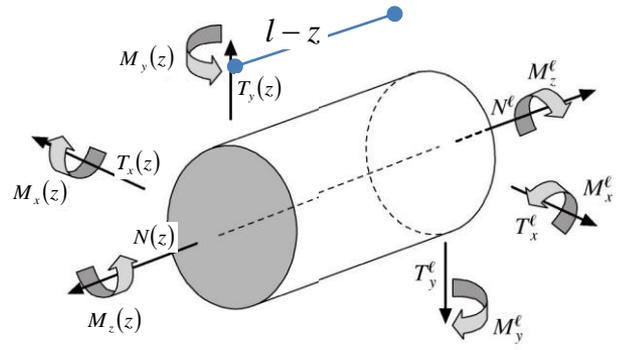
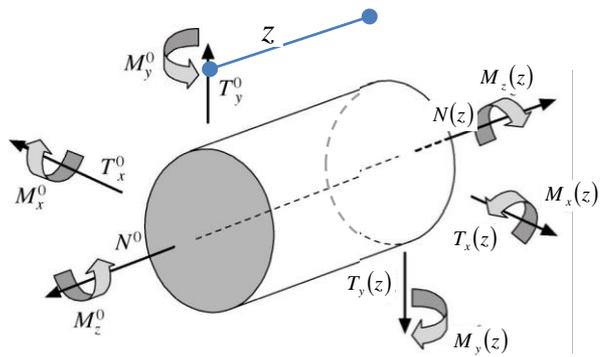
$$T_x(z) = \int_A \tau_{zx} dA$$
Taglio in direzione x

$$T_y(z) = \int_A \tau_{zy} dA$$
Taglio in direzione y

$$M_x(z) = \int_A \sigma_z y dA$$
Momento flettente in direzione x

$$M_y(z) = - \int_A \sigma_z x dA$$
Momento flettente in direzione y

$$M_z(z) = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$
Momento torcente



(SV6)



Rem.

Le risultanti delle azioni applicate sulle basi e le caratteristiche della sollecitazione devono soddisfare le seguenti relazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} N^\ell &= N^0 & T_x^\ell &= T_x^0 & T_y^\ell &= T_y^0 \\ M_z^\ell &= M_z^0 & M_x^\ell &= M_x^0 + \ell T_y^0 & M_y^\ell &= M_y^0 - \ell T_x^0 \end{aligned} \quad (\text{SV7.1})$$

$$\begin{aligned} T_x(z) &= T_x^0 \\ T_y(z) &= T_y^0 \\ N(z) &= N^0 \\ M_x(z) &= M_x^0 + z T_y^0 \\ M_y(z) &= M_y^0 - z T_x^0 \\ M_z(z) &= M_z^0 \end{aligned} \quad (\text{SV7.2})$$

$$\begin{aligned} T_x(z) &= T_x^\ell \\ T_y(z) &= T_y^\ell \\ N(z) &= N^\ell \\ M_x(z) &= M_x^\ell - (l - z) T_y^0 \\ M_y(z) &= M_y^\ell + (l - z) T_x^0 \\ M_z(z) &= M_z^0 \end{aligned} \quad (\text{SV7.3})$$