

Il solido di de Saint-Venant

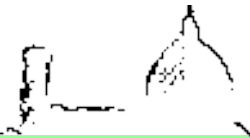


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

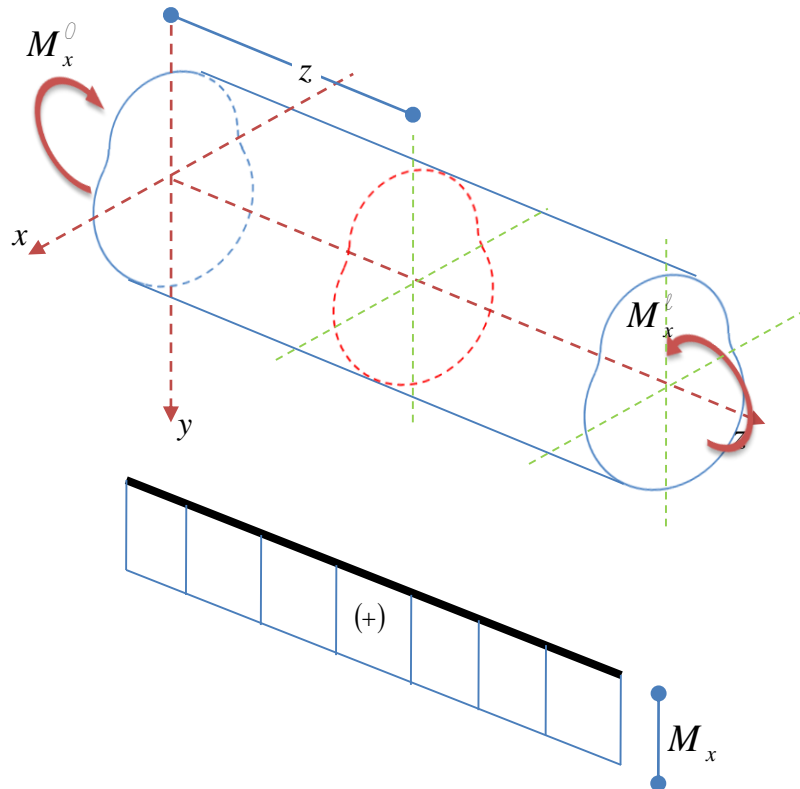
Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Flessione retta



La flessione retta



Si assuma che il solido di de Saint-Venant sia sollecitato in corrispondenza delle basi da carichi aventi come risultante due coppie uguali ed opposte, che generano un momento diretto parallelamente a un asse principale d'inerzia della sezione. Una sollecitazione di questo tipo si dice di flessione retta.

Si consideri ad esempio che le uniche sollecitazioni non nulle siano

$$M_x^l = M_x^0 = M_x \quad (27)$$

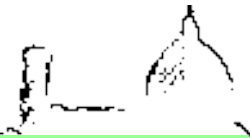
In questo caso, in ogni sezione trasversale del solido è presente un momento flettente M_x (costante, positivo secondo la convenzione definita per le caratteristiche della sollecitazione) parallelo ad una direzione principale d'inerzia della sezione stessa (in questo caso l'asse x).



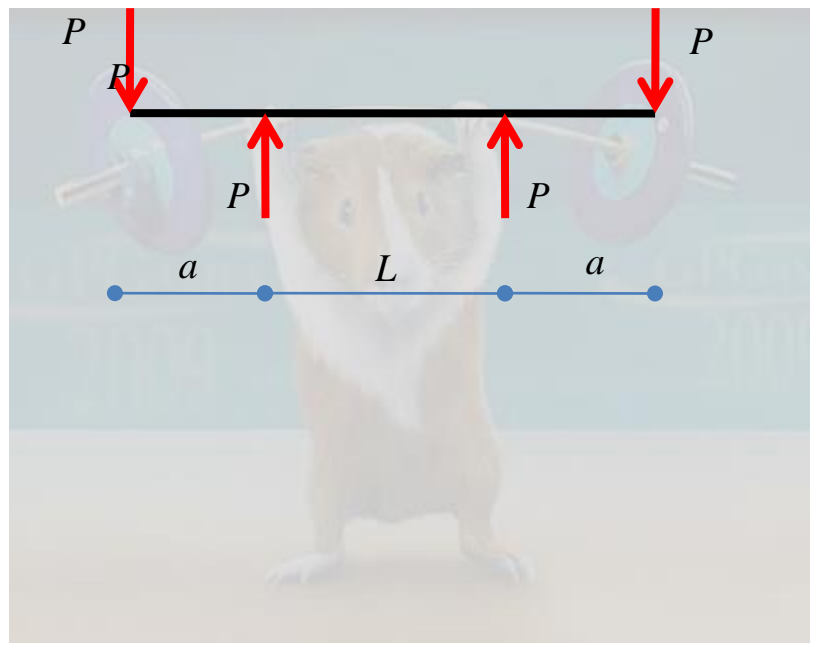
La flessione retta



Una condizione di carico del tipo in esame è ad esempio quella presente nella parte centrale di un bilanciere.

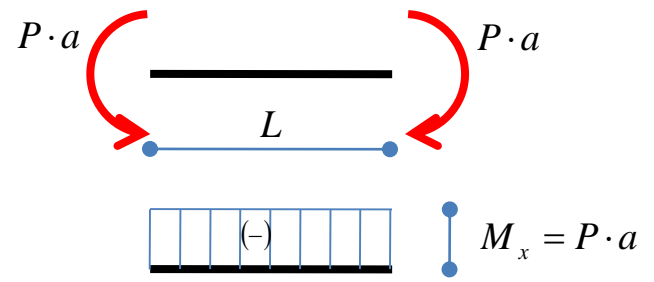


La flessione retta



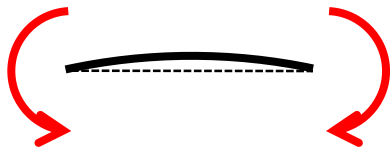
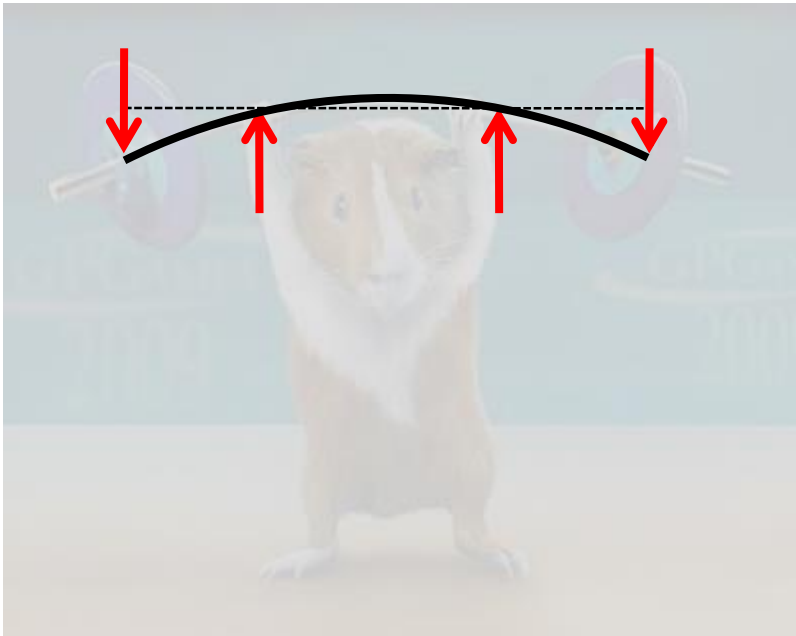
Una condizione di carico del tipo in esame è ad esempio quella presente nella parte centrale di un bilanciere.

L'effetto dei pesi posti agli estremi e delle braccia che sorreggono l'asta è infatti equivalente ad una sollecitazione flessionale del tipo in esame.





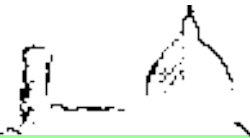
La flessione retta



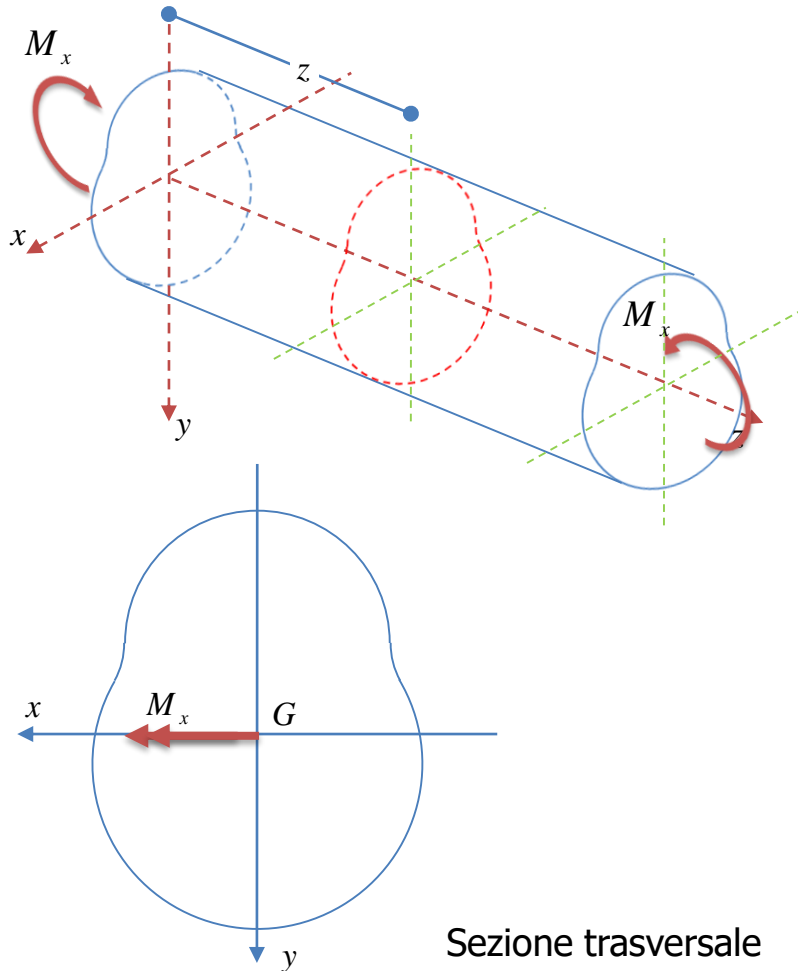
Una condizione di carico del tipo in esame è ad esempio quella presente nella parte centrale di un bilanciere.

L'effetto dei pesi posti agli estremi e delle braccia che sorreggono l'asta è infatti equivalente ad una sollecitazione flessionale del tipo in esame.

È intuitivo pensare che, a causa di tali azioni, l'asta si incurvi come schematizzato in figura.



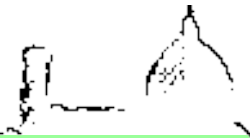
La flessione retta - definizioni



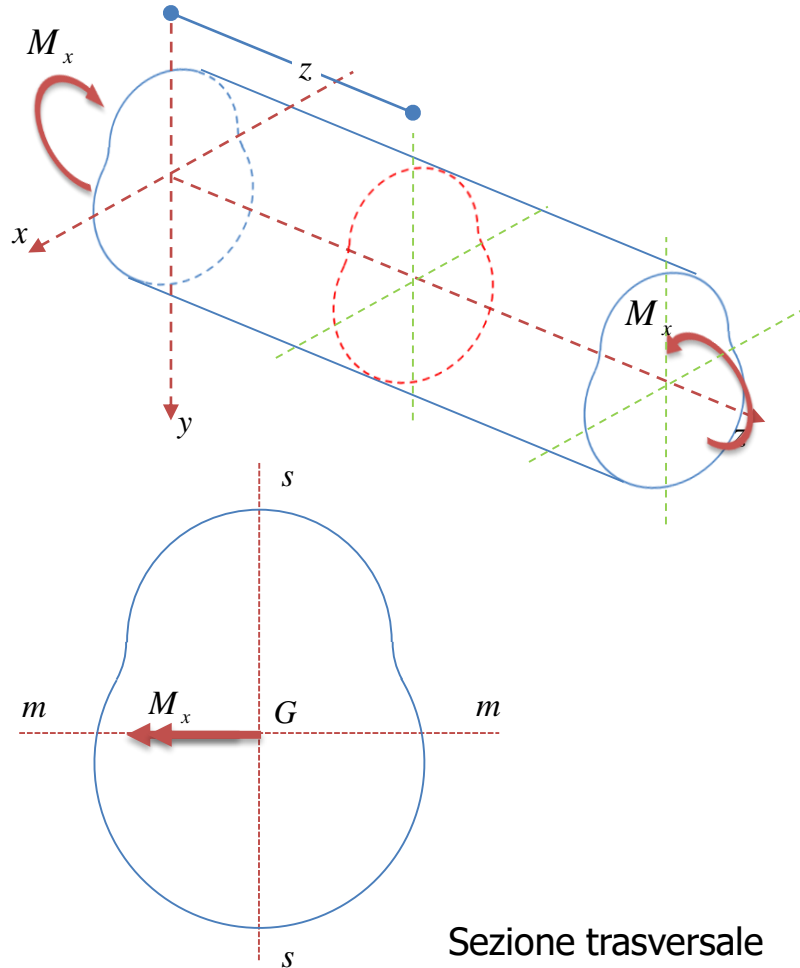
Sezione trasversale

Come si è visto nelle precedenti slide, le coppie M_x applicate sulle basi del solido possono essere generate da forze che sono contenute nel piano yz .

Per tale motivo, il piano che contiene l'asse della trave ed è ortogonale al vettore (a due punte) momento si dice **piano di sollecitazione** (per il caso in esame il piano di sollecitazione è yz). Inoltre, il piano che contiene l'asse della trave ed anche i vettori momento si dice **piano momento** (per il caso in esame xz).



La flessione retta - definizioni

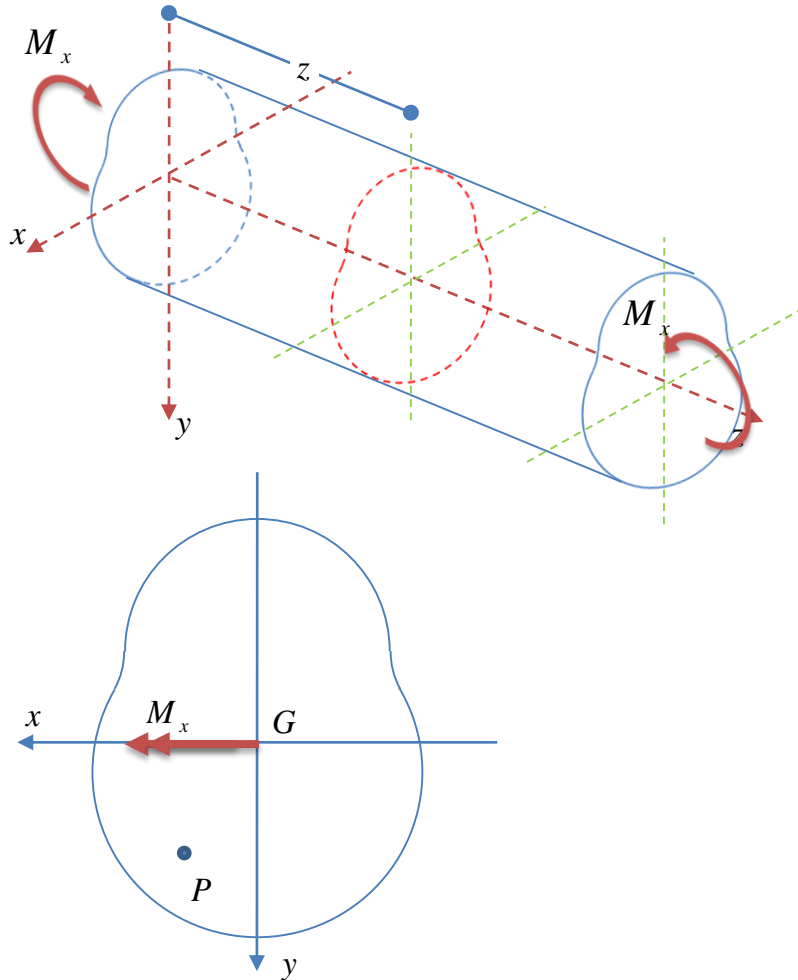


Sezione trasversale

L'intersezione tra il piano di sollecitazione ed una generica sezione trasversale si dice **asse di sollecitazione** (e si indica con $s-s$), mentre l'intersezione tra il piano momento ed una generica sezione trasversale si dice **asse momento** (e si indica con $m-m$).



La flessione retta



Per il caso di flessione retta in esame, la formula di Navier (2) si particularizza come segue:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad (28)$$

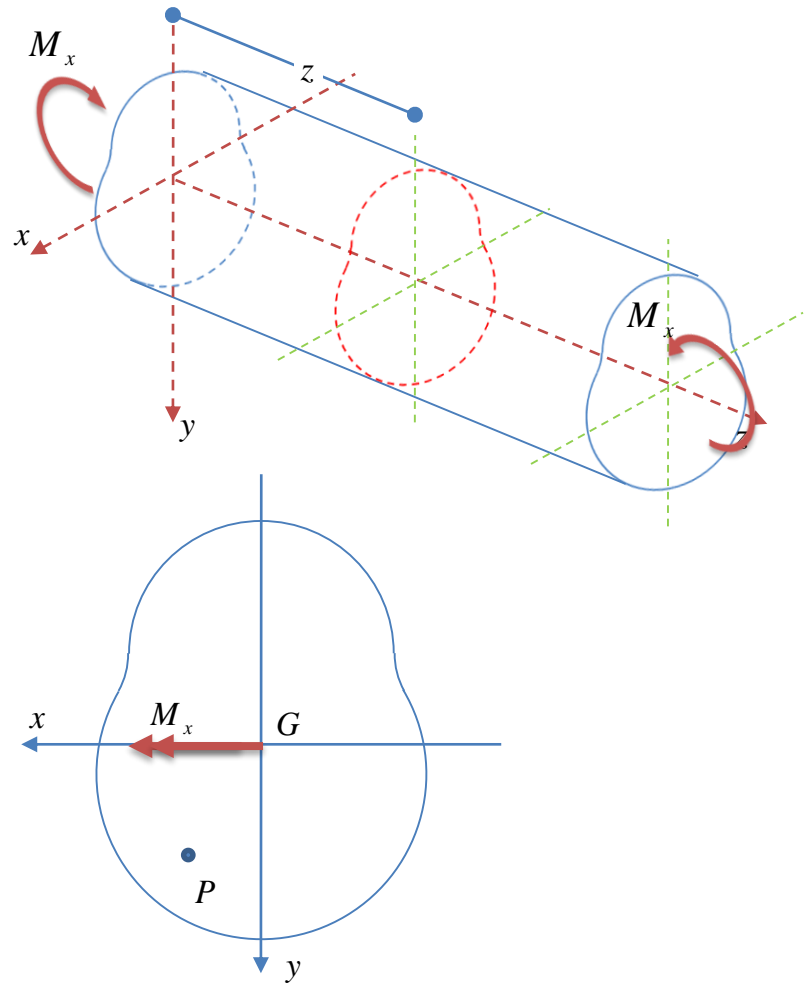
Utilizzando i legami costitutivi per il solido elastico lineare isotropo, dalla (28) si calcolano le corrispondenti componenti di deformazione:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{E I_x} y \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

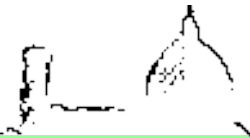
La (28) e la prima delle (29) indicano che la tensione normale e la deformazione in direzione assiale presente in un punto materiale dipendono solo dalla sua distanza dall'asse x (asse momento)



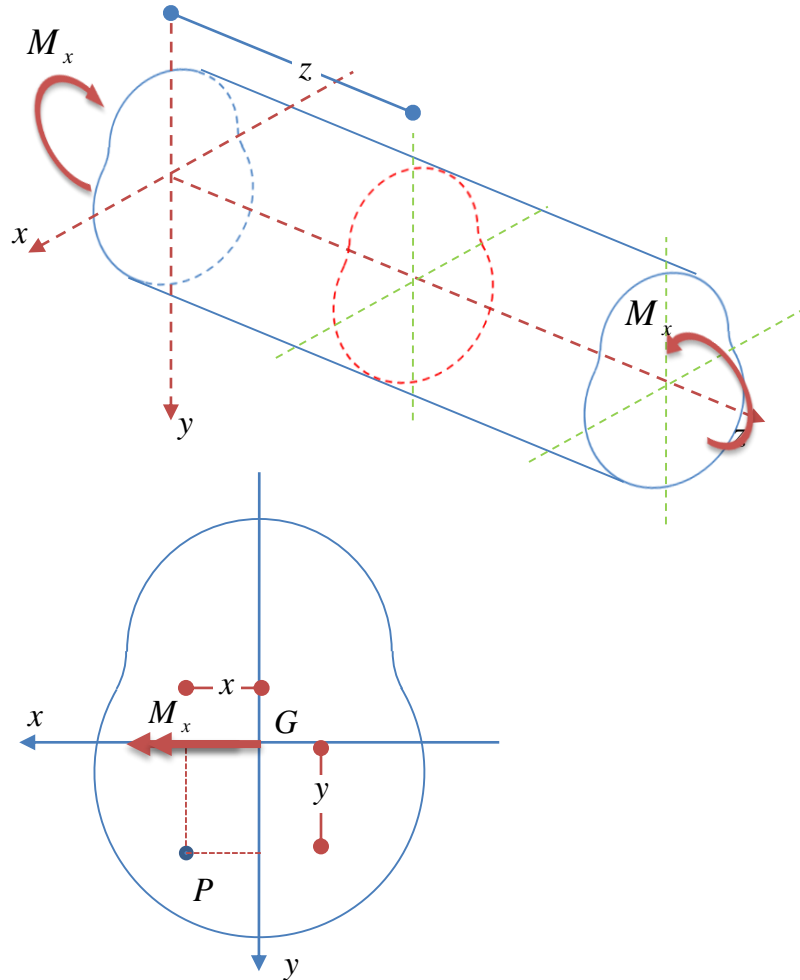
La flessione retta – tensioni normali



Su ogni sezione trasversale del solido in esame è presente un momento flettente di intensità (costante) pari a M_x . Pertanto (per le (28) e (29)), su tutte le sezioni trasversali è presente uno stato tensionale analogo.



La flessione retta – tensioni normali



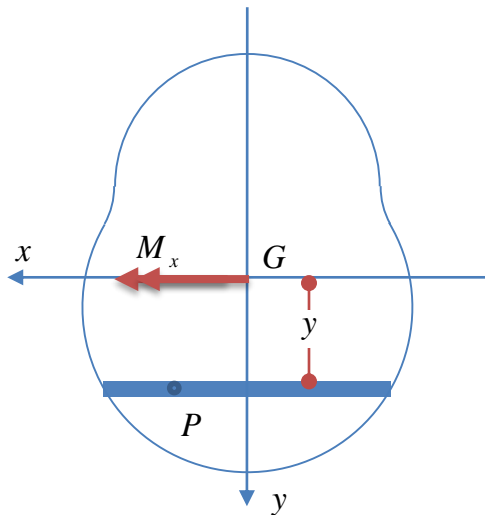
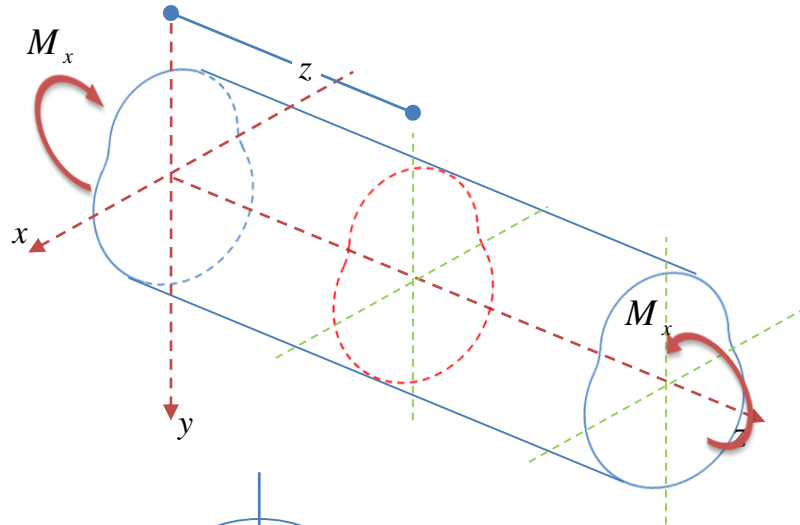
Su ogni sezione trasversale del solido in esame è presente un momento flettente di intensità (costante) pari a M_x . Pertanto (per le (28) e (29)), su tutte le sezioni trasversali è presente uno stato tensionale analogo.

La tensione normale presente su un generico punto materiale P di coordinate $P \equiv (x, y)$ si calcola come segue

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$



La flessione retta – tensioni normali

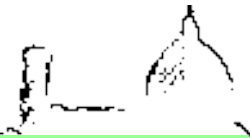


Su ogni sezione trasversale del solido in esame è presente un momento flettente di intensità (costante) pari a M_x . Pertanto (per le (28) e (29)), su tutte le sezioni trasversali è presente uno stato tensionale analogo.

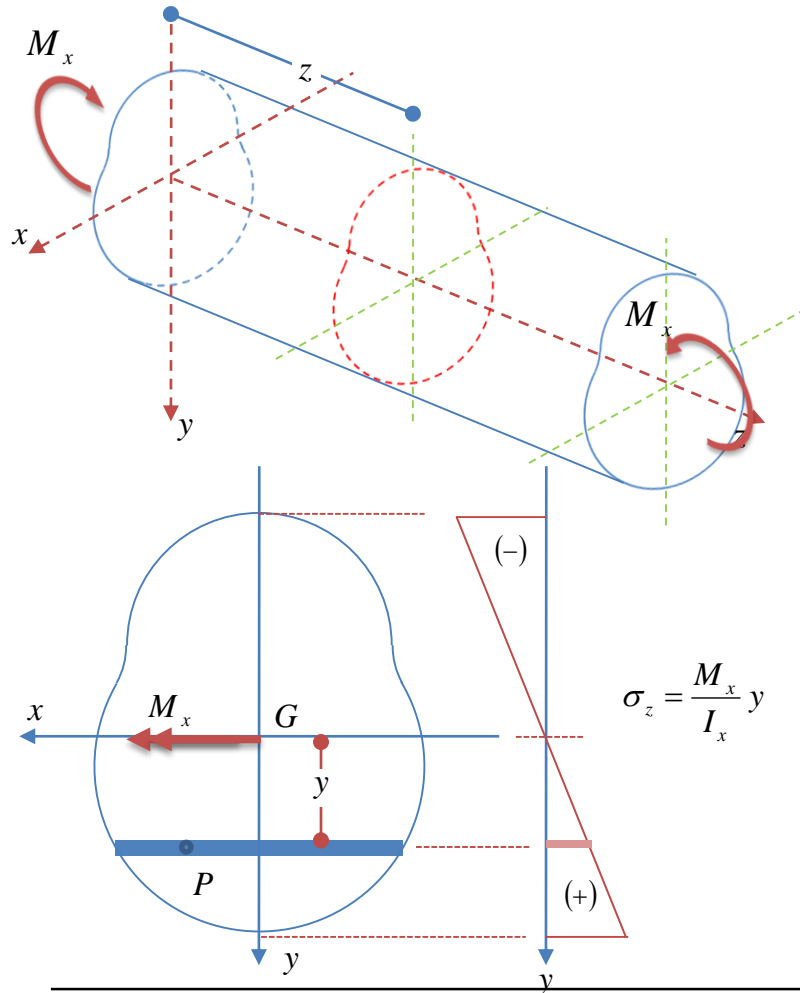
La tensione normale presente su un generico punto materiale P di coordinate $P \equiv (x, y)$ si calcola come segue

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Visto che la precedente espressione è indipendente dall'ascissa x del punto in esame, ne consegue che tutti i punti aventi uguale ordinata y sono sollecitati dallo stesso valore di tensione normale.

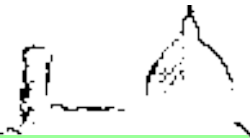


La flessione retta – tensioni normali

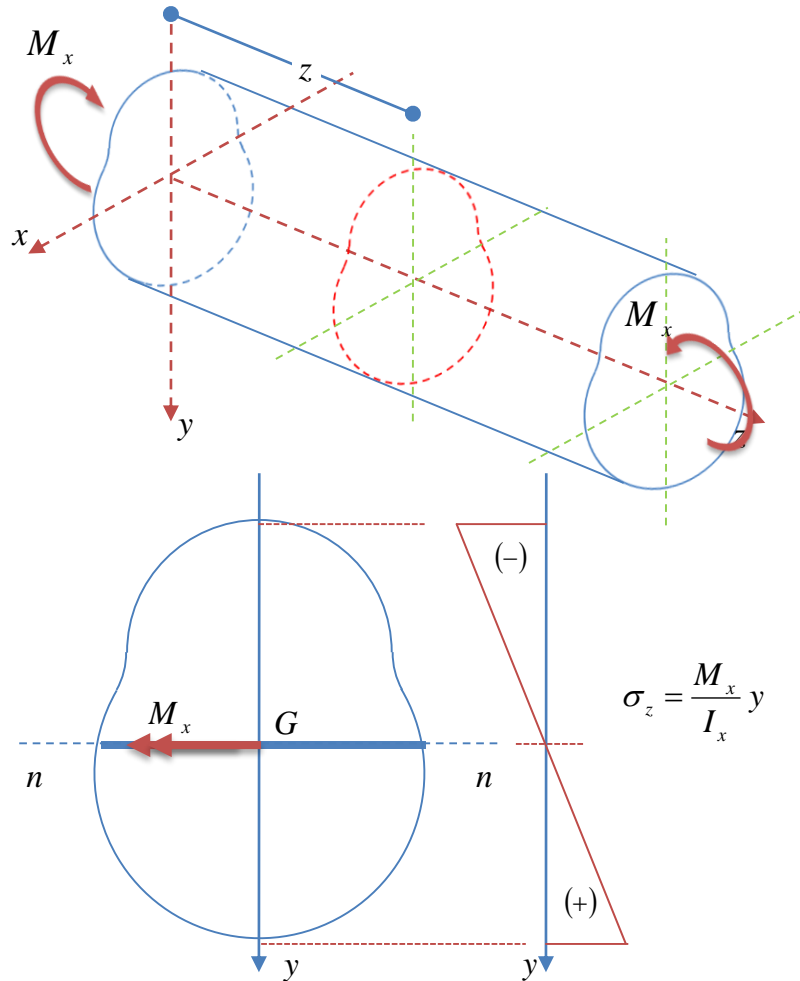


Per quanto detto, le tensioni normali, che hanno un andamento lineare con y , possono essere diagrammate rispetto ad un asse parallelo ad y .

A causa della sollecitazione flessionale indicata in figura (positiva perché concorde con l'asse x), i punti materiali che si trovano al di sotto dell'asse y sono sollecitati a trazione, mentre quelli che si trovano al di sopra dell'asse y sono sollecitati a compressione.



La flessione retta – tensioni normali

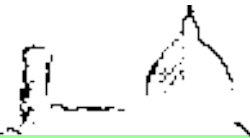


Per quanto detto, le tensioni normali, che hanno un andamento lineare rispetto ad y , possono essere diagrammate rispetto ad un asse parallelo ad y .

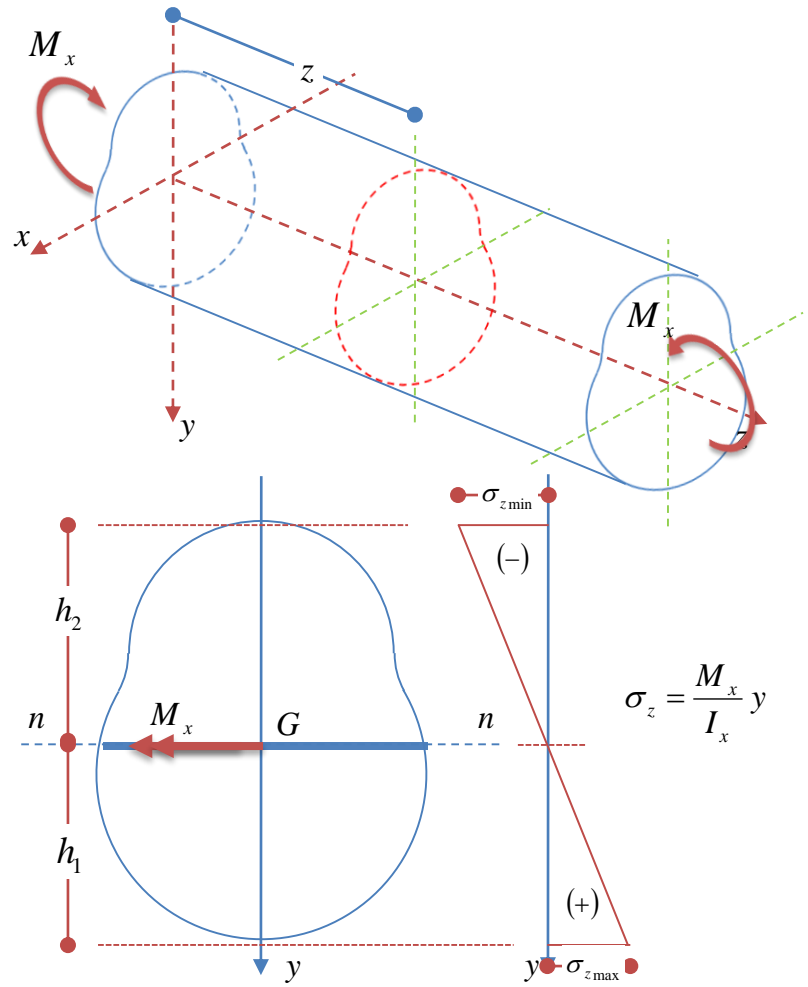
A causa della sollecitazione flessionale indicata in figura (positiva perché concorde con l'asse x), i punti materiali che si trovano al di sotto dell'asse y sono sollecitati a trazione, mentre quelli che si trovano al di sopra dell'asse y sono sollecitati a compressione.

I punti allineati sulla fibra baricentrica avente $y=0$ sono invece scarichi.

Si definisce asse neutro ($n-n$) l'asse passante per i punti aventi $\sigma_z=0$. Per il caso in esame l'asse neutro coincide con l'asse x del sistema di riferimento.



La flessione retta – tensioni normali



I punti della sezione sollecitati dalla tensione normale massima (di trazione) e minima (di compressione) sono quelli più lontani dall'asse neutro. Dette h_1 e h_2 le distanze di tali punti dall'asse neutro, il valore delle tensioni normali massima e minima presenti nella sezione si calcolano come segue:

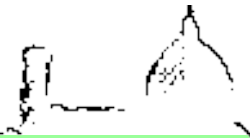
$$\sigma_{z\max} = \frac{M_x}{I_x} h_1 \quad \sigma_{z\min} = -\frac{M_x}{I_x} h_2$$

Definendo come segue i moduli di resistenza di una sezione

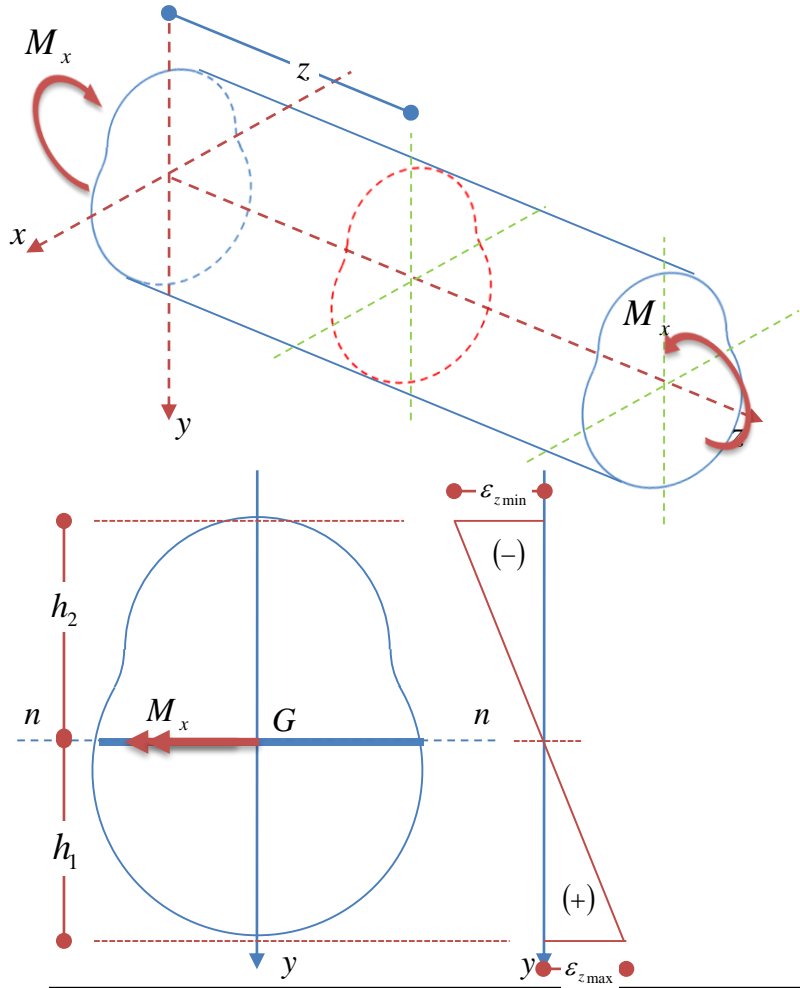
$$W_{x1} = \frac{I_x}{h_1} \quad W_{x2} = \frac{I_x}{h_2}$$

le precedenti relazioni possono anche scriversi nella seguente forma, operativamente più conveniente

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_x}{W_{x1}} \quad \sigma_{z\min} = -\frac{M_x}{W_{x2}}$$



La flessione retta – deformazioni assiali



Per la prima delle (29) le deformazioni assiali ϵ_z presenti nei punti materiali di una generica sezione trasversale si calcolano come segue:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$

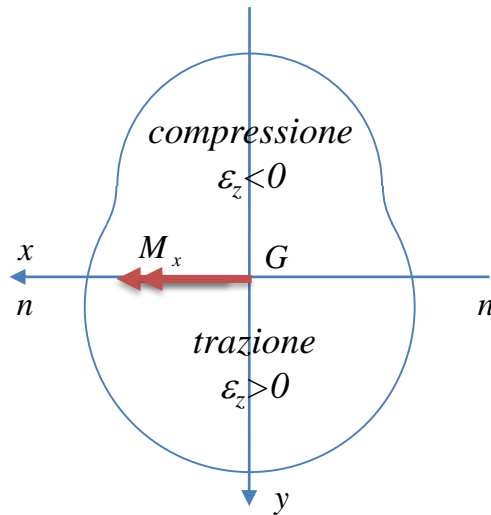
Il loro andamento è allora analogo a quello delle tensioni normali: i punti che si trovano sull'asse neutro non subiscono allungamenti, mentre quelli più lontani dall'asse neutro subiscono le deformazioni assiali massime e minime

$$\epsilon_{z\max} = \frac{M_x}{EI_x} h_1 \quad \epsilon_{z\min} = -\frac{M_x}{EI_x} h_2$$

Per la sollecitazione schematizzata in figura, le fibre aventi $y > 0$ subiscono un allungamento, mentre le fibre aventi $y < 0$ subiscono accorciamenti in direzione z .



La flessione retta – altre componenti di deformazione



Per la seconda delle (29) si ha:

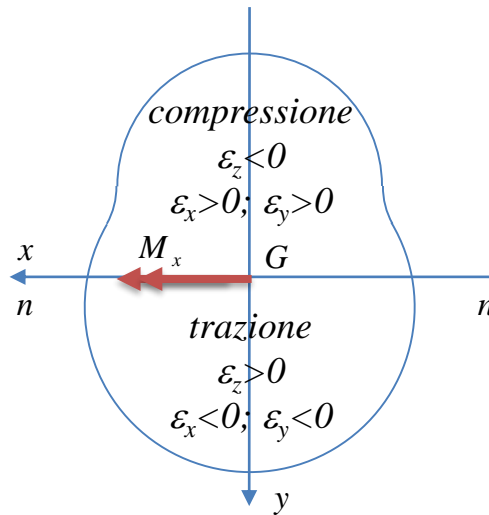
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$



Deformazione di una sezione trasversale nel suo piano



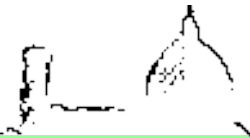
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$

Per la seconda delle (29) si ha:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y$$

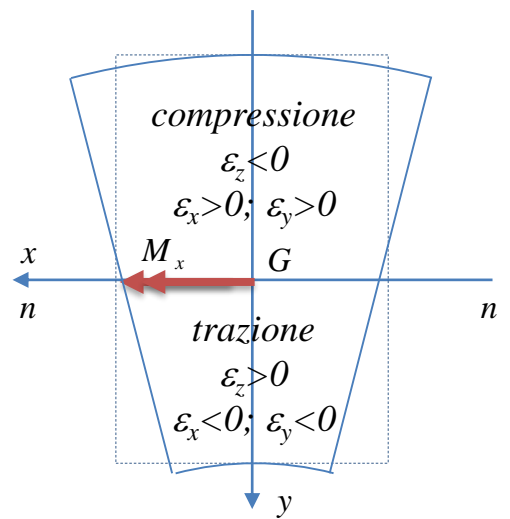
Pertanto, i punti che si trovano nella zona compressa, ossia al di sopra dell'asse neutro, subiscono degli allungamenti in direzione x ed y , mentre quelli che si trovano in zona tesa, ossia al di sotto dell'asse neutro, subiscono degli accorciamenti in direzione x ed y .



Deformazione di una sezione trasversale nel suo piano

Sezione trasversale indeformata

Sezione trasversale deformata



$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

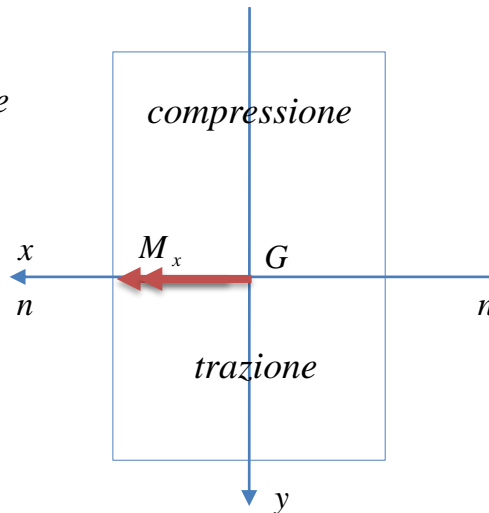
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$

Se, ad esempio, la trave in esame avesse sezione trasversale rettangolare nella sua configurazione indeformata, tale sezione si deformerebbe nel suo piano come indicato in figura.



Carichi anche sul mantello: teoria tecnica della trave

Sezione
 trasversale
 indeformata e
 deformata



$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$

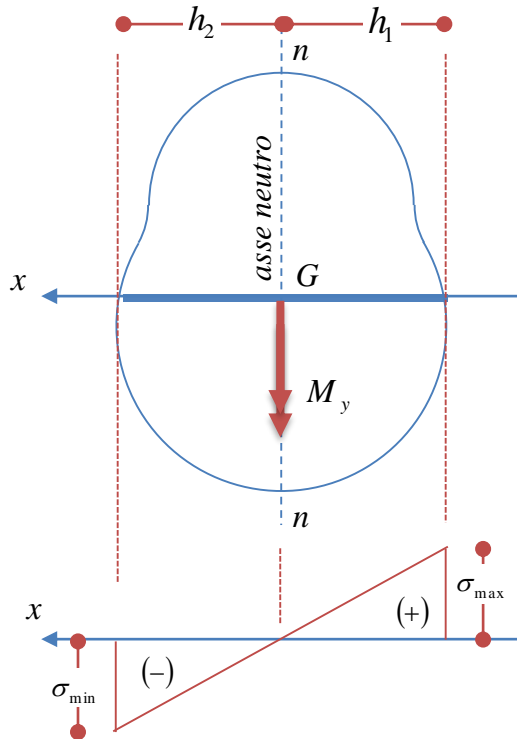
L'analisi di travi sollecitate in maniera generica (non solo sul mantello) sarà affrontata utilizzando la teoria tecnica della trave, che si basa sulle seguenti ipotesi:

1. che nel processo deformativo le sezioni trasversali della trave si mantengono piane, per cui si ha
2. che le sezioni trasversali si mantengono ortogonali alle fibre longitudinali deformate
3. le sezioni trasversali sono rigide nel loro piano

A parte, ovviamente, le considerazioni sulla deformazione della sezione trasversale nel suo piano, tutti i risultati ottenuti nell'ambito della teoria di de Saint Venant mantengono la loro validità.



La flessione retta – OSSERVAZIONE



Si osservi che quanto è stato ottenuto per la sollecitazione di flessione retta vale a patto che la sollecitazione flessionale agisca parallelamente ad un asse principale d'inerzia della sezione, e quindi anche nel caso in cui sia presente solo una sollecitazione flessionale M_y .

In questo caso si ha infatti:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{z \max} = \frac{M_y}{I_y} h_1 = \frac{M_y}{W_{y1}} \\ \sigma_{z \min} = -\frac{M_y}{I_y} h_2 = -\frac{M_y}{W_{y2}} \end{array} \right.$$

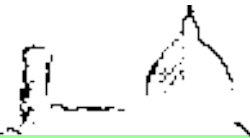
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = -\frac{M_y}{EI_y} x \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{z \max} = \frac{M_y}{EI_y} h_1 = \frac{M_y}{EW_{y1}} \\ \varepsilon_{z \min} = -\frac{M_y}{EI_y} h_2 = -\frac{M_y}{EW_{y2}} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$



Flessione retta

Calcolo del campo di spostamento



Calcolo del campo di spostamento (a meno di moto rigido)

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [S]\{\varepsilon\} \\ \{\varepsilon\} &= [C]\mathbf{u} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\nu \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\sigma_z}{E}; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad \text{(SV2)}$$

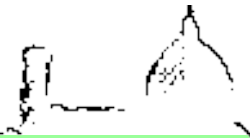
equazioni di congruenza e legame costitutivo

Visto che sono soddisfatte le condizioni di integrabilità, è possibile determinare le componenti di spostamento associate ai risultati fin qui ottenuti.

Per il problema in esame, le (SV2) si particolarizzano come indicato a fianco.



$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\nu \frac{M_x}{E I_x} y; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\nu \frac{M_x}{E I_x} y; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{M_x}{E I_x} y; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$



Calcolo del campo di spostamento (a meno di moto rigido)

$$\{\sigma\} = [S]\{\epsilon\}$$
$$\{\epsilon\} = [C]u$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -v \frac{\sigma_z}{E}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -v \frac{\sigma_z}{E}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

(SV2)
equazioni di congruenza e legame costitutivo



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -v \frac{M_x}{E I_x} y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -v \frac{M_x}{E I_x} y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_x}{E I_x} y; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

È facile verificare inoltre che, nell'ambito di validità del teorema di Schwarz, tra le componenti del tensore delle piccole deformazioni ϵ e del tensore di rotazione infinitesima ω valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} = \frac{\partial \epsilon_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jh}}{\partial x_i}$$

dalle quali si calcolano, a meno di moti rigidi, le seguenti componenti del tensore di rotazione infinitesima

$$\underline{\omega} = \frac{M_x}{E I_x} \begin{bmatrix} 0 & -vx & 0 \\ vx & 0 & -z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix}$$



Calcolo del campo di spostamento (a meno di moto rigido)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\nu \frac{M_x}{E I_x} y; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\nu \frac{M_x}{E I_x} y; & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{M_x}{E I_x} y; & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{\omega} = \frac{M_x}{E I_x} \begin{bmatrix} 0 & -\nu x & 0 \\ \nu x & 0 & -z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix}$$

Dalle relazioni nella precedente slide, si calcolano le componenti del tensore gradiente di spostamento **H** come segue (v. Nunziante, Gambarotta, Tralli):

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{M_x}{E I_x} \begin{bmatrix} -\nu y & -\nu x & 0 \\ \nu x & -\nu y & -z \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$$

Integrando le precedenti relazioni si ottengono (a meno di moti rigidi) le seguenti componenti di spostamento:

$$u = -\nu \frac{M_x}{E I_x} xy; \quad v = -\frac{M_x}{2E I_x} (z^2 + \nu(y^2 - x^2)); \quad w = \frac{M_x}{E I_x} yz; \quad (30)$$

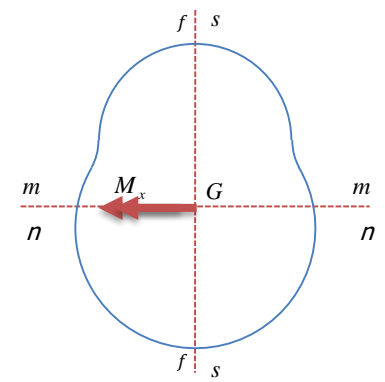
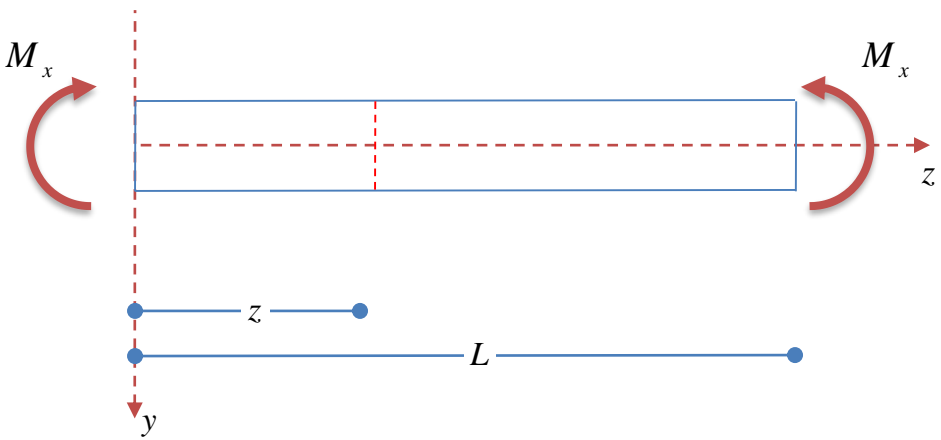


Spostamento della linea d'asse

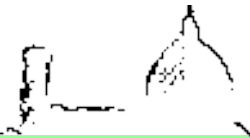
Particolarizzando le (30) ai punti appartenenti alla linea d'asse ($x=0; y=0$) si ottiene:

$$u_0 = 0; \quad v_0 = -\frac{M_x}{2E I_x} z^2; \quad w = 0; \quad (31)$$

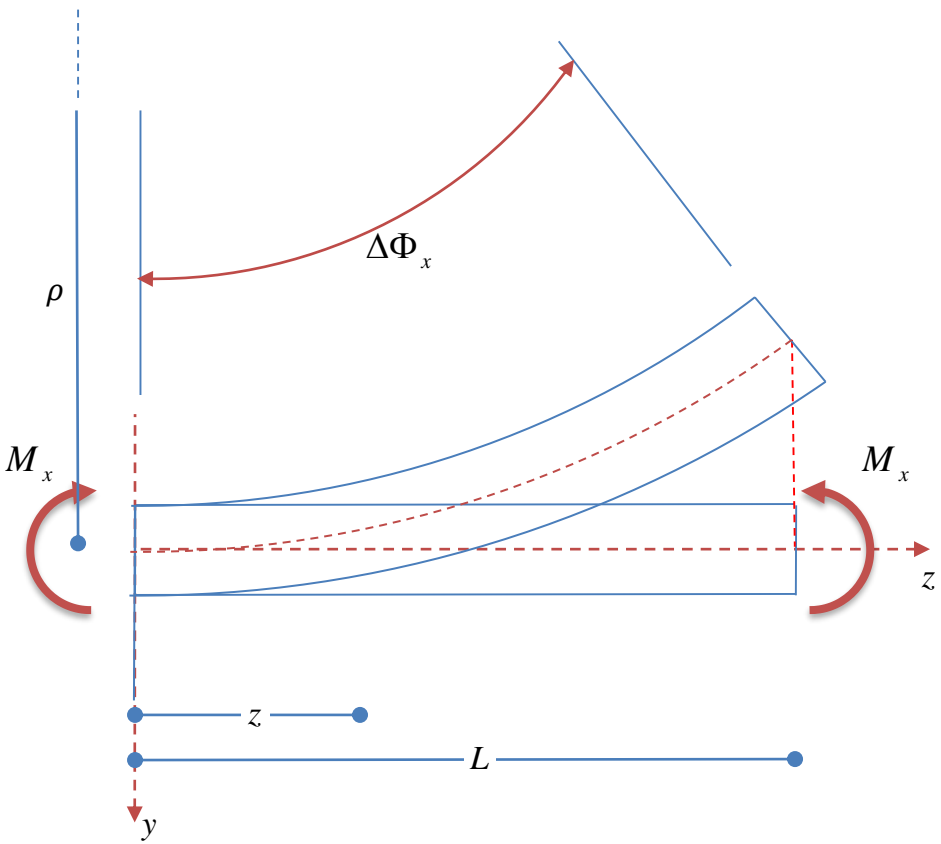
L'asse della trave si deforma, quindi, rimanendo nel piano (y,z) che viene detto piano di flessione; l'intersezione tra questo piano e un piano trasversale individua l'asse di flessione ($f-f$) che coincide con $(s-s)$



Sezione trasversale



Spostamento della linea d'asse



L'asse della trave si deforma quindi secondo una curva parabolica

$$u_0 = 0; \quad v_0 = -\frac{M_x}{2E I_x} z^2; \quad w = 0; \quad (31)$$

La curvatura (reciproco del raggio della circonferenza osculatrice) si determina, per una generica curva e in corrispondenza di una generica ascissa, utilizzando la seguente relazione:

$$\chi_x = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1 - v')^{3/2}}$$

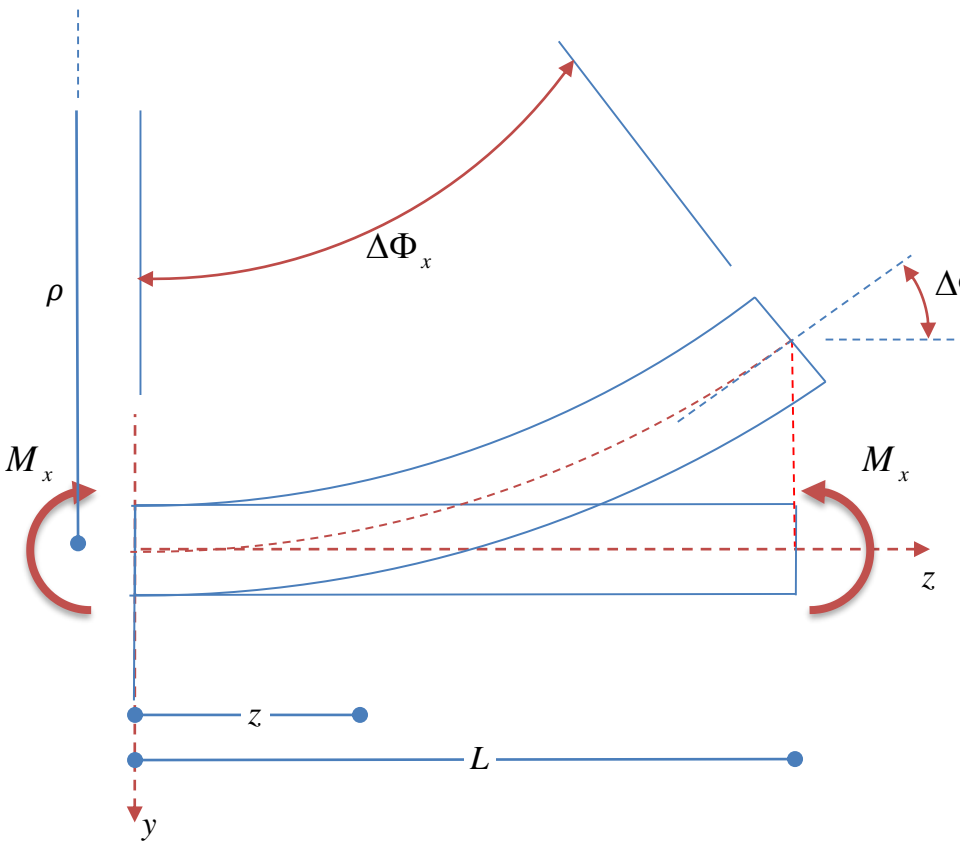
che per piccoli gradienti di spostamento si può approssimare come segue

$$\chi_x \cong v'' = -\frac{M_x}{E I_x} \quad (32)$$

Dalla precedente relazione (di Eulero-Bernoulli) si vede che la curvatura dell'asse deformato è (pressoché) costante, quindi può essere approssimato da un arco di circonferenza di raggio R.



Spostamento della linea d'asse



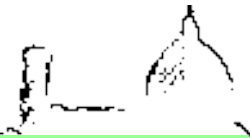
La rotazione tra le due sezioni di estremità $\Delta\Phi_x$ (piccolo per ipotesi) può essere determinata come segue:

$$\tan(\Delta\Phi_x) \cong \Delta\Phi_x = -v'_0(z = L) = \frac{M_x}{E I_x} L \quad (33)$$

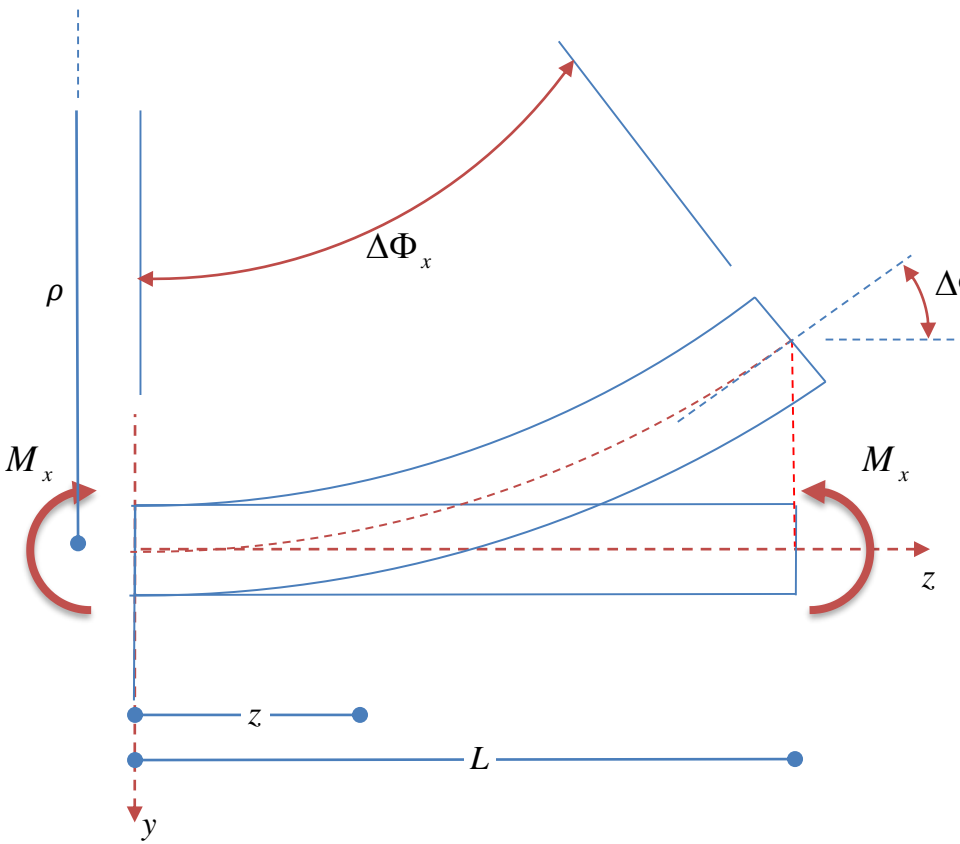
Analogamente, la rotazione di una generica sezione di ascissa z si calcola come segue

$$\varphi_x(z) = -v'_0(z) = \frac{M_x}{E I_x} z \quad (34)$$

Il termine EI_x presente nella (33) e nella (34) è detto rigidità flessionale in quanto, a parità di sollecitazione flessionale, al suo aumentare si ha una diminuzione della rotazione relativa tra le sezioni trasversali della trave.



Spostamento della linea d'asse



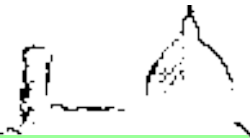
Dalla (34) si ha che la rotazione relativa $d\varphi_x$ tra due sezioni trasversali distanti tra loro dz è pari a:

$$d\varphi_x = \frac{M_x}{E I_x} dz \rightarrow \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{E I_x} = \chi_x \quad (35)$$

Combinando la (35) e la (34) si ha inoltre:

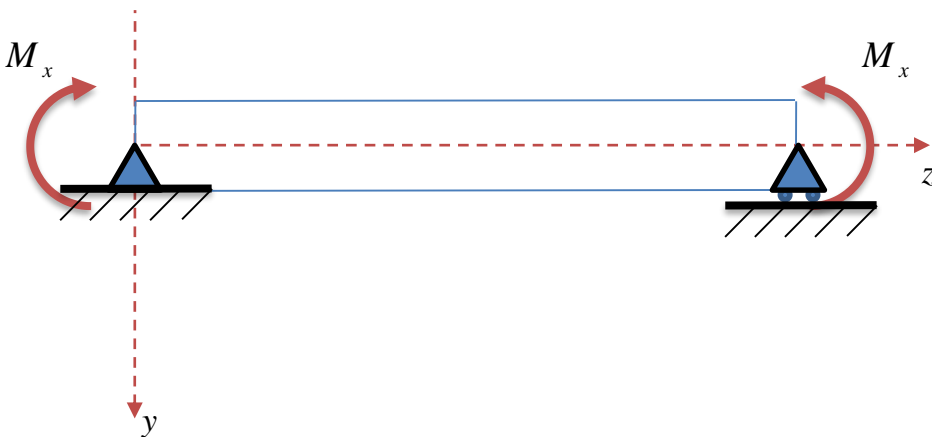
$$\chi_x = \varphi_x' = -v_0'' \quad (36)$$

Si osservi che, tanto maggiore è la curvatura, tanto minore è il raggio del cerchio tangente alla deformata dell'asse della trave e quindi tanto maggiormente deformata risulta la trave. La curvatura è allora una misura della deformazione flessionale.



Flessione retta – rotazioni e freccia

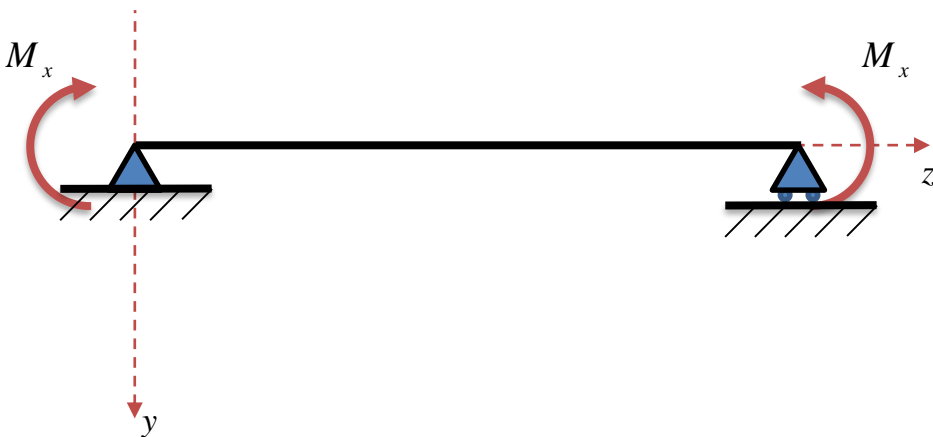
Si consideri ad esempio la trave schematizzata in figura, vincolata in corrispondenza dei baricentri delle sezioni di estremità da una cerniera e da un carrello. Il sistema è isostatico per cui sono impediti i moti rigidi: in questo caso è possibile determinare le rotazioni attorno all'asse x di tutte le sezioni trasversali e gli spostamenti in direzione y dei baricentri delle sezioni trasversali.

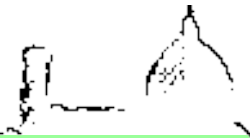




Flessione retta – rotazioni e freccia

Per comodità di rappresentazione ci riferiamo alla linea d'asse della trave.





Flessione retta – rotazioni e freccia

Per comodità di rappresentazione ci riferiamo alla linea d'asse della trave.

Come si è visto, l'asse della trave si deforma secondo una curva approssimabile con un arco di circonferenza di raggio

$$\rho = \frac{EI_x}{M_x}$$

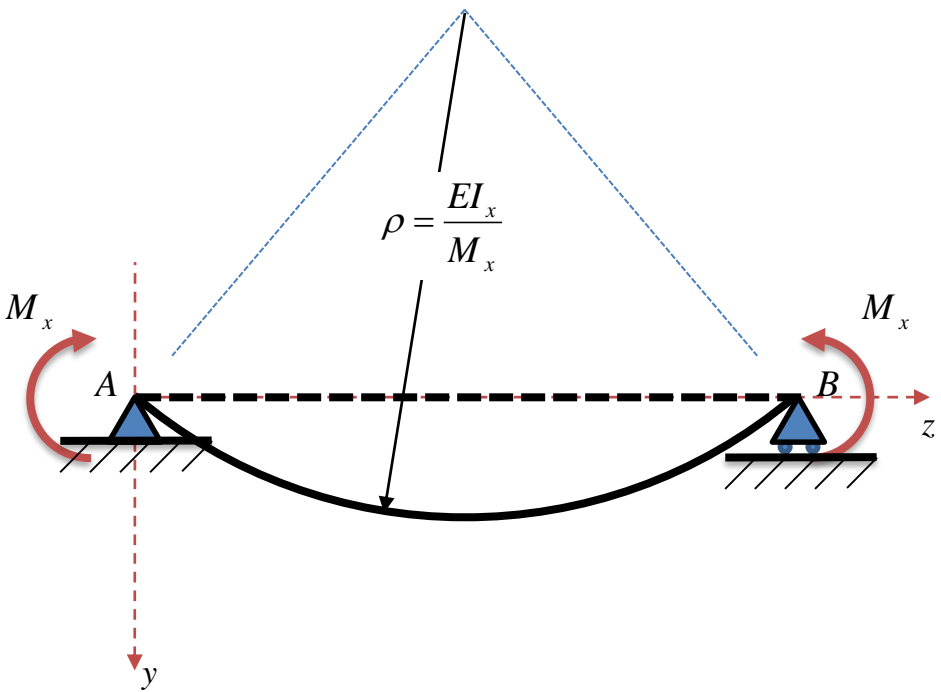
La rotazione relativa tra le sezioni di estremità si calcola come segue

$$\Delta\Phi_x = \frac{L}{EI_x} M_x$$

Per la simmetria del problema si ha

$$-\varphi_{xA} = \varphi_{xB} = \frac{\Delta\Phi_x}{2} = \frac{M_x L}{2EI_x}$$

La sezione d'estremità A ha infatti una rotazione negativa (oraria) mentre la sezione B ha una rotazione positiva (antioraria)

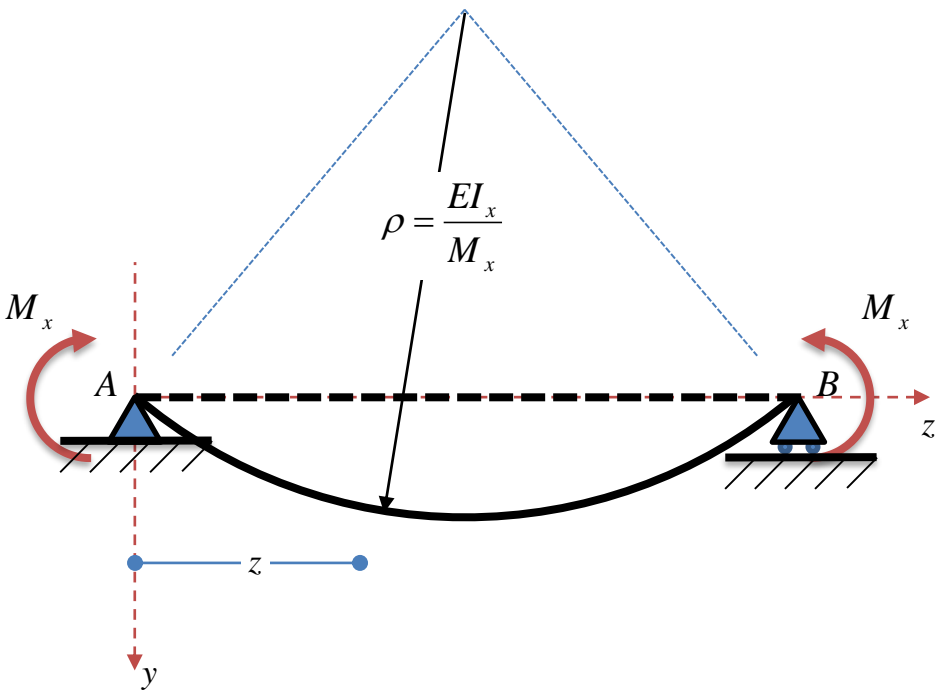




Flessione retta – rotazioni e freccia

La rotazione di una sezione ad ascissa generica z si può come segue

$$\varphi_x(z) = \varphi_{xA} + \Delta\varphi_x(z) = \frac{M_x}{EI_x} \left(z - \frac{L}{2} \right)$$





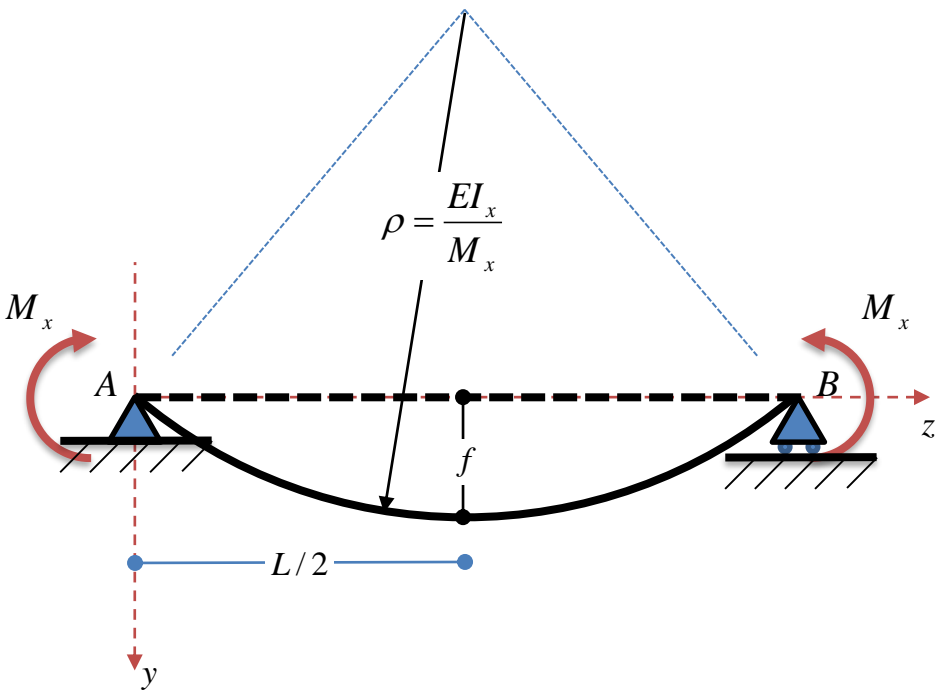
Flessione retta – rotazioni e freccia

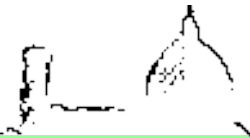
La rotazione di una sezione ad ascissa generica z si può calcolare come segue

$$\varphi_x(z) = \varphi_{xA} + \Delta\varphi_x(z) = \frac{M_x}{EI_x} \left(z - \frac{L}{2} \right)$$

Il calcolo dello spostamento verticale $v(z)$ del baricentro di una sezione ad ascissa generica z non rientra negli scopi della presente lezione e sarà analizzato successivamente nel corso. Si vuole però calcolare la **freccia** f , ossia lo spostamento verticale massimo, per la trave in figura. Per la simmetria del problema, tale spostamento si avrà in corrispondenza della sezione di mezzeria.

Per l'esempio che stiamo analizzando si veda il libro di C. Comi e L. Corradi **Dell'Acqua**.





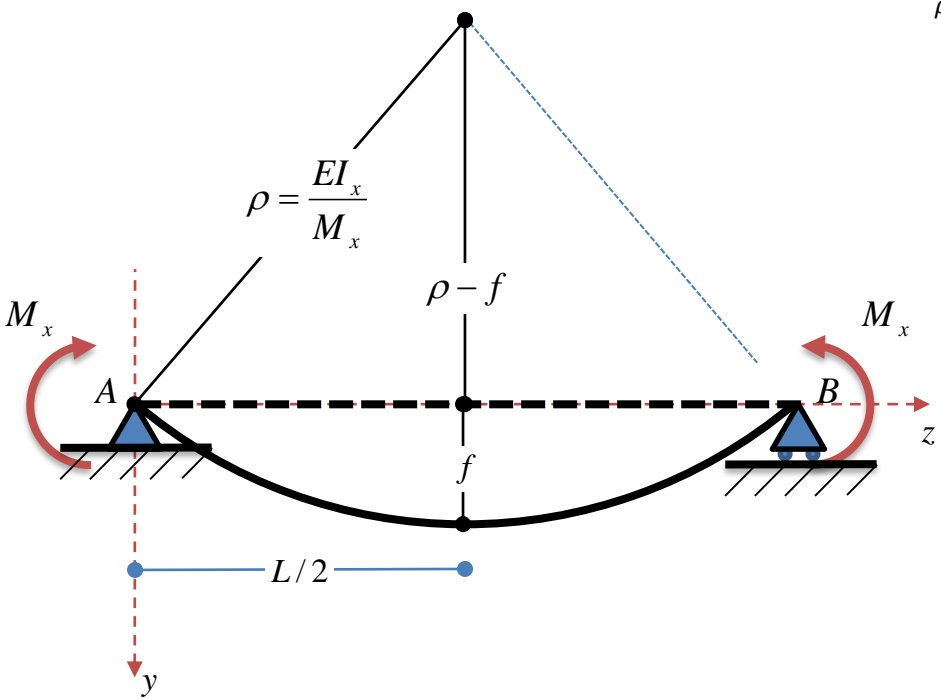
Flessione retta – rotazioni e freccia

Applicando il teorema di Pitagora si ottiene

$$\rho^2 = (\rho - f)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4} + \rho^2 - 2\rho f + f^2 \rightarrow \frac{L^2}{4} - 2\rho f + f^2 = 0$$

Per piccoli gradienti di deformazione il termine f^2 è sicuramente trascurabile rispetto agli altri, per cui si ha

$$f = \frac{L^2}{8\rho} = \frac{M_x L^2}{8EI_x}$$





Influenza della forma della sezione trasversale

Analizzando le relazioni ottenute per la flessione retta, è evidente che il valore della curvatura, della tensione normale e della deformazione assiale dipendono in maniera inversamente proporzionale dal momento d'inerzia I_x . Inoltre anche la rotazione relativa tra le sezioni di estremità di una trave sollecitata da un momento flettente costante è inversamente proporzionale al momento d'inerzia I_x . Una relazione analoga vale anche per la freccia calcolata per la trave appoggiata-appoggiata.

È chiaro allora che, a parità di tipo di materiale, ossia di modulo elastico, e di quantità di materiale, ossia di area, dal punto di vista flessionale sono più efficienti le sezioni che hanno momento d'inerzia maggiore. Ad esempio, a parità di area (e di altezza complessiva della sezione), è più efficiente una sezione a "doppio T" che una sezione rettangolare.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

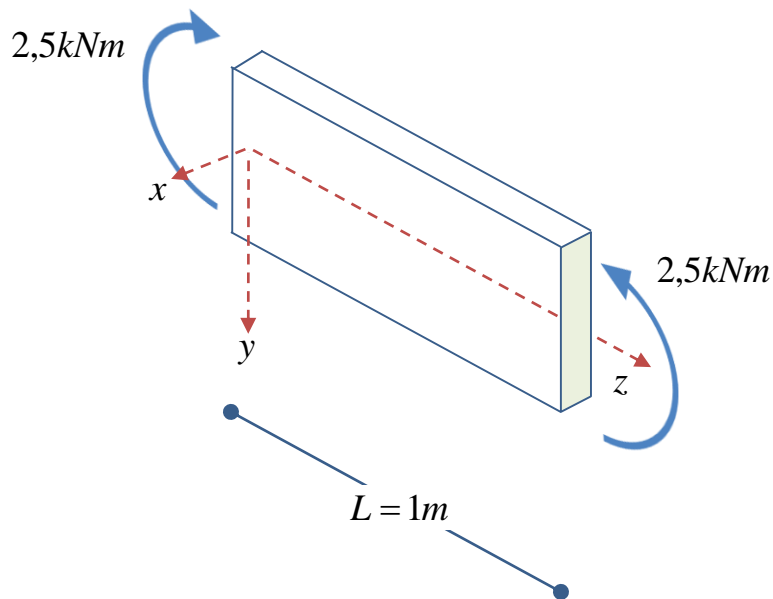
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$

$$\chi_x = \frac{M_x}{E I_x}$$

$$\Delta\Phi_x = \frac{M_x}{E I_x} L$$

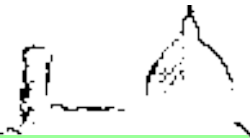


Esercizio

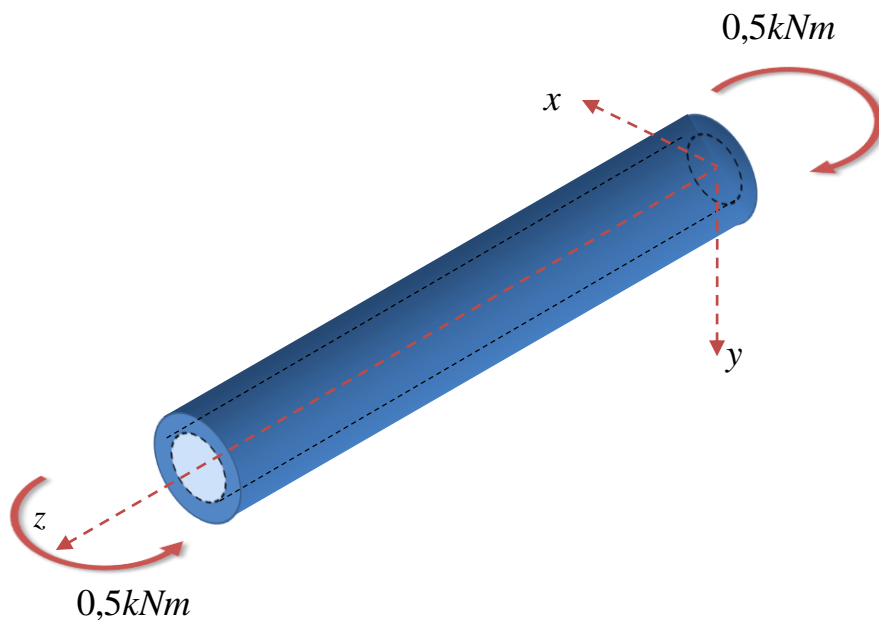


L'asta in acciaio in figura ($E=210GPa$) ha sezione trasversale rettangolare di dimensione $10 \times 100mm$. In corrispondenza delle basi è applicata una coppia, parallela all'asse x del sistema di riferimento schematizzato in figura, pari a $2,5kNm$. Si determini:

- il modulo di resistenza W_x della sezione trasversale;
- il valore delle tensioni normali massime e minime;
- le componenti di deformazione presenti in corrispondenza dei punti materiali in cui sono presenti le tensioni massime e minime.



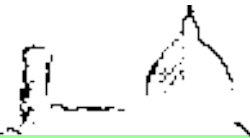
Esercizio



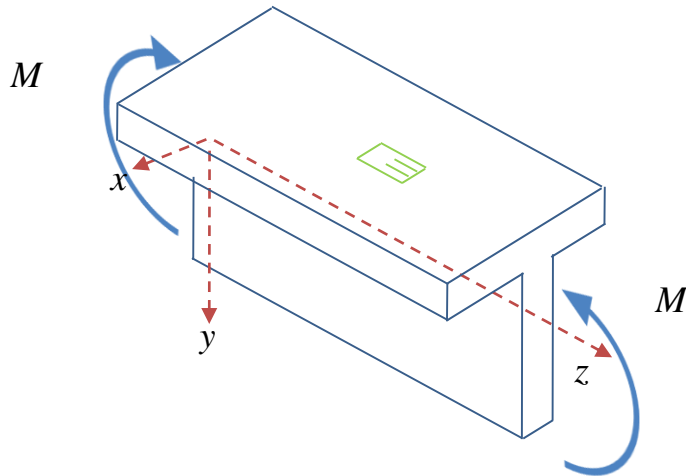
L'asta in alluminio in figura ha sezione trasversale circolare cava con diametro esterno di 100mm e spessore di 2mm . In corrispondenza delle basi è applicata una coppia, parallela all'asse y del sistema di riferimento schematizzato in figura, pari a $0,5\text{kNm}$. Si tracci un diagramma delle tensioni normali presenti su una generica sezione trasversale del solido.

N.B.

Si osservi che le coppie di estremità generano un momento flettente negativo $M_y = -0,5\text{kNm}$; in una generica sezione trasversale si ha trazione per i punti aventi $x > 0$.



Esercizio

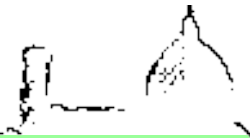


Un'asta in acciaio ($E=210GPa$) avente sezione trasversale a "T", è caricata da due coppie d'estremità come schematizzato in figura.

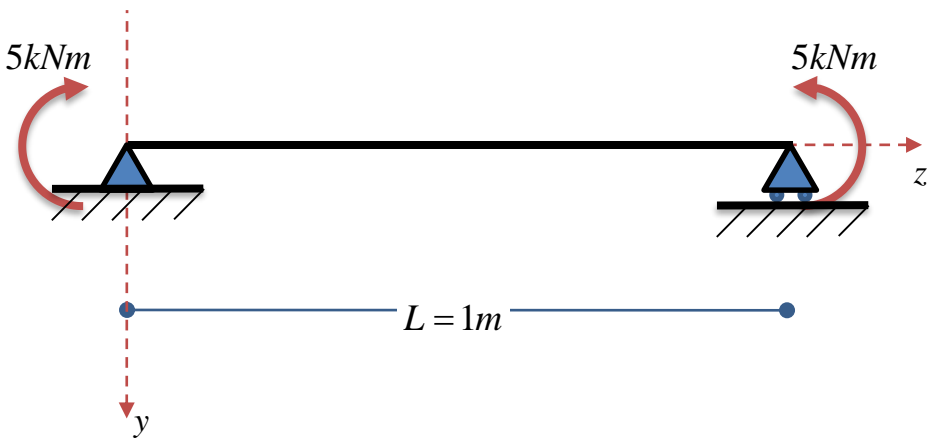
Utilizzando uno strain-gauge si misura la deformazione assiale provocata dalla coppia M in un punto sulla superficie superiore della trave

$$\varepsilon_z = 350 \mu$$

Si calcoli il modulo della coppia applicata alla trave.



Esercizio



L'asta in acciaio in figura ($E=210GPa$) ha sezione trasversale rettangolare di dimensione $20 \times 140mm$. Si determini:

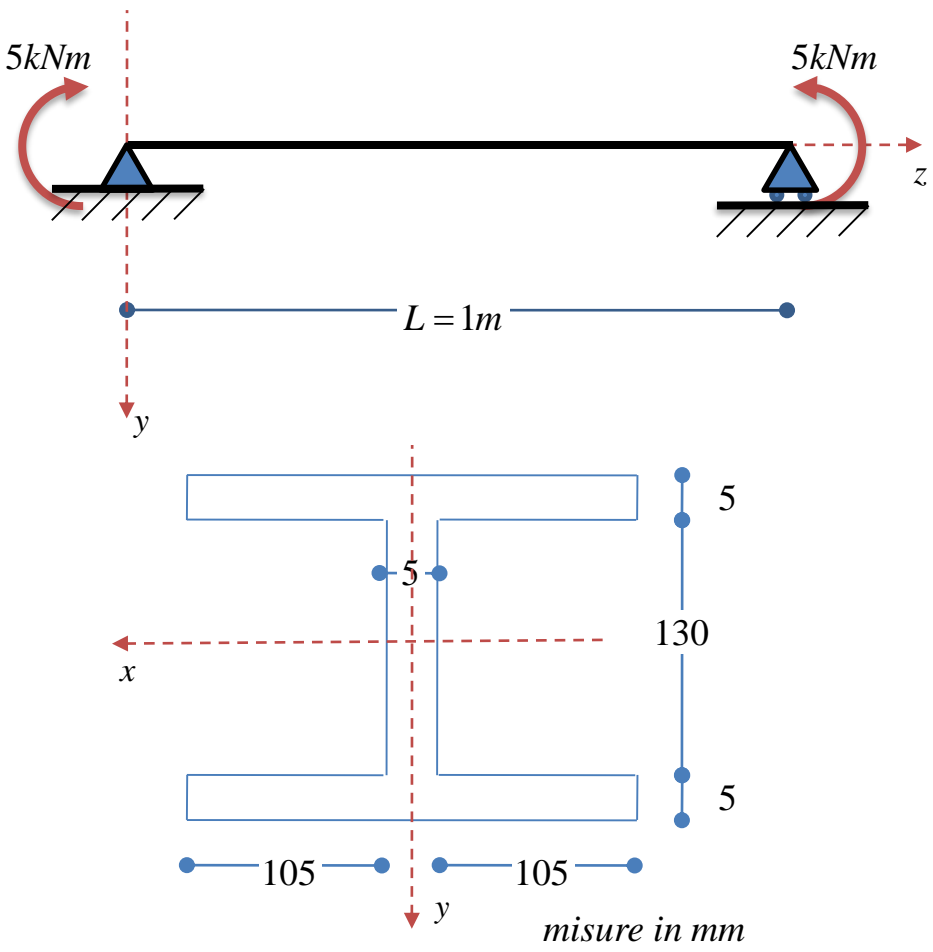
- la distribuzione di tensioni normali e deformazioni assiali presenti su una generica sezione trasversale e si determinino i relativi valori massimi e minimi;
- la rotazione delle sezioni di estremità e la freccia.

Si verifichi inoltre che, per questo esempio, il termine f^2 trascurabile rispetto agli altri.

$$\rho^2 = (\rho - f)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4} + \rho^2 - 2\rho f + f^2 \rightarrow \frac{L^2}{4} - 2\rho f + f^2 = 0$$



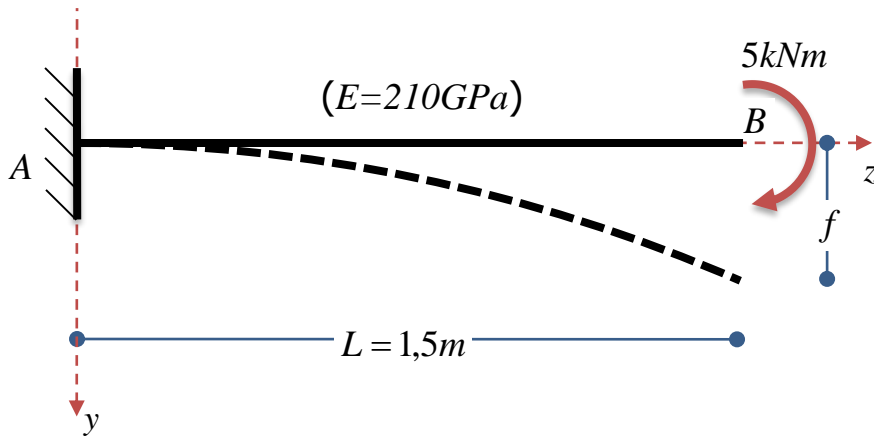
Esercizio



Un'asta in acciaio ($E=210\text{GPa}$) appoggiata-appoggiata ha sezione trasversale a "doppio T" come indicato in figura. L'area di tale sezione trasversale è uguale a quella della trave analizzata nella precedente sessione di studio, mentre il suo momento d'inerzia I_x è maggiore. Si svolgano tutti i quesiti richiesti nell'esercizio precedente e si verifichi che la trave a sezione trasversale avente momento d'inerzia maggiore è più efficiente.



Esercizio



Per l'asta schematizzata in figura si determini l'andamento delle tensioni normali σ_z e delle deformazioni assiali ϵ_z in corrispondenza di una generica sezione trasversale indicandone i valori massimi e minimi. Si tracci inoltre l'asse neutro. Si calcoli inoltre la rotazione della sezione B e la freccia.

