

# Il solido di de Saint-Venant



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Pressoflessione  
Sforzo normale eccentrico



# Sommario – flessione deviata

$M_x = M \cos \alpha$

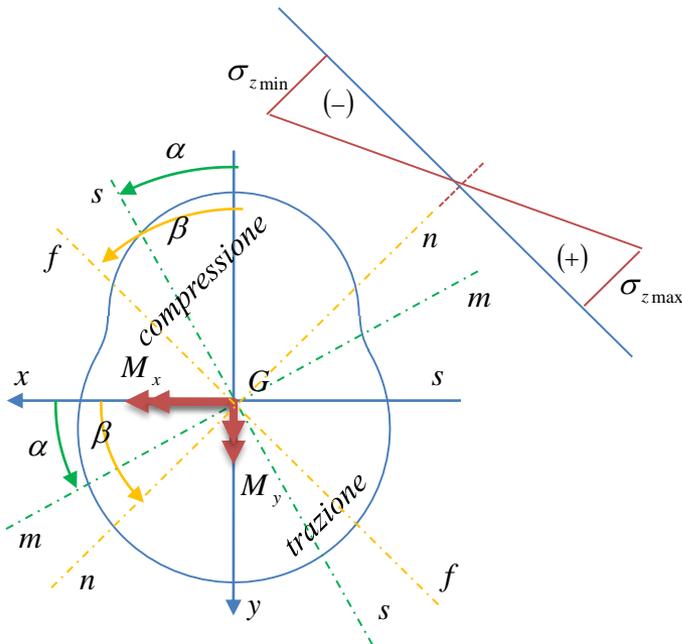
$M_y = M \sin \alpha$

Nella precedente lezione è stata esaminata un'asta sollecitata da un momento flettente la cui direzione non coincide con un'asse principale d'inerzia della sezione. Si è visto che, in generale, in questo caso l'asse neutro non coincide con l'asse momento (se non per i ben noti casi particolari in cui si rientra nella flessione retta) e la relazione tra gli angoli che tali assi formano con l'asse x è la seguente.

$$\tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha \tag{40}$$

Le tensioni normali, diagrammate in figura, e le deformazioni assiali, che hanno un andamento analogo, si possono calcolare attraverso le seguenti relazioni

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y - \frac{M_y}{EI_y} x \tag{38}$$



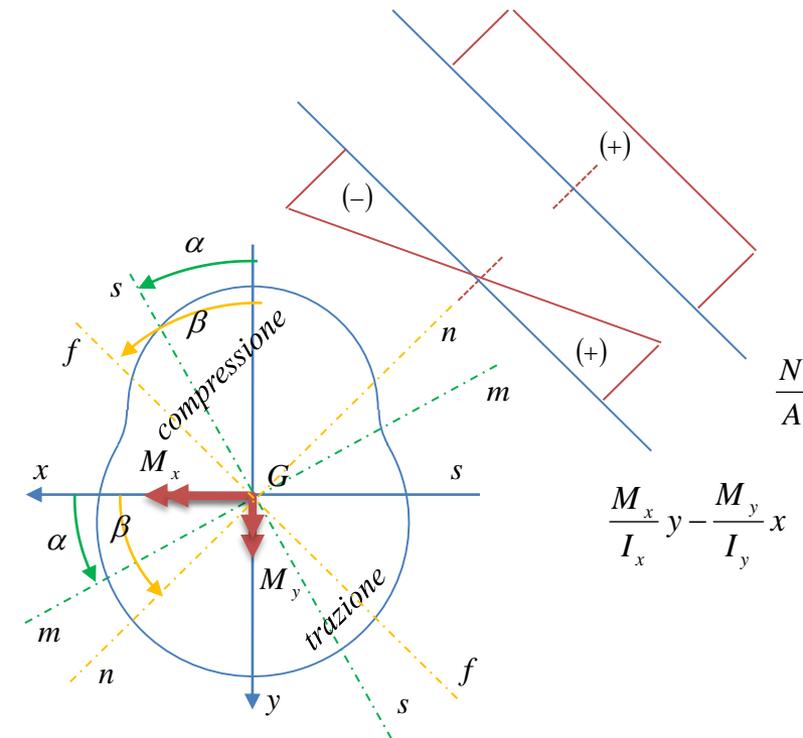


# Tenso flessione

$M_x = M \cos \alpha$

$M_y = M \sin \alpha$

$N > 0$



$$\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

Si esamina adesso il caso in cui, oltre alla sollecitazione flessionale, per la quale valgono i risultati sintetizzati nella precedente slide, sia presente anche una azione assiale. Se l'azione assiale è di trazione ( $N > 0$ ) allora lo stato di sollecitazione complessivo si dice di tenso-flessione, mentre, se l'azione assiale è di compressione ( $N < 0$ ) lo stato di sollecitazione complessivo si dice di presso-flessione.

In ogni caso dalla (22) si calcola

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \tag{41}$$

e quindi, le tensioni normali sono somma di due contributi: uno dovuto alla sollecitazione assiale ed uno dovuto alla sollecitazione flessionale.

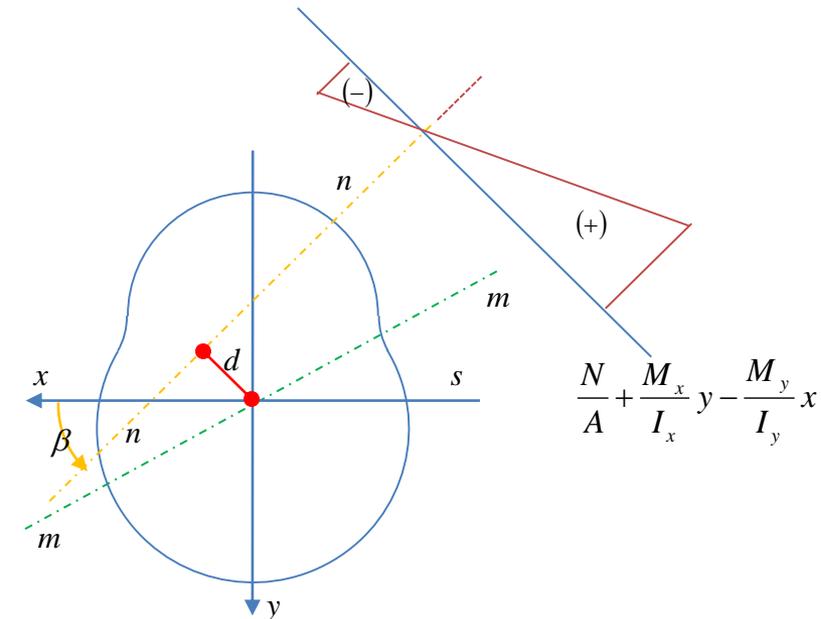


## Tenso flessione

$$M_x = M \cos \alpha$$

$$M_y = M \sin \alpha$$

$$N > 0$$



Dalla (41) si calcola l'equazione dell'asse neutro come segue:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0 \rightarrow y = \left( \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha \right) x - \frac{I_x}{A} \frac{N}{M_x} \quad (42)$$

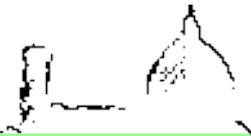
L'asse neutro ha la stessa inclinazione di quello che si avrebbe nel caso di sola flessione deviata, ma non passa per il baricentro in quanto intercetta l'asse  $y$  per

$$y = -I_x N / (M_x A) \quad (43)$$

La sua distanza dal baricentro è pari a

$$d = \frac{I_x}{A} \frac{N}{M_x} \cos \beta \quad (44)$$

e, a parità di sollecitazione flessionale, aumenta all'aumentare dello sforzo normale: tanto maggiore è lo sforzo normale, tanto più l'asse neutro si allontana dal baricentro.



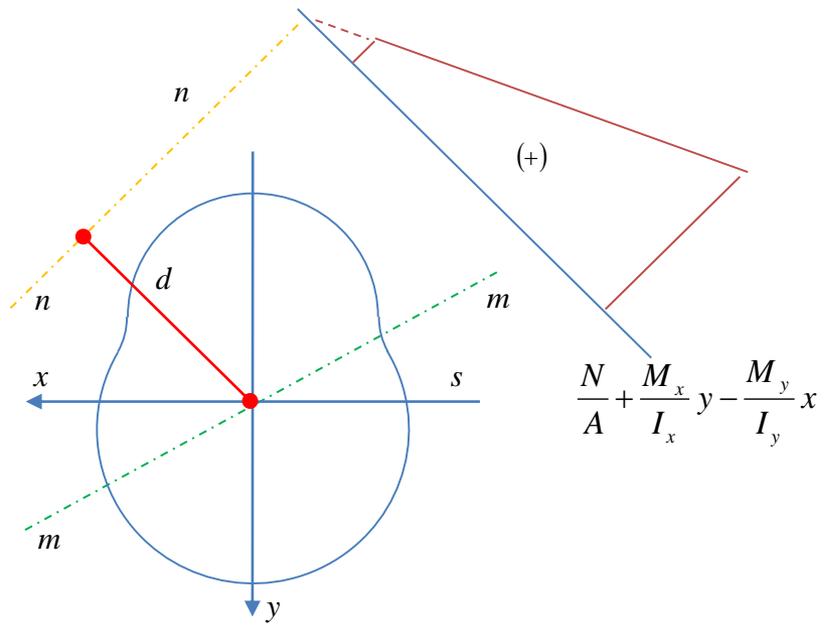
# Tenso flessione

$$M_x = M \cos \alpha$$

$$M_y = M \sin \alpha$$

$$N > 0$$

Per sollecitazioni di sforzo normale abbastanza elevate, l'asse neutro potrebbe non intersecare la sezione trasversale: in questo caso la sezione sarebbe interamente tesa.





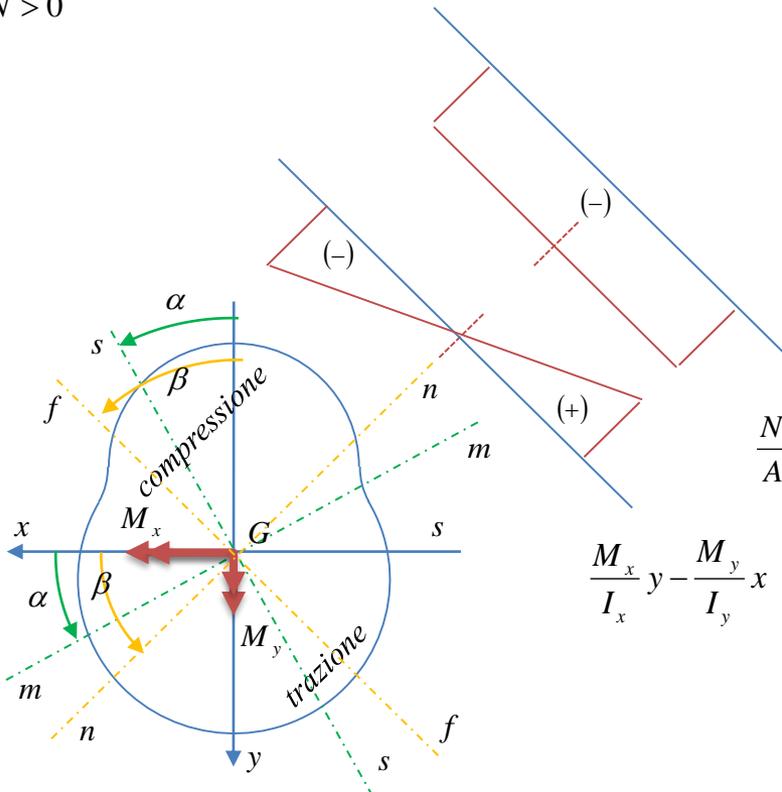
# Presso flessione

$$M_x = M \cos \alpha$$

$$M_y = M \sin \alpha$$

$$N > 0$$

Ovviamente un discorso perfettamente analogo vale per il caso di presso flessione, ossia nel caso in cui sia presente uno sforzo normale di compressione (negativo).

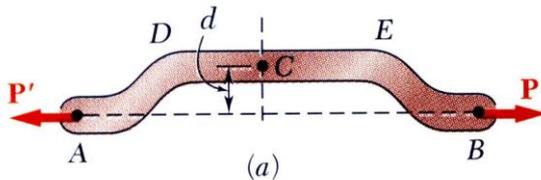


$$\frac{N}{A}$$

$$\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$



## Azione assiale eccentrica

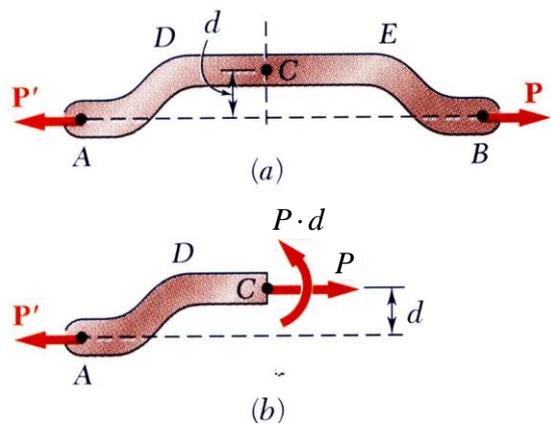


Una sollecitazione di tenso- o pressoflessione può ad esempio essere generata da una forza parallela all'asse della trave, ma applicata eccentricamente, ossia non in corrispondenza del baricentro delle sezioni trasversali.

Una condizione di questo tipo è presente ad esempio nel tratto *DE* dell'elemento strutturale schematizzato in figura, sollecitato da due forze uguali ed opposte dirette secondo una retta parallela, ma non coincidente, con l'asse del tratto *DE*.



## Azione assiale eccentrica



Su una generica sezione trasversale di tale tratto sono presenti delle caratteristiche della sollecitazione che sono tali da equilibrare la porzione di struttura ottenuta sezionando quella complessiva in due parti attraverso un piano contenente la sezione trasversale in esame. Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale si calcola lo sforzo normale presente nella sezione in esame

$$N = P$$

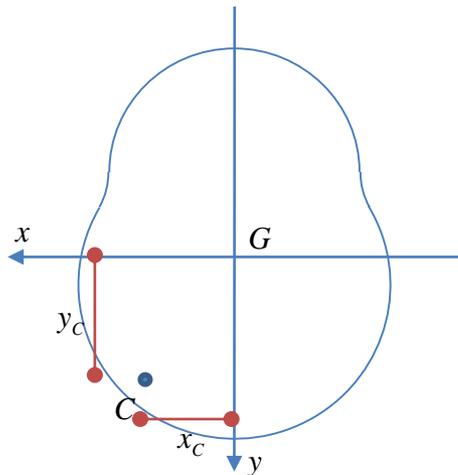
mentre dall'equilibrio alla rotazione si calcola il momento flettente

$$M = P \cdot d$$

Per quanto detto, in effetti una forza parallela alla linea d'asse, ma eccentrica, genera sia sollecitazione normale che flessionale.



## Azione assiale eccentrica

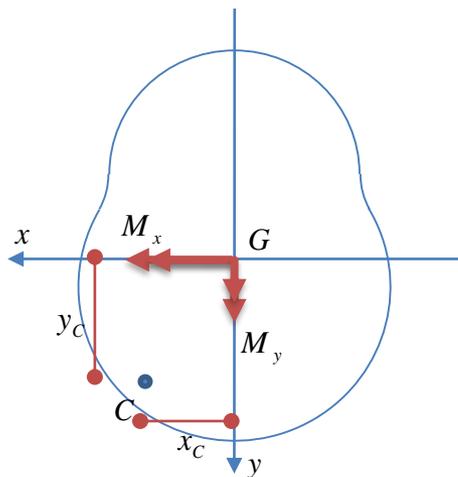


Si consideri che un'asta (o un tratto di un elemento strutturale, come si è visto nella precedente slide) sia caricata da una forza parallela al suo asse, ma eccentrica.

Siano  $x_C$  e  $y_C$  le coordinate del punto di applicazione  $C$  (detto centro di sollecitazione) di tale forza.



## Azione assiale eccentrica



Si consideri che un'asta (o un tratto di un elemento strutturale, come si è visto nella precedente slide) sia caricata da una forza parallela al suo asse, ma eccentrica.

Siano  $x_C$  e  $y_C$  le coordinate del punto di applicazione  $C$  (detto centro di sollecitazione) di tale forza.

Indicando con  $N$  lo sforzo normale generato da tale forza, le componenti di momento flettente si calcolano come segue

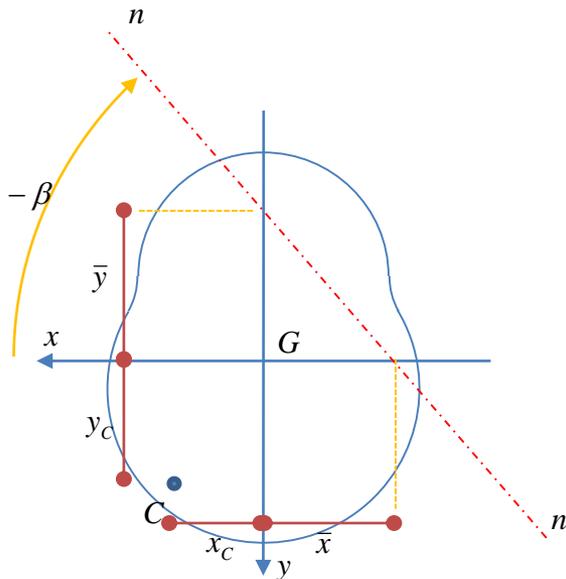
$$M_x = N \cdot y_C$$

$$M_y = -N \cdot x_C$$

Ovviamente, lo sforzo normale  $N$  ha intensità pari al modulo della forza assiale e segno positivo o negativo a seconda del tipo di sollecitazione assiale (trazione o compressione) indotta da tale forza.



## Azione assiale eccentrica



Le tensioni normali presenti nella sezione si calcolano dalla (41) come segue

$$\sigma_z = N \left( \frac{1}{A} + \frac{y_c}{I_x} y + \frac{x_c}{I_y} x \right) \quad (45)$$

Dalla precedente si ottiene l'equazione dell'asse neutro

$$\sigma_z = 0 \rightarrow y = -\frac{x_c}{y_c} \frac{I_x}{I_y} x - \frac{I_x}{A y_c} \quad (46)$$

la cui pendenza è pari a

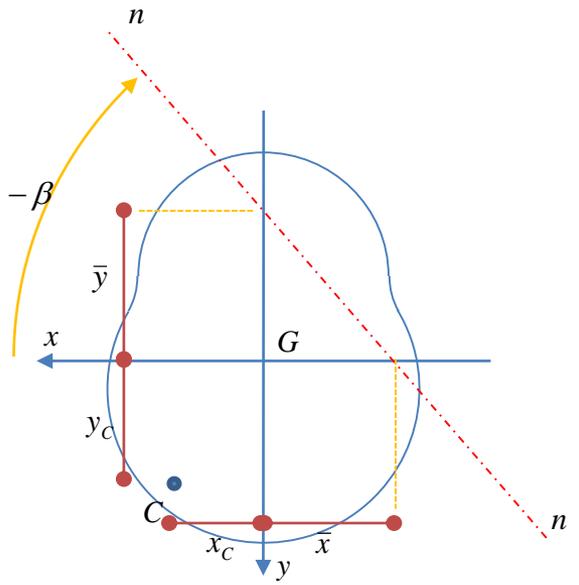
$$\tan \beta = -\frac{x_c}{y_c} \frac{I_x}{I_y} \quad (47)$$

e che interseca gli assi in corrispondenza delle seguenti ascisse

$$\bar{y} = -\frac{I_x}{A y_c} \quad \bar{x} = -\frac{I_y}{A x_c} \quad (48)$$



## Azione assiale eccentrica – osservazioni



1. L'equazione dell'asse neutro (46) non dipende né dal modulo, né dal segno dello sforzo normale, ma solo dalla posizione del centro di pressione.

Ovviamente il modulo ed il segno dello sforzo normale influenzano il valore delle tensioni normali definite dalle (45)

$$(45) \quad \sigma_z = N \left( \frac{1}{A} + \frac{y_c}{I_x} y + \frac{x_c}{I_y} x \right)$$

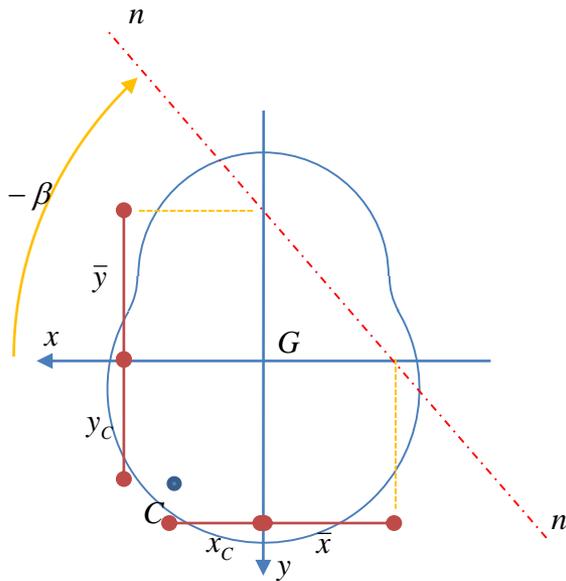
$$(46) \quad \sigma_z = 0 \rightarrow y = -\frac{x_c}{y_c} \frac{I_x}{I_y} x - \frac{I_x}{A y_c}$$

$$\tan \beta = -\frac{x_c}{y_c} \frac{I_x}{I_y} x \quad (47)$$

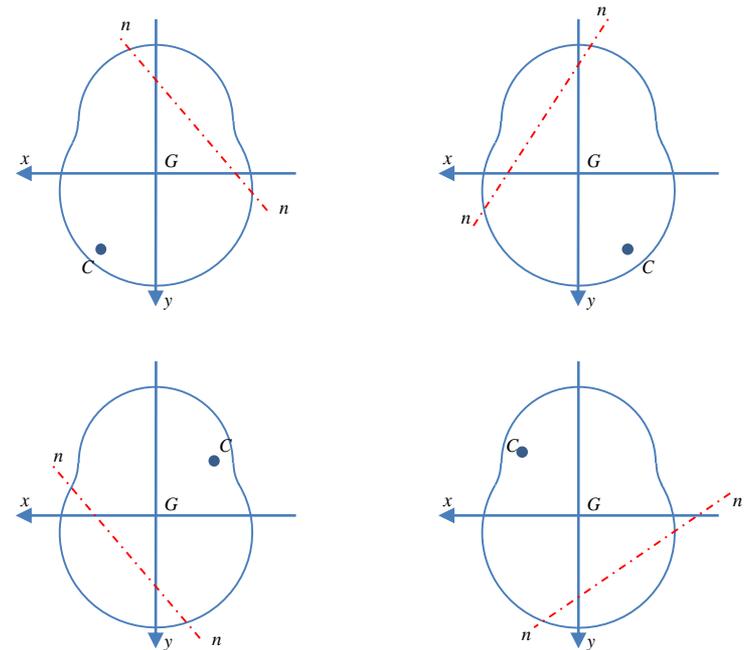
$$\bar{y} = -\frac{I_x}{A y_c} \quad \bar{x} = -\frac{I_y}{A x_c} \quad (48)$$



## Azione assiale eccentrica – osservazioni



2. Dalle (48) si vede che  $\bar{x}$  ed  $\bar{y}$  sono sempre discordi rispettivamente con  $x_C$  ed  $y_C$ : l'asse neutro è secante per il quadrante opposto a quello in cui si trova il centro di pressione



$$(45) \quad \sigma_z = N \left( \frac{1}{A} + \frac{y_C}{I_x} y + \frac{x_C}{I_y} x \right)$$

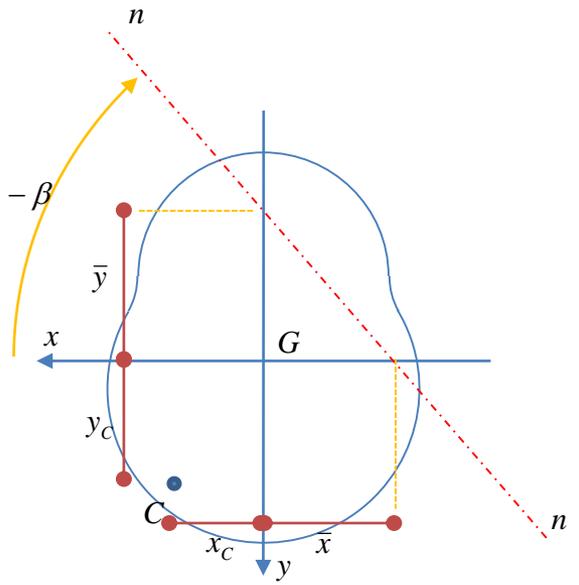
$$(46) \quad \sigma_z = 0 \rightarrow y = -\frac{x_C}{y_C} \frac{I_x}{I_y} x - \frac{I_x}{A y_C}$$

$$\tan \beta = -\frac{x_C}{y_C} \frac{I_x}{I_y} x \quad (47)$$

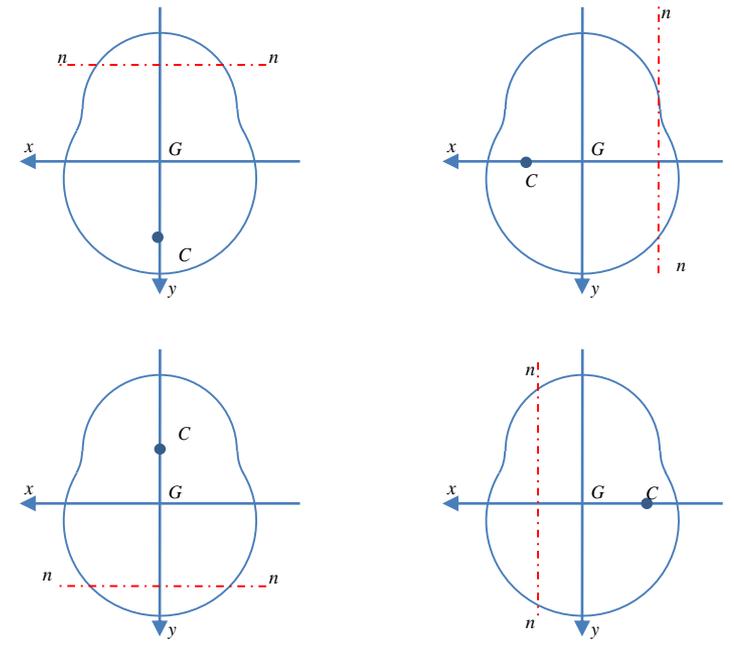
$$\bar{y} = -\frac{I_x}{A y_C} \quad \bar{x} = -\frac{I_y}{A x_C} \quad (48)$$



## Azione assiale eccentrica – osservazioni



3. Dalle (48) si vede anche che, se il centro di pressione si trova su uno degli assi principali d'inerzia, l'asse neutro diviene parallelo all'altro asse principale d'inerzia

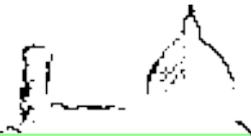


$$(45) \quad \sigma_z = N \left( \frac{1}{A} + \frac{y_c}{I_x} y + \frac{x_c}{I_y} x \right)$$

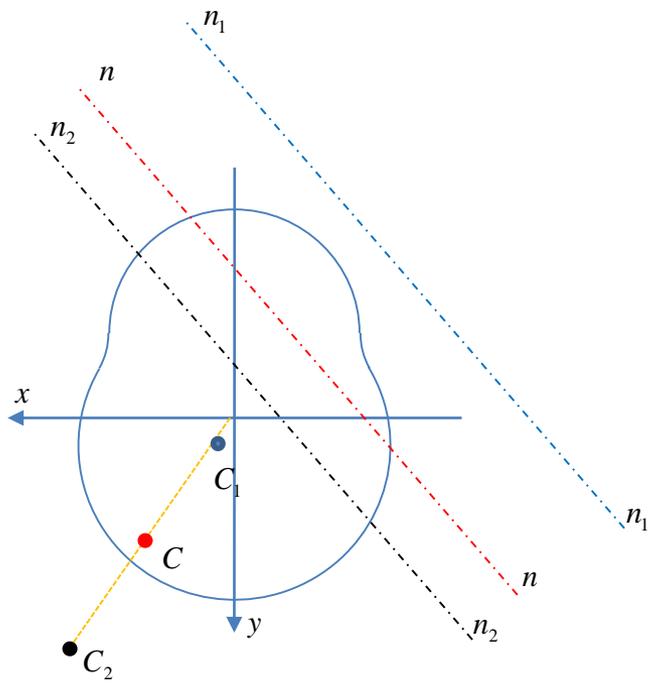
$$(46) \quad \sigma_z = 0 \rightarrow y = -\frac{x_c}{y_c} \frac{I_x}{I_y} x - \frac{I_x}{A y_c}$$

$$\tan \beta = -\frac{x_c}{y_c} \frac{I_x}{I_y} x \quad (47)$$

$$\bar{y} = -\frac{I_x}{A y_c} \quad \bar{x} = -\frac{I_y}{A x_c} \quad (48)$$



## Azione assiale eccentrica – osservazioni



4. Immaginiamo di traslare il centro di pressione secondo la sua congiungente con il baricentro in maniera tale che

$$\frac{x_c}{y_c} = \text{cost}$$

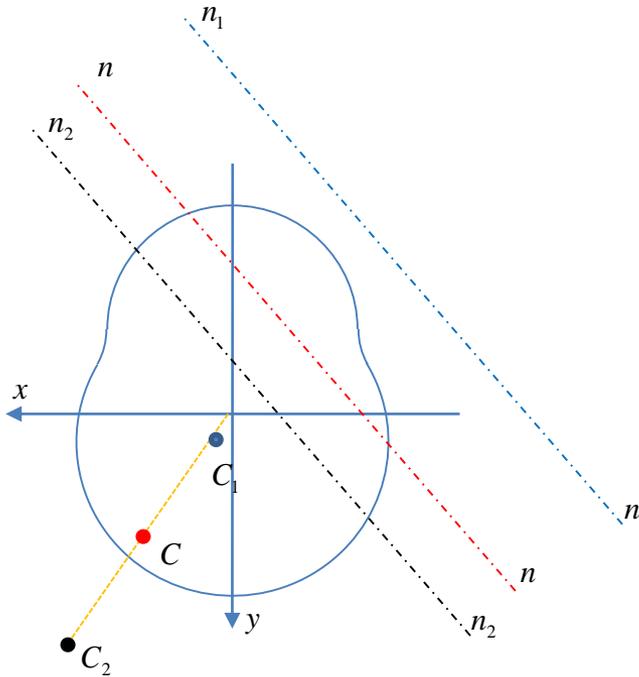
dalla (47) si vede che in questo caso l'inclinazione dell'asse neutro non cambia. Cambiano però i punti di intersezione tra l'asse neutro e gli assi del sistema di riferimento definiti dalle (48). In pratica, man mano che il centro di pressione si allontana dal baricentro, l'asse neutro vi si avvicina, e, viceversa, se il centro di pressione si avvicina al baricentro, l'asse neutro gli si allontana.

$$\tan \beta = -\frac{x_c}{y_c} \frac{I_x}{I_y} x \quad (47)$$

$$\bar{y} = -\frac{I_x}{A y_c} \quad \bar{x} = -\frac{I_y}{A x_c} \quad (48)$$



## Azione assiale eccentrica – osservazioni



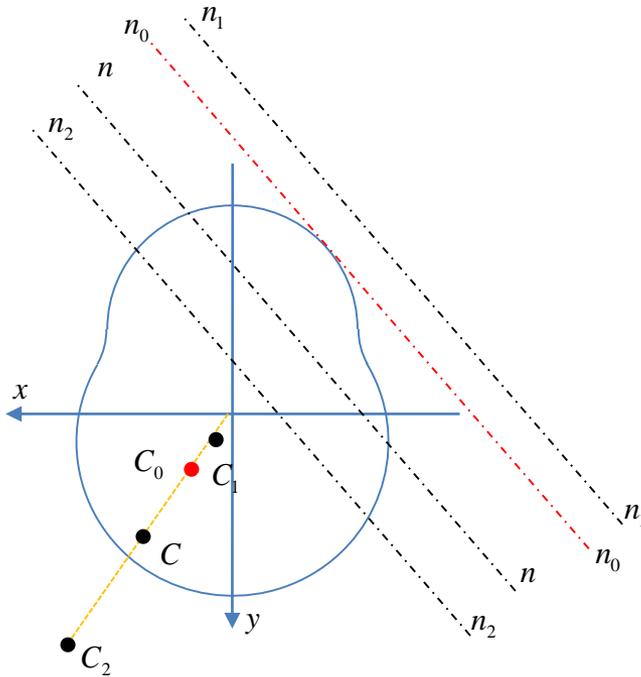
Se l'asse neutro interseca la sezione trasversale, questa risulta "parzializzata", ossia una parte di essa sarà tesa ed un'altra sarà compressa. In caso contrario, ossia se l'asse neutro risulta esterno alla sezione, questa risulta sollecitata in modo omogeneo (tutta tesa o tutta compressa).

L'eventuale possibilità di conoscere a priori il segno delle tensioni normali presenti in una sezione trasversale a partire ad esempio dalla semplice conoscenza del punto di applicazione del carico è molto

importante, specialmente per l'analisi di elementi strutturali costituiti in materiali che hanno resistenza a trazione ed a compressione molto differente tra loro, come ad esempio accade per la muratura o per il calcestruzzo non armato che, com'è noto, hanno una resistenza a trazione (trascurabile ai fini ingegneristici) molto inferiore alla resistenza a compressione.



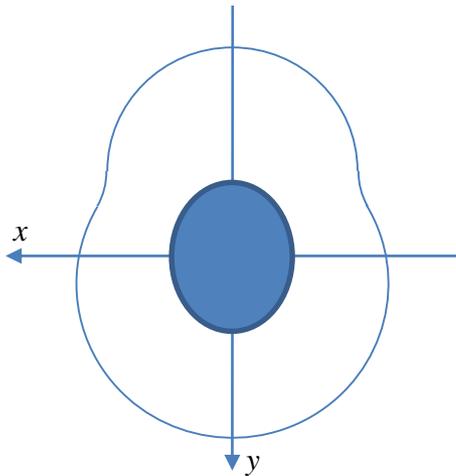
## Azione assiale eccentrica – osservazioni



Per ogni direzione baricentrica (es. quella tratteggiata in giallo in figura) esiste un particolare centro di pressione ( $C_0$ ) tale che l'asse neutro ad esso associato ( $n_0-n_0$ ) risulta tangente alla sezione. Tale punto rappresenta una posizione limite tra i possibili centri di sollecitazione più vicini di esso al baricentro, a cui corrisponde un asse neutro esterno alla sezione (e quindi una sezione caricata in maniera omogenea), e quelli più lontani a cui corrisponde un asse neutro che taglia la sezione (che si parzializza).



## Azione assiale eccentrica – nocciolo centrale d'inerzia

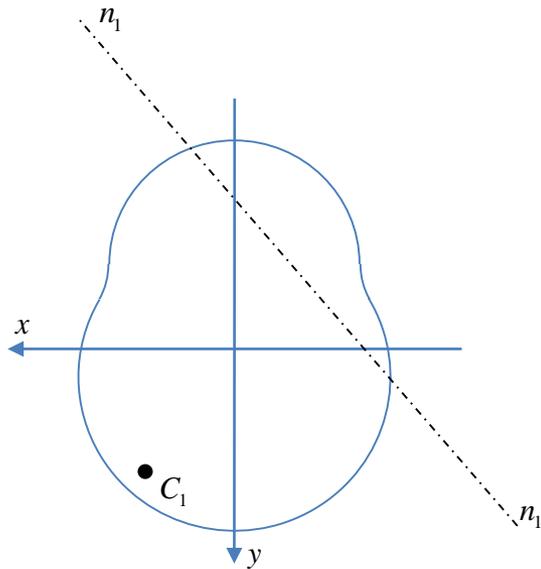


L'involuppo dei punti che hanno le stesse proprietà di  $C_0$  definisce il contorno di una regione detta "*nocciolo centrale d'inerzia*" della sezione che, per quanto detto, ha le seguenti proprietà:

- se il centro di pressione ricade all'interno del nocciolo, l'asse neutro non taglia la sezione che quindi risulta sollecitata da tensioni normali aventi lo stesso segno;
- se il centro di pressione ricade all'esterno del nocciolo, l'asse neutro taglia la sezione che quindi si parzializza
- se il centro di pressione si trova sul contorno del nocciolo, allora l'asse neutro è tangente alla sezione trasversale: il segno delle tensioni normali sulla sezione è costante, tranne per alcuni punti che risultano scarichi.



## Centro di sollecitazione ed asse neutro: proprietà



Ai fini della determinazione del contorno del nocciolo centrale d'inerzia di una sezione, risulta utile la seguente proprietà di dualità (teorema di reciprocità):

sia  $C_1$  un possibile centro di sollecitazione e  $n_1$  il relativo asse neutro.

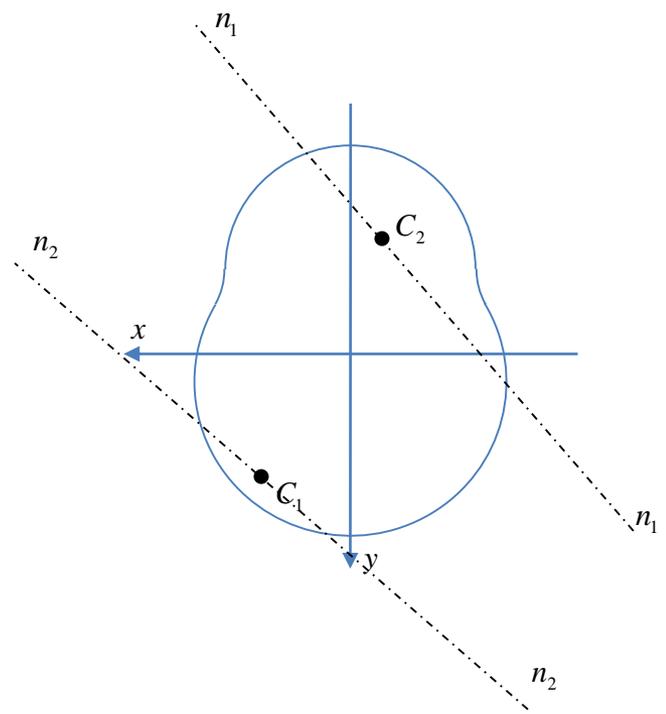


## Centro di sollecitazione ed asse neutro: proprietà

Ai fini della determinazione del contorno del nocciolo centrale d'inerzia di una sezione, risulta utile la seguente proprietà di dualità (teorema di reciprocità):

sia  $C_1$  un possibile centro di sollecitazione e  $n_1$  il relativo asse neutro. Allora l'asse neutro relativo ad un qualunque centro di sollecitazione che si trova sulla retta  $n_1$  conterrà il centro di sollecitazione  $C_1$ .

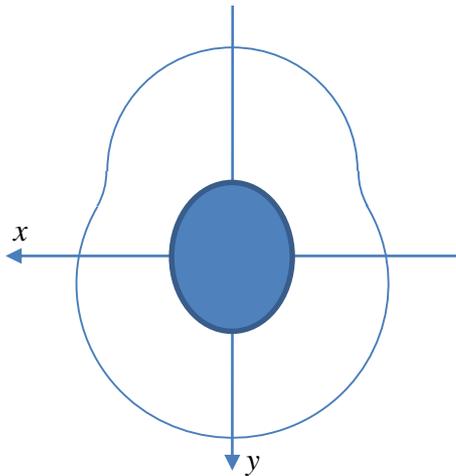
Le due rette  $n_1$  e  $n_2$  si dicono *coniugate*.





## Procedure per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia

Grazie alla proprietà descritta nella precedente slide, si definiscono, per particolari tipi di sezione, delle procedure semplificate per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia di una sezione.



1. Sezione avente bordo curvilineo come indicato in figura e priva di simmetria.

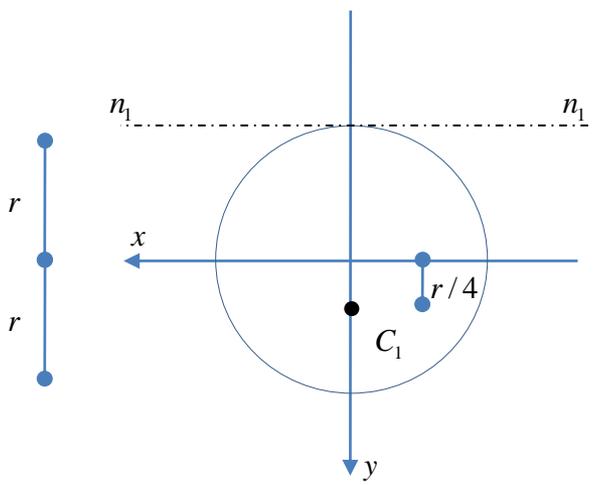
In questo caso il nocciolo si determina dalla sua definizione, involuppendo i centri di pressione relativi agli assi neutri tangenti alla sezione.



## Procedure per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia

- Sezione polar-simmetrica (es. circolare o a corona circolare).

Si consideri una sezione circolare ed un ipotetico asse neutro parallelo all'asse  $x$  e tangente alla figura. Dalle (48) è possibile calcolare le coordinate del centro di pressione ad esso relativo come segue:



$$-r = -\frac{I_x}{A y_{C_1}} \rightarrow y_{C_1} = \frac{I_x}{A \cdot r} = \frac{r}{4}$$

$$\bar{x} = -\frac{I_y}{A x_C} \rightarrow \infty \Rightarrow x_{C_1} = 0$$



## Procedure per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia

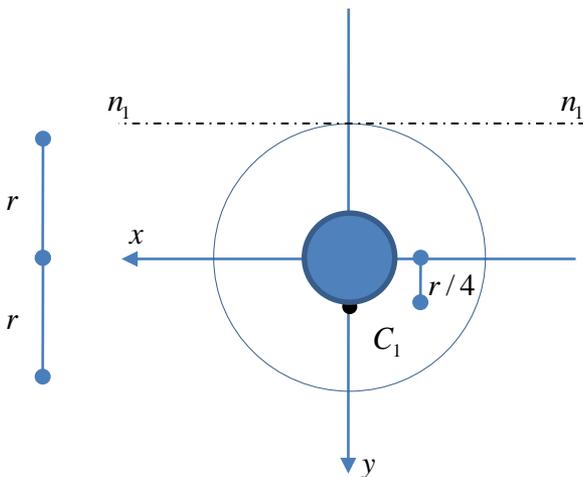
2. Sezione polar-simmetrica (es. circolare o a corona circolare).

Si consideri una sezione circolare ed un ipotetico asse neutro parallelo all'asse  $x$  e tangente alla figura. Dalle (48) è possibile calcolare le coordinate del centro di pressione ad esso relativo come segue:

$$-r = -\frac{I_x}{A y_{C_1}} \rightarrow y_{C_1} = \frac{I_x}{A \cdot r} = \frac{r}{4}$$

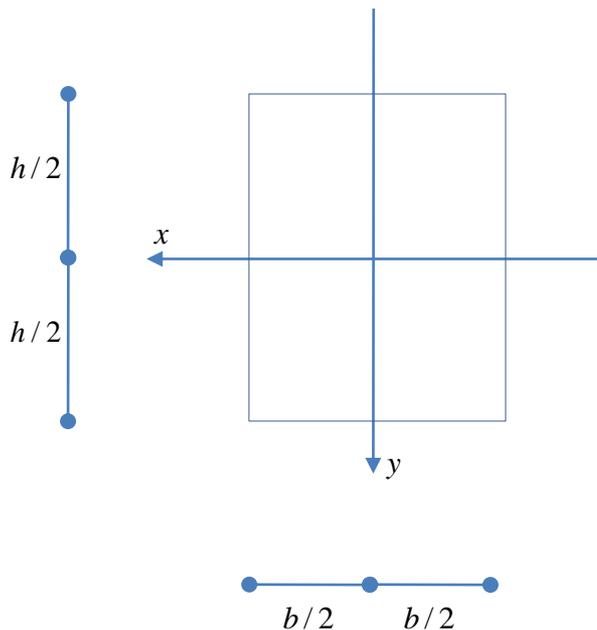
$$\bar{x} = -\frac{I_y}{A x_C} \rightarrow \infty \Rightarrow x_{C_1} = 0$$

Per la polar-simmetria del problema, anche il nocciolo centrale d'inerzia sarà polar-simmetrico e quindi coincide con una circonferenza concentrica a quella di partenza e di raggio pari a  $r/4$ .





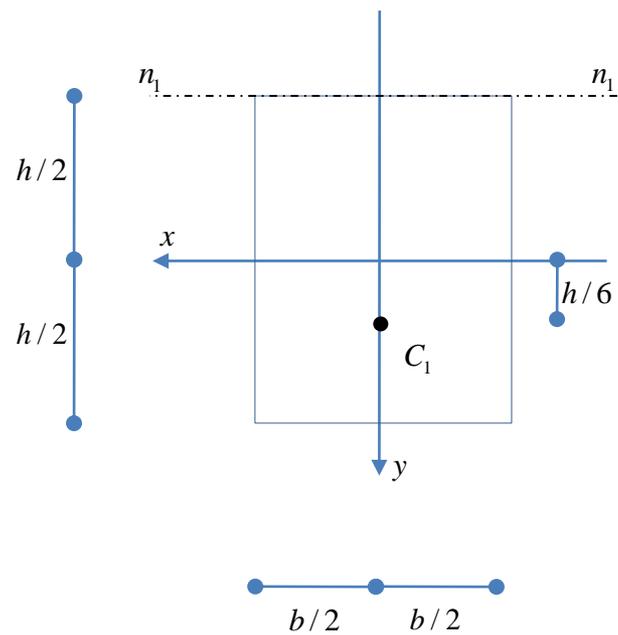
## Procedure per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia



3. Sezione di forma poligonale, convessa.  
Si consideri che la sezione trasversale in esame abbia un contorno poligonale convesso, ad esempio rettangolare. Il nocciolo centrale d'inerzia sarà anch'esso poligonale e si ottiene unendo i centri di pressione relativi agli assi neutri che contengono i lati della sezione.



# Il nocciolo centrale d'inerzia per la sezione rettangolare



3. Sezione di forma poligonale, convessa.  
 Si consideri che la sezione trasversale in esame abbia un contorno poligonale convesso, ad esempio rettangolare. Il nocciolo centrale d'inerzia sarà anch'esso poligonale e si ottiene unendo i centri di pressione relativi agli assi neutri che contengono i lati della sezione.

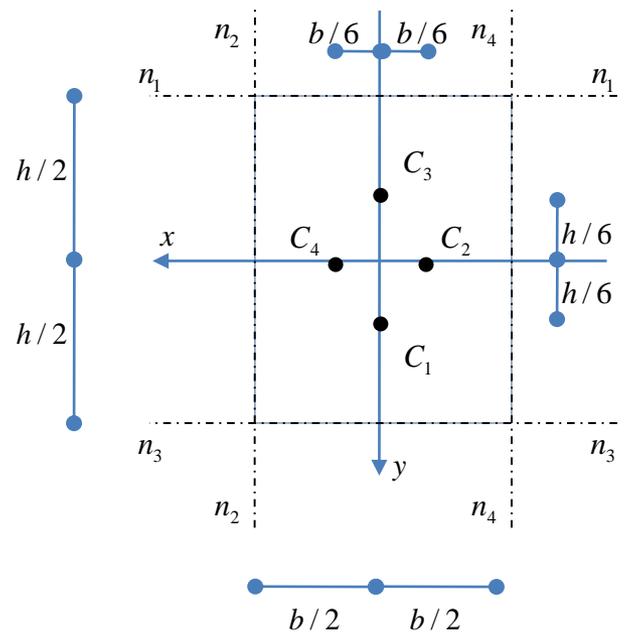
Il centro di pressione relativo ad un asse neutro contenente il lato superiore della sezione si calcola dalle (48) come segue

$$-\frac{h}{2} = -\frac{I_x}{A y_{C_1}} \rightarrow y_{C_1} = \frac{I_x \cdot 2}{A h} = \frac{h}{6}$$

$$\bar{x} = -\frac{I_y}{A x_C} \rightarrow \infty \Rightarrow x_{C_1} = 0$$



## Il nocciolo centrale d'inerzia per la sezione rettangolare



3. Sezione di forma poligonale, convessa.

Si consideri che la sezione trasversale in esame abbia un contorno poligonale convesso, ad esempio rettangolare. Il nocciolo centrale d'inerzia sarà anch'esso poligonale e si ottiene unendo i centri di pressione relativi agli assi neutri che contengono i lati della sezione.

Il centro di pressione relativo ad un asse neutro contenente il lato superiore della sezione si calcola dalle (48) come segue

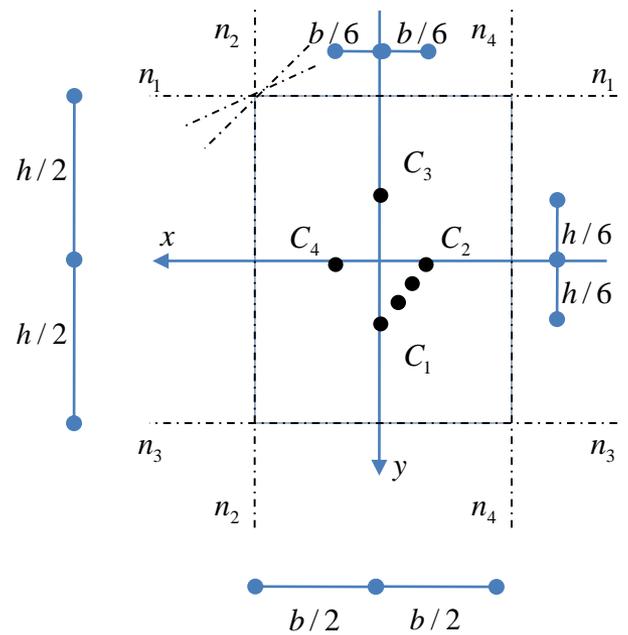
$$-\frac{h}{2} = -\frac{I_x}{A y_{C_1}} \rightarrow y_{C_1} = \frac{I_x \cdot 2}{A h} = \frac{h}{6} \qquad \bar{x} = -\frac{I_y}{A x_C} \rightarrow \infty \Rightarrow x_{C_1} = 0$$

Analogamente si determinano i centri di pressione relativi agli assi  $n_{2'}$ ,  $n_3$  ed  $n_{4'}$ .



# Il nocciolo centrale d'inerzia per la sezione rettangolare

Applicando il teorema di reciprocità si dimostra che i centri di sollecitazione relativi agli assi passanti per un vertice sono compresi all'interno del segmento che ha per estremi i centri di sollecitazione relativi agli assi contenenti i lati confluenti nel vertice in considerazione.

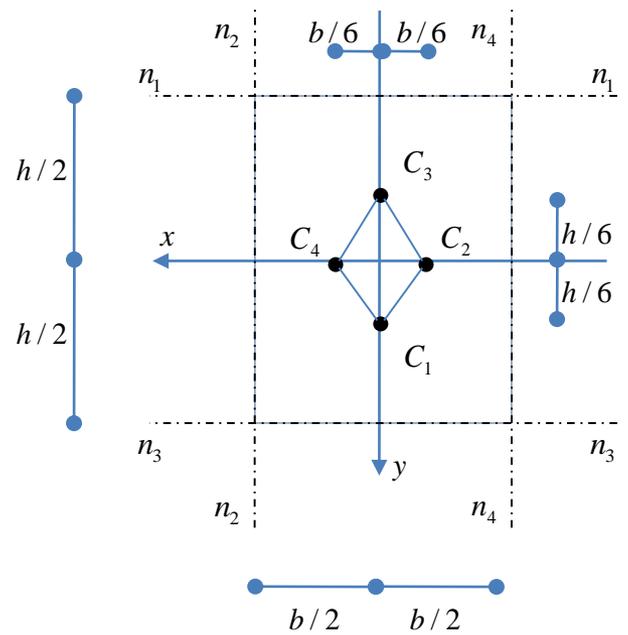




## Il nocciolo centrale d'inerzia per la sezione rettangolare

Applicando il teorema di reciprocità si dimostra che i centri di sollecitazione relativi agli assi passanti per un vertice sono compresi all'interno del segmento che ha per estremi i centri di sollecitazione relativi agli assi contenenti i lati confluenti nel vertice in considerazione.

Pertanto, il nocciolo centrale d'inerzia si ottiene unendo i centri così determinati.

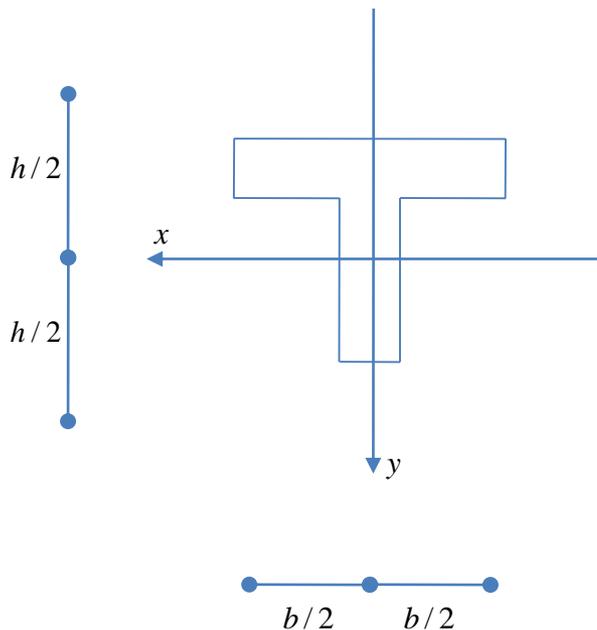


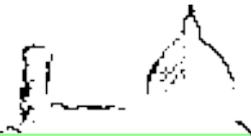


## Procedure per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia

4. Sezione di forma poligonale, non convessa.

Si consideri che la sezione trasversale in esame abbia un contorno poligonale non convesso, ad esempio a "T".



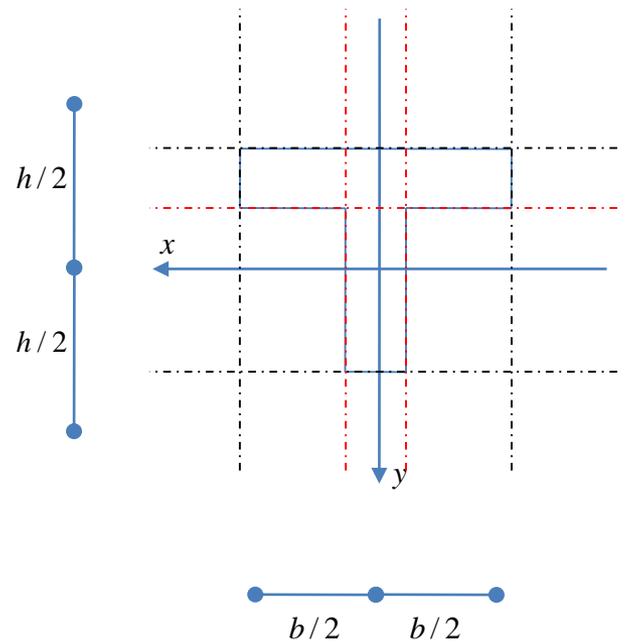


# Procedure per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia

4. Sezione di forma poligonale, non convessa.

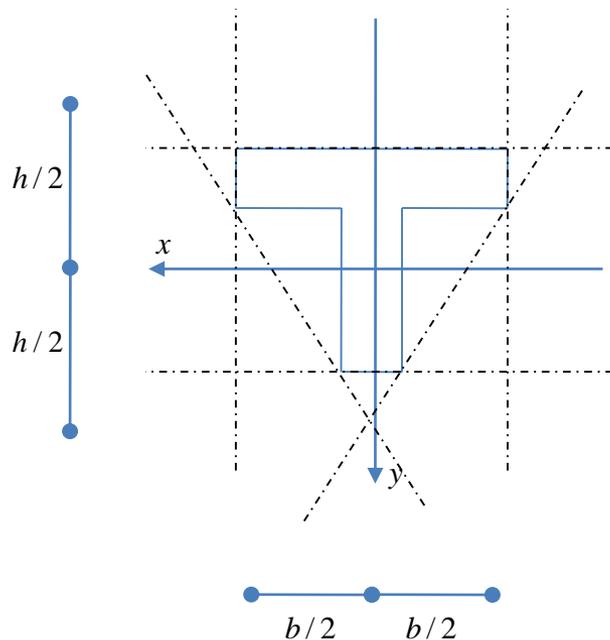
Si consideri che la sezione trasversale in esame abbia un contorno poligonale non convesso, ad esempio a "T".

In questo caso alcuni assi contenenti i lati non sono secanti (indicati in nero) e vanno quindi considerati nella definizione del nocciolo, mentre altri sono secanti (indicati in rosso) e non vanno quindi considerati. Si osservi che una condizione di questo tipo si verifica nelle zone del contorno non convesse.





## Procedure per la determinazione del nocciolo centrale d'inerzia

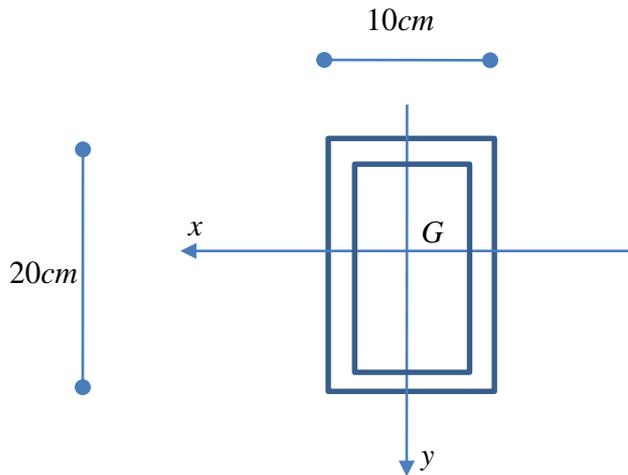


4. Sezione di forma poligonale, non convessa.

Per le sezioni a contorno poligonale non convesse, del tipo indicato in figura, i vertici del nocciolo sono i centri di pressione relativi a tutti i possibili assi non secanti la sezione, ma contenenti due vertici.



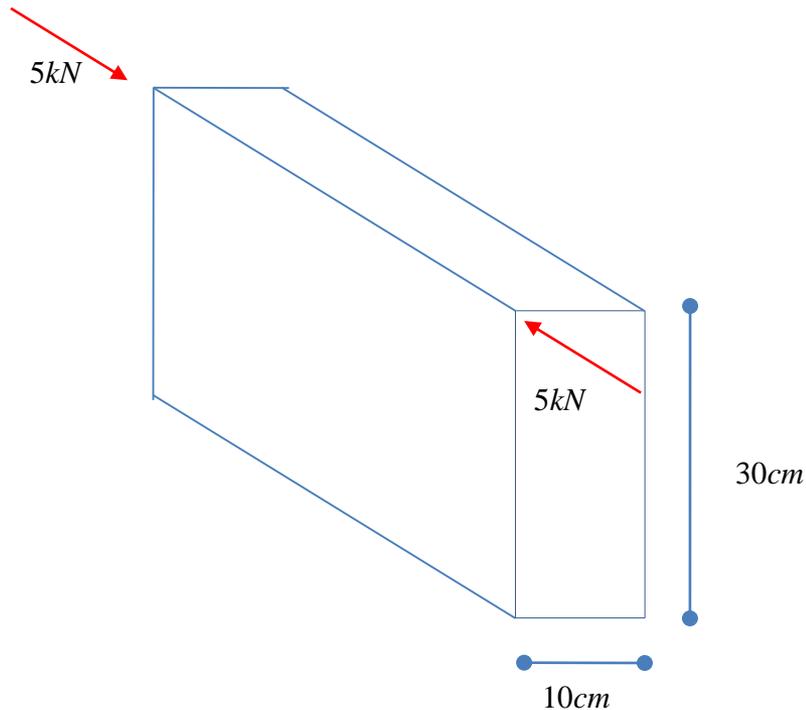
## Esercizio



Si determini il nocciolo centrale d'inerzia per la sezione scatolare in figura (avente spessore pari a  $5mm$ ) e lo si confronti con quello relativo ad una sezione rettangolare piena avente base ed altezza pari alle dimensioni massime di quella in esame ( $10 \times 20cm$ ).



## Esercizio

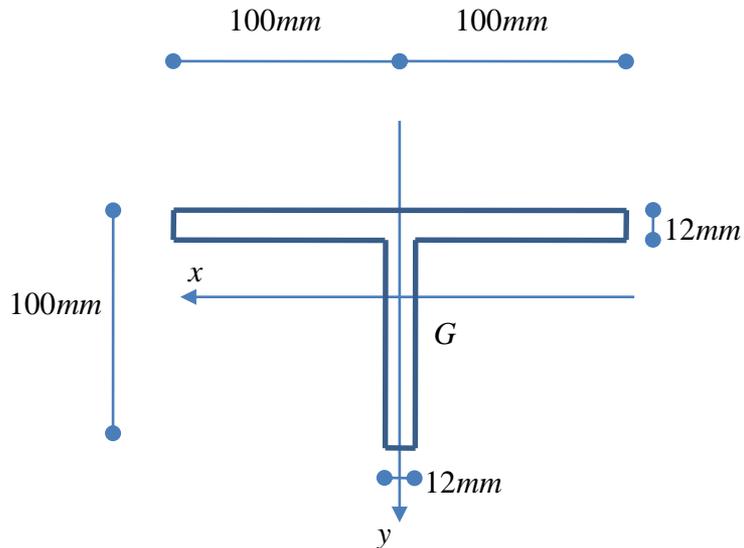


Un'asta a sezione trasversale rettangolare è caricata da due forze uguali ed opposte applicate in corrispondenza dei vertici della sezione come indicato in figura.

Si determinino e si diagrammino le tensioni normali presenti in una generica sezione trasversale.



## Esercizio



Si calcoli il nocciolo centrale d'inerzia della sezione schematizzata in figura