

# Il solido di de Saint-Venant



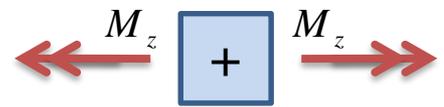
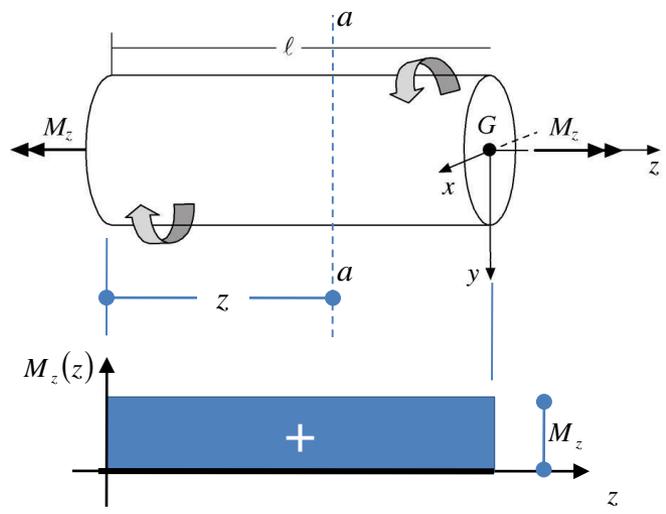
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Il problema della torsione nel solido di *de Saint Venant*:  
sezione circolare o corona circolare



## Asta a sezione trasversale circolare o a corona circolare



Convenzione sul segno positivo della sollecitazione torsionale

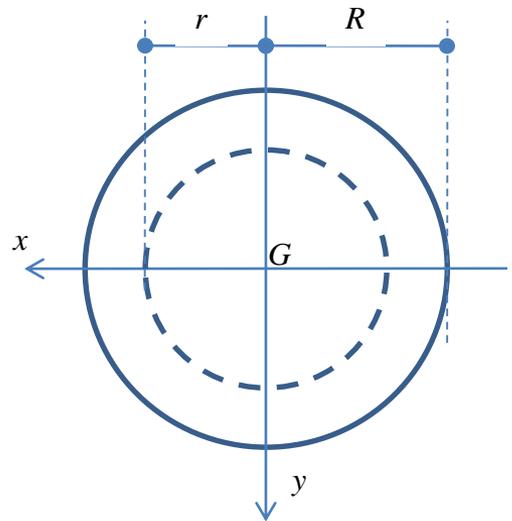
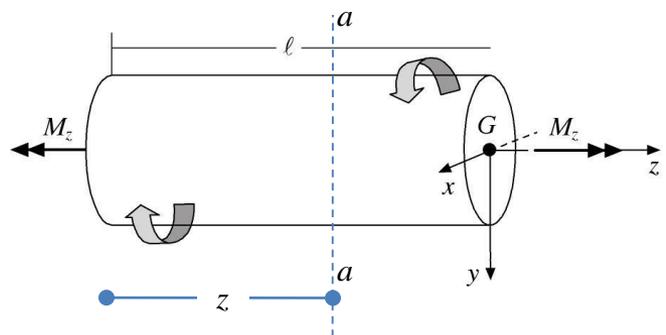
Si consideri la trave in figura a sezione trasversale circolare (o a corona circolare) di raggio esterno  $R$  e raggio interno  $R_i$ . Per la trave a sezione circolare si ha ovviamente  $R_i = 0$ .

Siano applicati sulle basi della trave due coppie torcenti uguali ed opposte come indicato in figura.

La trave è sollecitata da un momento torcente positivo costante.



## Analisi delle componenti di spostamento



Sezione a-a

Si consideri una generica sezione trasversale il cui baricentro ha ascissa  $z$  (sezione  $a-a$  in figura). Per la polar-simmetria del problema si ha che:

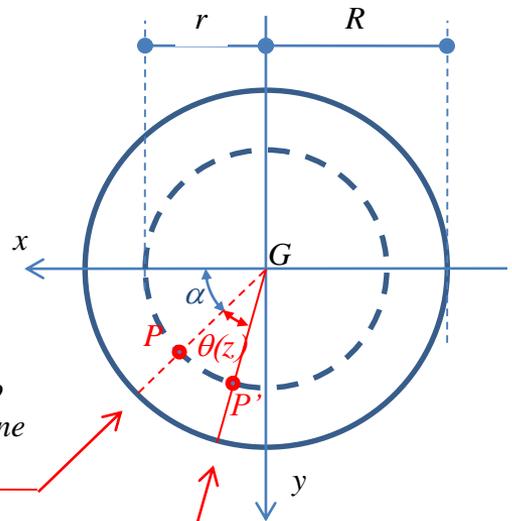
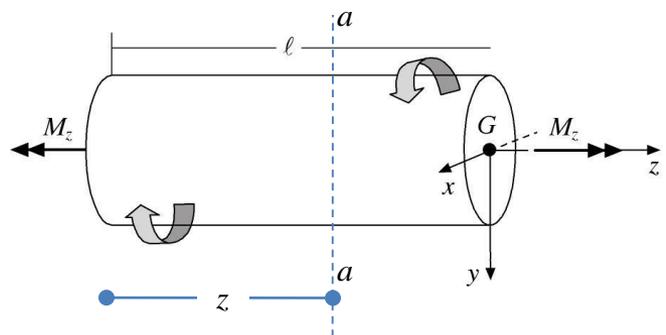
- tutti i punti appartenenti ad una circonferenza di centro  $G$  e raggio  $r$  ( $R_i \leq r \leq R$ ) devono avere lo stesso spostamento  $w$  in direzione  $z$ .  
 Ricordando che  $w$  risulta indipendente da  $z$  (55.d), si pone

$$w = w(r) \tag{56}$$

L'indipendenza di  $w$  da  $z$  è giustificata dal fatto che, per il problema in esame, tutte le sezioni trasversali sono sollecitate in maniera analoga.



## Analisi delle componenti di spostamento



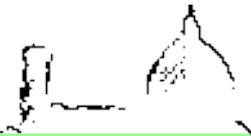
Allineamento  
configurazione  
indeformata

Allineamento  
configurazione  
deformata

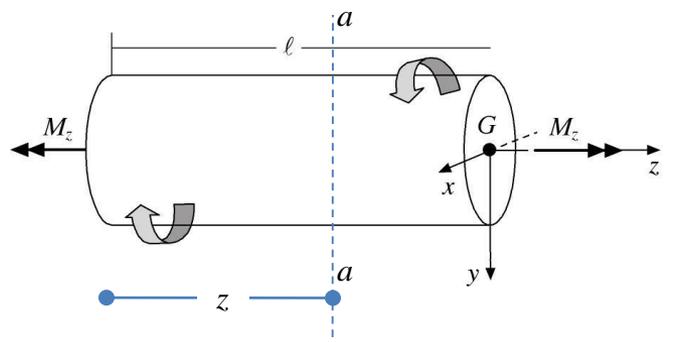
Si consideri una generica sezione trasversale il cui baricentro ha ascissa  $z$  (sezione  $a-a$  in figura). Per la polar-simmetria del problema si ha che:

- la generica sezione trasversale ruota attorno al suo baricentro  $G$  che rappresenta pertanto il centro di istantanea rotazione della sezione. Detto allora  $\theta(z)$  l'angolo di cui ruota una generica sezione di ascissa  $z$ , tutti i punti appartenenti ad una circonferenza di centro  $G$  e raggio  $r$  si spostano lungo un arco di circonferenza di lunghezza pari a

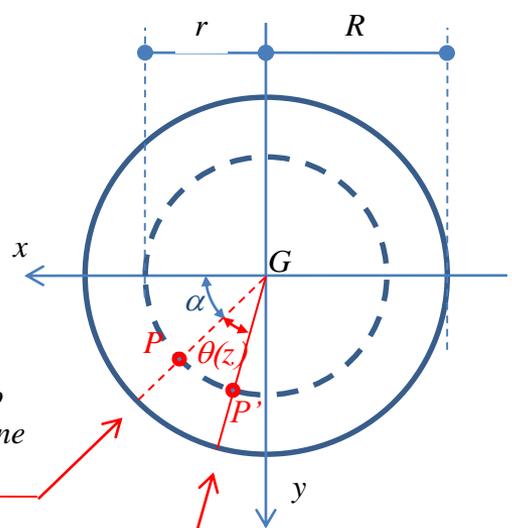
$$P-P' = \theta(z) r \quad (57)$$



# Convenzione sul segno della rotazione



La rotazione torsionale di una sezione di normale uscente +z si assume positiva se concorde con l'asse z.

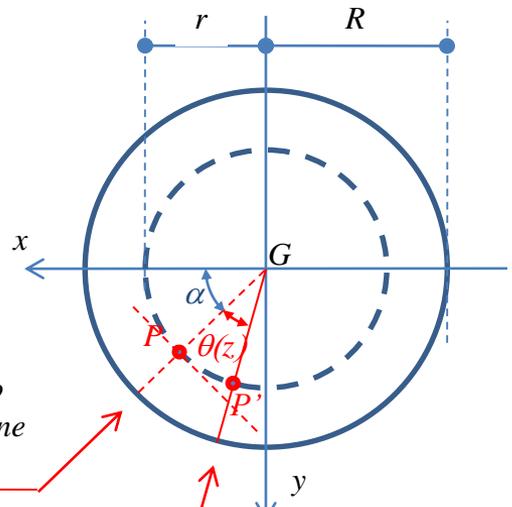
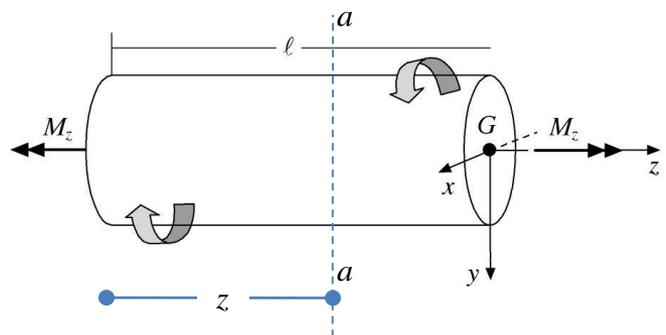


Allineamento configurazione indeformata

Allineamento configurazione deformata



# 1. Ipotesi sul campo di spostamento



Allineamento configurazione indeformata

Allineamento configurazione deformata

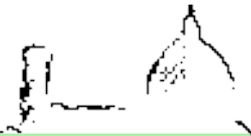
1. Nell'ambito dei piccoli gradienti di spostamento, a meno di moti rigidi si può assumere che lo spostamento del generico punto  $P$ , di coordinate  $(x,y)$  avvenga nella direzione della tangente alla circonferenza di raggio  $r$  passante per  $P$ .

In tal modo, le componenti di spostamento nel piano  $u$  e  $v$  possono essere calcolate dalla (57) come segue:

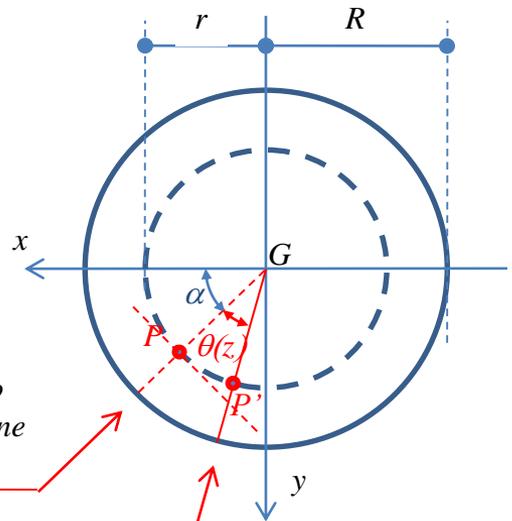
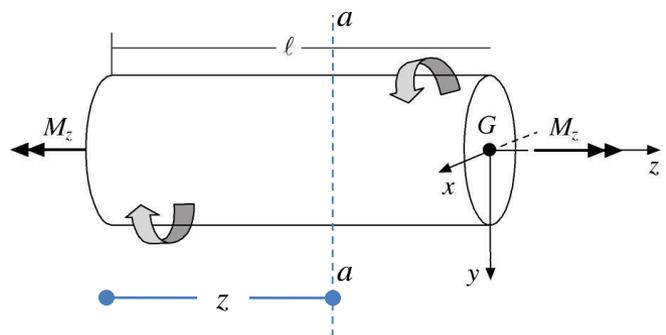
$$\begin{aligned} u &= -\theta(z) r \sin \alpha = -\theta(z) y \\ v &= \theta(z) r \cos \alpha = \theta(z) x \end{aligned} \quad (58)$$

Si osservi che il precedente risultato è in accordo con le (55.a,b,c), infatti si ha

$$u = u(y,z) \quad v = v(x,z) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$



# 1. Ipotesi sul campo di spostamento



Allineamento configurazione indeformata

Allineamento configurazione deformata

2. In accordo con le evidenze sperimentali relative alle travi a sezione circolare (anche cava) soggette a torsione, si pone

$$w=0 \tag{59}$$

Questa ipotesi implica che, a deformazione avvenuta, la sezione trasversale rimanga piana. Si osservi che questa è una ipotesi base della teoria tecnica della trave, che verrà sviluppata successivamente.

In effetti, più in generale, si potrebbe porre  $w=cost$ . La (59) "depura" dai moti rigidi la soluzione che otterremo.



## 2.a Equazioni costitutive

Dalle componenti di spostamento (58) e (59) si calcolano le seguenti componenti di deformazione:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{zx} = -\theta'(z)y \quad \gamma_{zy} = \theta'(z)x \end{aligned} \quad \text{dove} \quad \theta'(z) = \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} \quad (60)$$

Il termine  $\theta'(z)$  rappresenta l'angolo di rotazione relativa tra due sezioni trasversali poste a distanza infinitesima  $dz$  e pertanto è detto curvatura torsionale.

Dalle (55.e) e (55.f) si calcolano le uniche componenti di tensione non nulle come segue

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = -G\theta'(z)y \quad \tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\theta'(z)x \quad (61)$$



## 2.b Caratteristiche della sollecitazione

Le componenti di tensione presenti in una generica sezione devono essere tali che la loro risultante sia pari alle caratteristiche della sollecitazione presenti su di essa. Ricordando che gli assi  $x$  ed  $y$  sono baricentrici per la sezione trasversale, per le (T3) si ha

$$\begin{aligned}
 T_x(z) &= \int_A \tau_{zx} dA = -G\theta'(z) \int_A y dA = 0 \\
 T_y(z) &= \int_A \tau_{zy} dA = G\theta'(z) \int_A x dA = 0 \\
 M_z(z) &= \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = G\theta'(z) \int_A (x^2 + y^2) dA = G\theta'(z)I_0
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

Dove  $I_0$  rappresenta il momento d'inerzia polare della sezione rispetto al baricentro e vale

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{\pi R^4}{2} && \text{Sezione circolare di raggio } R \\
 I_0 &= \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2} && \text{Sezione a corona circolare di raggio esterno } R_e \text{ e raggio interno } R_i
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

Si osservi che, nelle (62) si è ipotizzato  $G=cost$ , ossia che il materiale sia omogeneo (è una delle ip. del solido di de Saint-Venant).

Le prime due relazioni delle (62) sono allora identicamente soddisfatte, mentre dalla terza si ottiene la curvatura torsionale come segue

$$\theta'(z) = \frac{M_z(z)}{GI_0}
 \tag{64}$$



## 2.b Caratteristiche della sollecitazione

Per il problema in esame, il valore della sollecitazione torsionale presente sulla trave è costante  $M_z(z)=M_z$ , per cui anche la curvatura torsionale è costante

$$\theta' = \frac{M_z}{GI_0} \quad (65)$$

Ne consegue che la rotazione relativa tra la generica sezione di ascissa  $z$  e la base iniziale della trave è pari a

$$\Delta\theta(z) = \frac{M_z}{GI_0} z \quad (66)$$

e quindi la rotazione relativa tra le basi della trave (poste a distanza  $L$ ) è pari a

$$\Delta\Theta = \Delta\theta(L) = \frac{M_z}{GI_0} L \quad (67)$$

Il valore  $GI_0$ , che rappresenta il termine di proporzionalità tra il momento torcente applicato e la curvatura torsionale, è detto *rigidezza torsionale*.



### 3 Calcolo dello stato tensionale

Sostituendo la curvatura torsionale (65) nelle componenti di tensione (61) si ha

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = -\frac{M_z}{I_0} y \quad \tau_{zy} = G\gamma_{zy} = \frac{M_z}{I_0} x \quad (68)$$

Mentre gli scorrimenti angolari si ottengono dalle (60) come segue

$$\gamma_{zx} = -\frac{M_z}{GI_0} y \quad \gamma_{zy} = \frac{M_z}{GI_0} x \quad (69)$$

N.B.

È facile verificare che le (68) soddisfano le equazioni di equilibrio e di congruenza interna (T1) (in particolare si va  $c = 2M_z/I_0$ ) e le condizioni di equilibrio al contorno (T2), pertanto **quella ottenuta è l'unica soluzione del problema della trave a sezione circolare (o corona circolare) sollecitata da un momento torcente costante.**



## Sintesi

Sintetizzando, per il problema in esame si ha:

- geometria e materiale: asta rettilinea a sezione trasversale circolare o a corona circolare;
- azioni: due coppie torcenti uguali ed opposte applicate sulle basi della trave

$$M_z(z) = M_z$$

- tensioni: in un generico punto  $P$  di coordinate  $(x,y)$  sono presenti le seguenti componenti di tensione tangenziale

$$\tau_{zx} = -\frac{M_z}{I_0} y \quad \tau_{zy} = \frac{M_z}{I_0} x$$

- deformazioni: in un generico punto  $P$  di coordinate  $(x,y)$  sono presenti i seguenti scorrimenti angolari

$$\gamma_{zx} = -\frac{M_z}{GI_0} y \quad \gamma_{zy} = \frac{M_z}{GI_0} x$$

- rotazione relativa tra due sezioni trasversali

$$\Delta\theta(z) = \frac{M_z}{GI_0} z \quad \Delta\Theta = \Delta\theta(L) = \frac{M_z}{GI_0} L$$

- componenti del campo di spostamento (a meno di moti rigidi)

$$u = -\frac{M_z}{GI_0} z r \sin \alpha = -\frac{M_z}{GI_0} z y$$

$$v = \frac{M_z}{GI_0} z r \cos \alpha = \frac{M_z}{GI_0} z x$$

$$w = 0$$



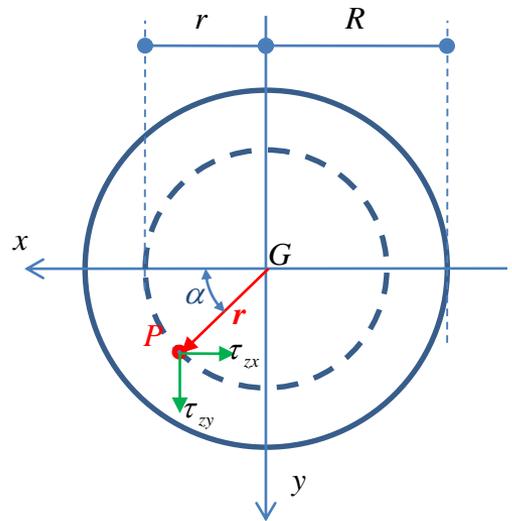
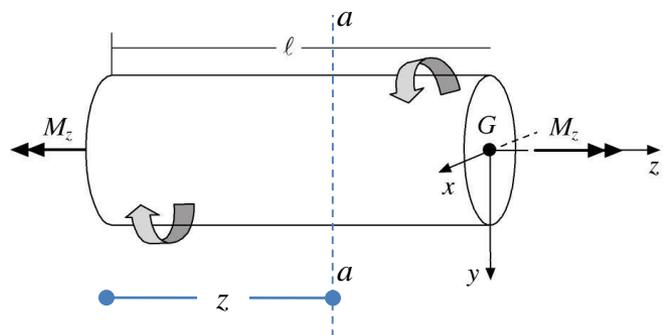
# Analisi delle componenti di tensione e di scorrimento

---

Aste a sezione trasversale circolare ed a corona circolare

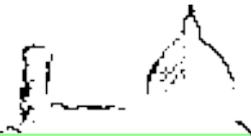


## Analisi delle componenti di tensione e di scorrimento

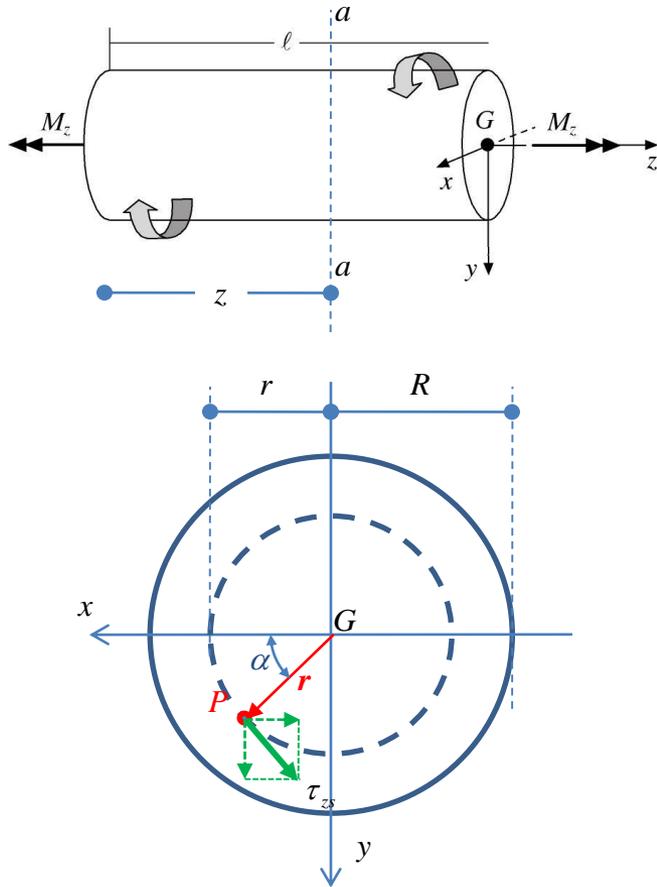


Si consideri un punto  $P$  in una generica sezione trasversale della trave in esame. Esso è individuato dal vettore posizione  $r=[x,y]^T$ . Le componenti di tensione tangenziale e di scorrimento angolare possono essere ordinate in vettori come segue

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \frac{M_z}{I_0} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \frac{M_z}{GI_0} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$



## Analisi delle componenti di tensione e di scorrimento



Si consideri un punto  $P$  in una generica sezione trasversale della trave in esame. Esso è individuato dal vettore posizione  $r = [x, y]^T$ . Le componenti di tensione tangenziale e di scorrimento angolare possono essere ordinate in vettori come segue

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \frac{M_z}{I_0} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \frac{M_z}{GI_0} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

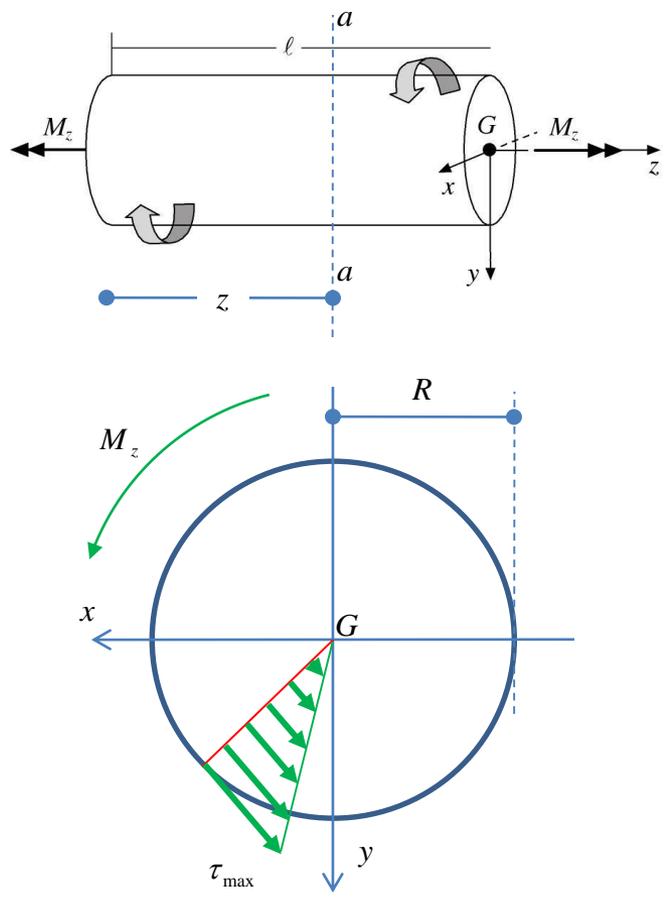
Si indica con  $s$  la direzione ortogonale a  $r$ . Le risultanti delle precedenti componenti di tensione e di scorrimento sono ortogonali al vettore posizione  $r$  ed hanno un modulo pari a

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{I_0} r \quad \gamma_{zs} = \frac{M_z}{GI_0} r \quad (70)$$

Le precedenti formule sono operativamente più convenienti delle (68) e (69)



## Analisi delle componenti di tensione e di scorrimento



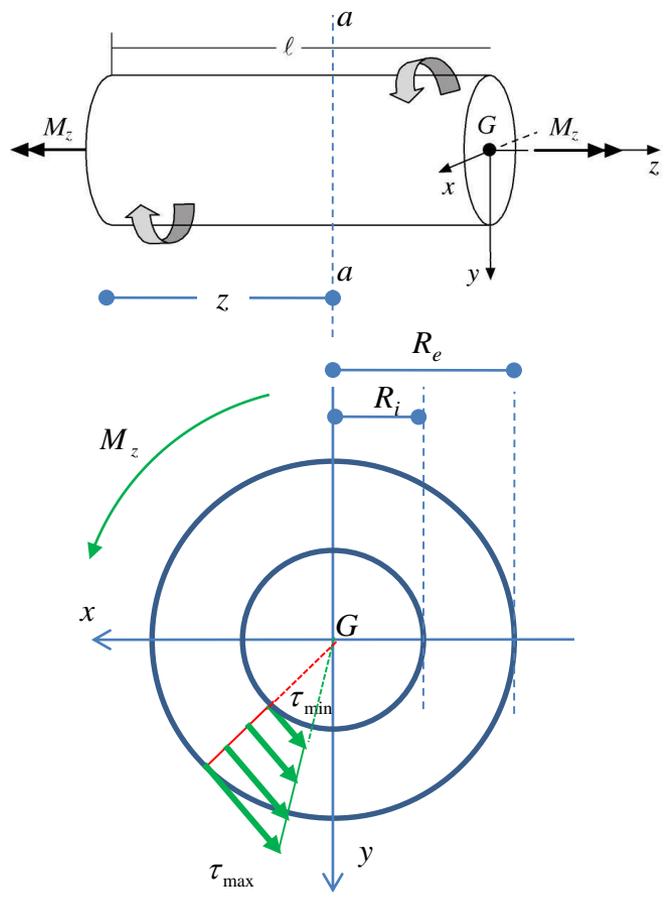
Pertanto, su una direzione radiale della sezione trasversale della trave in esame, le tensioni tangenziali e gli scorrimenti angolari risultanti sono diretti ortogonalmente al raggio ed hanno andamento lineare. Sono nulli in corrispondenza del baricentro e massimi in corrispondenza dei punti che si trovano sul contorno della sezione. I valori massimi sono pari a

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R \quad \gamma_{\max} = \frac{M_z}{GI_0} R$$

Il verso delle tensioni tangenziali e degli scorrimenti risultanti è tale che la risultante delle tensioni tangenziali sia concorde con il momento torcente agente sulla sezione



## Sezione circolare cava



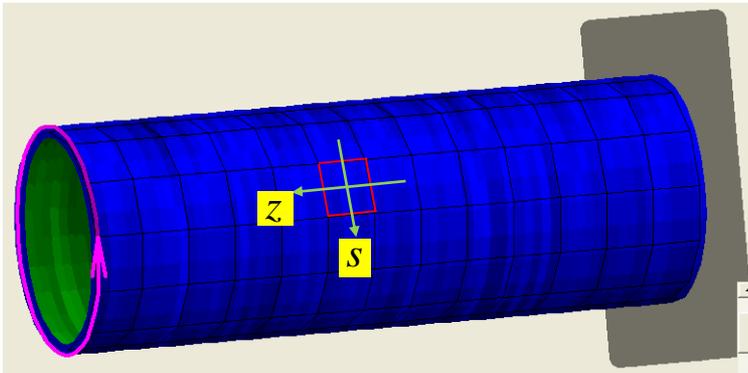
Per una trave a sezione circolare cava vale quanto detto nella slide precedente, ossia le risultanti delle tensioni tangenziali e degli scorrimenti angolari sono ortogonali alla direzione radiale. Il loro andamento è lineare ed è compreso fra i seguenti valori

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R_e \quad \gamma_{\max} = \frac{M_z}{GI_0} R_e$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_z}{I_0} R_i \quad \gamma_{\min} = \frac{M_z}{GI_0} R_i$$



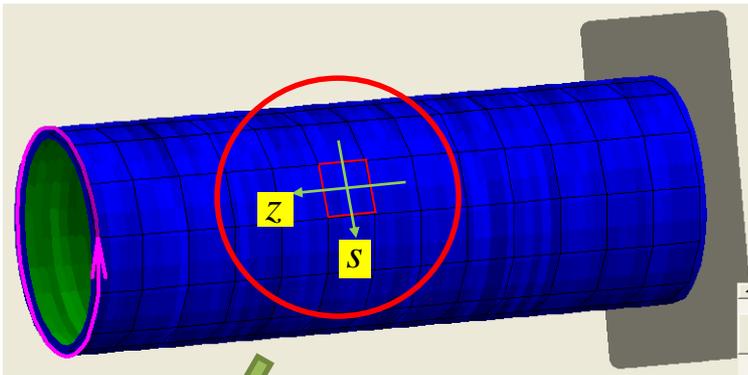
## Valori e direzioni principali di tensione e di deformazione



Si consideri un punto materiale del solido (anche interno). Si fissi un sistema di riferimento  $zs$ , tale che l'asse  $z$  sia parallelo all'asse del solido e che l'asse  $s$  sia tangente alla superficie cilindrica e perpendicolare a  $z$ .

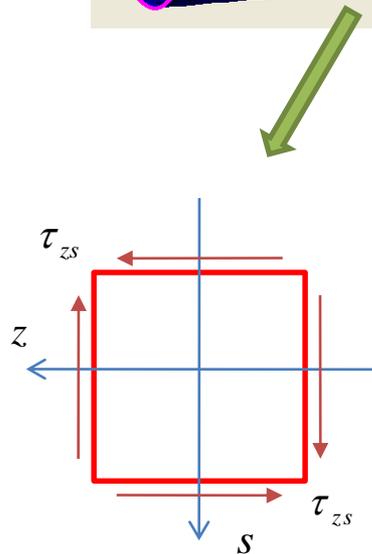


## Valori e direzioni principali di tensione e di deformazione



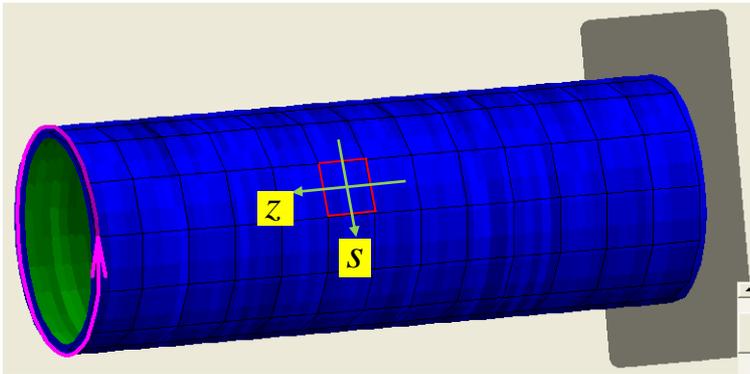
Si consideri un punto materiale del solido (anche interno). Si fissi un sistema di riferimento  $zs$ , tale che l'asse  $z$  sia parallelo all'asse del solido e che l'asse  $s$  sia tangente alla superficie cilindrica e perpendicolare a  $z$ .

Per quanto evidenziato nelle precedenti slide, lo stato tensionale presente nel punto materiale in esame può essere rappresentato come indicato in figura.





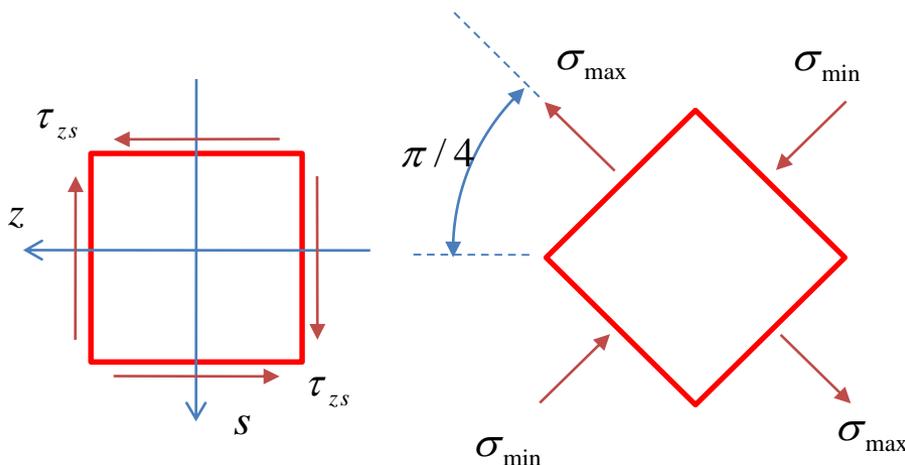
## Valori e direzioni principali di tensione e di deformazione



Ricordando le regole di trasformazione delle componenti di tensione, ed in particolare il metodo della circonferenza di Mohr, è facile verificare che le direzioni principali di tensione sono inclinate a  $45^\circ$  rispetto alle direzione  $z$  ed  $s$  e che i valori principali di tensione sono pari a

$$\sigma_{\max} = \tau_{zs}$$

$$\sigma_{\min} = -\tau_{zs}$$



Inviluppando allora le direzioni principali di tensione si ottengono delle eliche contenute sulla superficie cilindrica e inclinate di  $45^\circ$  rispetto all'asse della trave.

Considerazioni analoghe valgono per gli scorrimenti angolari.



# La prova di torsione

---

Aste a sezione trasversale circolare ed a corona circolare



## Costanti costitutive per un solido elastico lineare isotropo

Nelle scorse lezioni si è visto che le proprietà meccaniche di un solido elastico lineare isotropo sono definite da tre costanti materiali

$E$  = *modulo di Young*

$\nu$  = *coefficiente di Poisson*

$G$  = *modulo di rigidezza a taglio*

Tali costanti devono soddisfare la seguente relazione

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (71)$$

Pertanto le caratteristiche meccaniche di un materiale elastico lineare isotropo sono completamente definite se per esso vengono determinate (sperimentalmente) due costanti materiali: la terza può essere poi calcolata dalla (71).

In precedenza è stato mostrato che il modulo di Young di un materiale può agevolmente essere determinato attraverso una prova di trazione (o compressione) monoassiale. In linea di principio, attraverso la medesima prova, può anche essere determinato il coefficiente di Poisson del materiale come rapporto fra la deformazione assiale e la contrazione trasversale. Questo implica però la misura di due componenti di deformazione che può non essere sempre agevole o precisa.



## La prova di torsione

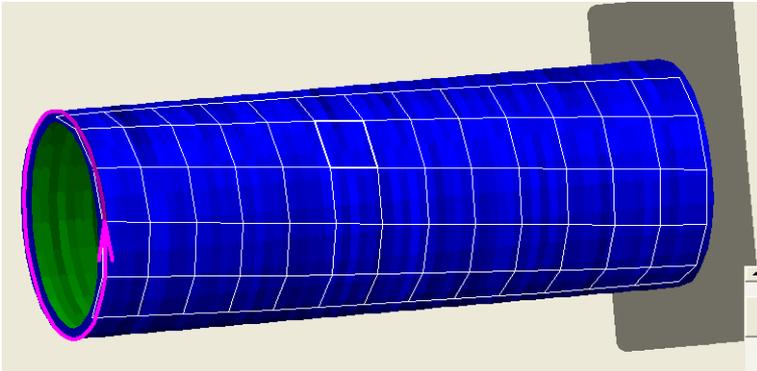


Figura realizzata mediante MDSolids

Per tale motivo si preferisce, ove possibile, determinare il modulo di rigidezza a taglio  $G$  del materiale attraverso una prova di torsione e, successivamente, appurato il comportamento elastico lineare isotropo del materiale, il coefficiente di Poisson attraverso la (71).

In tale prova un provino cilindrico, di forma e dimensioni standardizzate, viene sollecitato monotonicamente da una

coppia torcente  $M_z$  che viene lentamente incrementata. Per ogni valore della coppia torcente si misura la rotazione relativa fra le due sezioni di estremità  $\Delta\theta$ . I valori di  $M_z$  e  $\Delta\theta$  possono essere diagrammati in un grafico. Analogamente a quanto visto per la prova monoassiale, per valori di carico "sufficientemente" piccoli, si ha proporzionalità diretta fra il momento torcente e la rotazione. In tale tratto (lineare) è possibile calcolare il modulo di rigidezza a taglio del materiale attraverso la (67)

$$G = \frac{M_z}{I_0} \frac{L}{\Delta\theta}$$



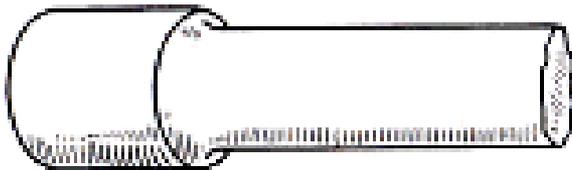
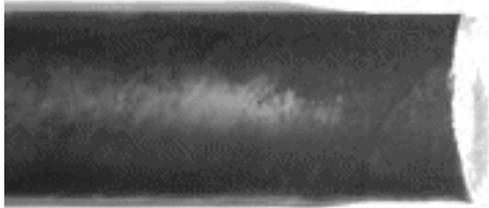
## La prova di torsione – rottura per tens. normali o tangenziali

Si immagini di effettuare una prova di torsione su due barrette cilindriche, una di acciaio dolce ed una di ghisa.

Benché la fase elastica lineare di entrambi i materiali possa essere schematizzata mediante leggi costitutive analoghe (legge di Hooke generalizzata), il loro comportamento a rottura è molto differente.



## La prova di torsione – rottura per tens. normali o tangenziali

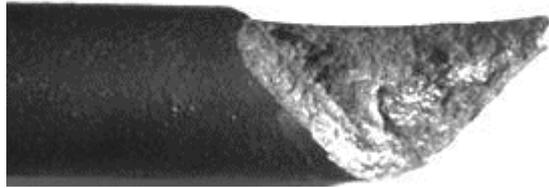


### Acciaio dolce

L'acciaio dolce presenta un'ampia fase plastica prima della rottura (comportamento duttile), che avviene in corrispondenza di piani ortogonali alla linea d'asse del solido come mostrato in figura. Per quanto è stato descritto nella presente lezione, su tali piani agisce la massima tensione tangenziale. Pertanto la rottura di questo materiale, in una prova di torsione, avviene per il raggiungimento di un valore limite di tensione tangenziale.



## La prova di torsione – rottura per tens. normali o tangenziali



### Ghisa

La ghisa presenta una rottura improvvisa subito dopo la fase elastica lineare (comportamento fragile), che avviene su superfici di tipo elicoidale, inclinate di circa  $45^\circ$  rispetto all'asse del solido. Per quanto è stato mostrato nella presente lezione, su tali piani agisce la massima tensione normale. Pertanto, la rottura di questo materiale, in una prova di torsione, avviene per il raggiungimento di un valore limite di tensione normale.



## La prova di torsione – materiali duttili e materiali fragili



Sebbene i materiali possono presentare delle sfumature, nel loro comportamento meccanico, meno nette rispetto a quanto indicato nelle due precedenti slide, si può dire, in prima approssimazione, che:

- i materiali fragili, come la ghisa, sono più deboli a trazione che a taglio;
- i materiali duttili, come l'acciaio dolce, sono più deboli a taglio che a trazione.

Questa distinzione è molto importante ad esempio per la corretta definizione di regole che permettono di misurare il livello di sicurezza che si ha in punti materiali del solido sollecitati da stati tensionali pluriassiali (criteri di resistenza).



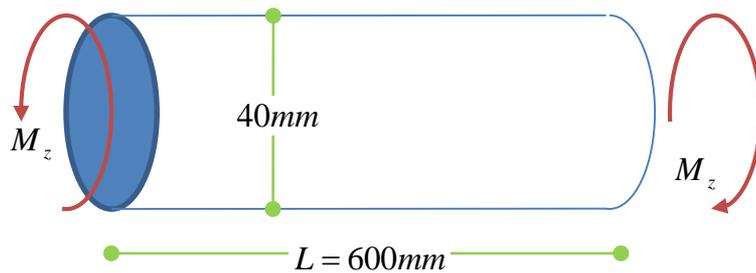
# Strutture sollecitate a torsione: esercizi

---

Aste a sezione trasversale circolare ed a corona circolare

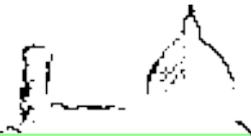


## Esercizio

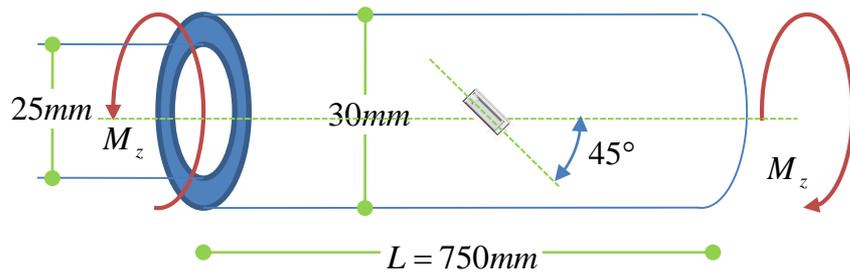


L'asta in alluminio ( $G=26\text{ GPa}$ ) schematizzata in figura è caricata da due coppie torcenti uguali ed opposte applicate sulle basi.

Si calcoli la massima coppia torcente se la massima tensione tangenziale applicabile al materiale è  $\tau_{max}=70\text{ MPa}$  e la massima rotazione relativa tra le basi della trave è di  $0.10\text{ rad}$ .



## Esercizio

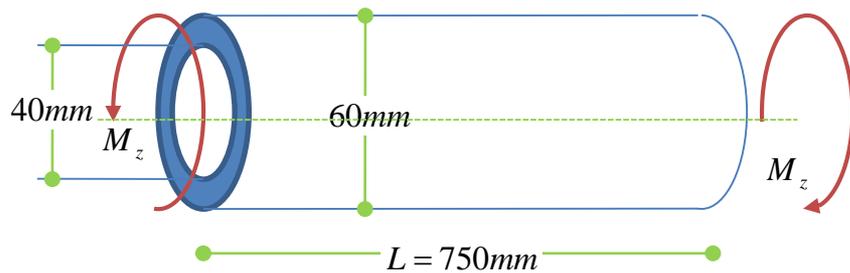


L'elemento tubolare rappresentato in figura è caricato da una coppia torcente  $M_z = 110 Nm$ . Uno strain gauge posizionato sulla superficie esterna del cilindro ed inclinato di  $45^\circ$  rispetto all'asse misura una deformazione di  $190 \mu$ . Si determini:

- il valore della tensione tangenziale massima presente nella trave  $\tau_{max}$ ;
- il modulo di rigidezza a taglio  $G$ ;
- la rotazione relativa tra le basi della trave.



## Esercizio



L'elemento tubolare rappresentato in figura è caricato da una coppia torcente  $M_z$ . La tensione tangenziale massima è pari a  $90MPa$ .

- si disegni l'andamento delle tensioni tangenziali in una qualunque sezione trasversale del solido, indicando i valori di tensione tangenziale massima (data) e minima (da determinare);
- si calcoli il modulo della coppia torcente applicata;
- sapendo che l'asta è in acciaio, si determini la rotazione relativa tra le sezioni d'estremità.