calcolo della matrice inversa con il metodo di Gauss-Jordan

(1) $\det\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix} = -1 \neq 0$ è invertibile

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{con } \underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I_3}$$

scambio la 3 riga con la 2

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\1&0&-1&0&1&0\end{pmatrix}$$

riduco a righe

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&-2&-1&-1&1&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&-1&1&2\end{pmatrix}$$

alla 2° riga sommo la 3° moltiplicata per -1

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&-1&1&2\end{pmatrix}$$

alla 1° riga sommo la 2° moltiplicata per -2

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I_3}\ \underbrace{\begin{matrix}-1&2&2\\1&-1&-1\\-1&1&2\end{matrix}}_{\text{inversa}}\right)$$

(2) $\det\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix} = -5$

$$\left(\begin{matrix}2&1\\3&-1\end{matrix}\ \underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}_{I_2}\right)$$

riduco a righe

$$\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&-\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

moltiplico la 1° riga per $\frac{1}{2}$ e la 2° per $\left(-\frac{2}{5}\right)$

$$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

alla 1° riga sommo la 2° molt. per $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}_{I_2}\ \underbrace{\begin{matrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\end{matrix}}_{\text{inversa}}\right)$$

(3) Studiare il sistema al variare di K in R

$$\begin{cases}2x + (K+1)y - (K+1)z = 0\\ x + y - z = 0\\ (K+1)x + 2y - 2Kz = 0\end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix}2&K+1&-K-1\\1&1&-1\\K+1&2&-2K\end{pmatrix} = 2(K-1)^2$$

- Per $K \neq 1$ il sistema ha solo la soluzione banale mentre per $K=1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix}2&2&-2\\1&1&-1\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

con 3 righe proporzionali. Il sistema è equivalente a $x+y-z=0$ e ha ∞^2 soluzioni del tipo $(x, y, x+y)$ $(l, m, l+m)$

(4) studiare la caratteristica di A al variare di K in R

$$\begin{pmatrix}1+K&2&2+K&3\\3+K&4&4+K&5\\5+K&6&6+K&7\end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix} \neq 0 \quad 2 \leq \operatorname{car} A \leq 3$$

dalla 2° riga sottraggo la 1°
dalla 3° " " la 1°

$$\begin{pmatrix}1+K&2&2+K&3\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1+K&2&2+K&3\\2&2&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

quindi car A = 2 per ogni valore di K