

# Asta sollecitata a torsione



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Profili aperti a parete sottile



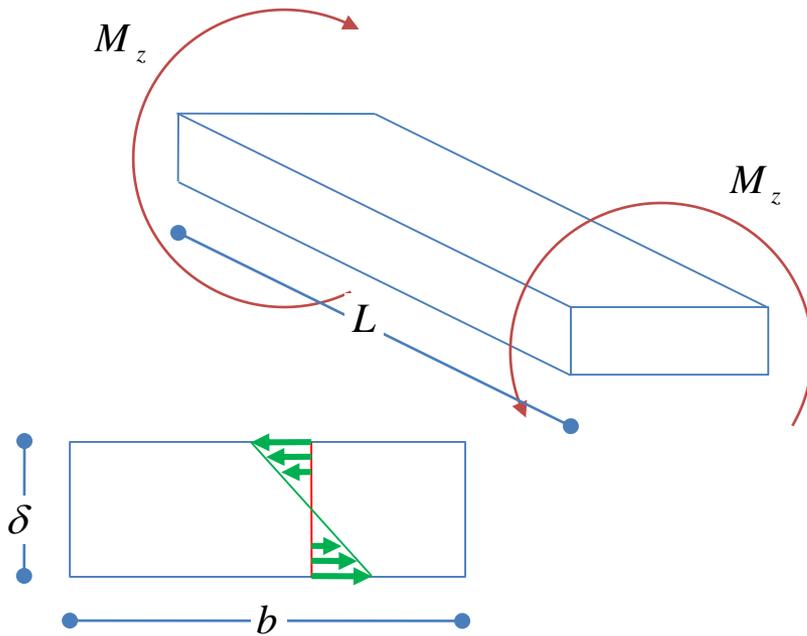
# Aste in torsione: sezione trasversale rettangolare

---

Altri tipi di sezione trasversale



## Sezione trasversale rettangolare



Si consideri un'asta a sezione trasversale rettangolare sollecitata da un momento torcente  $M_z$ . Siano  $b$  e  $\delta$  rispettivamente la dimensione maggiore e la dimensione minore di tale sezione trasversale. La tensione tangenziale massima e la curvatura torsionale possono essere calcolati attraverso le seguenti relazioni

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_\tau} \delta \qquad J_\tau = \frac{b\delta^3}{k_\tau} \qquad (72)$$

$$\theta' = \frac{\Delta\Theta}{L} = \frac{M_z}{GJ_\theta} \qquad J_\theta = \frac{b\delta^3}{k_\theta}$$

$J_\tau$  e  $J_\theta$  hanno la dimensione di un momento d'inerzia e dipendono dal rapporto di forma della sezione. Si osservi che per una sezione molto allungata si ha

$$J_\tau = J_\theta = J = \frac{b\delta^3}{3} \qquad (73)$$

$b/\delta$	1.0	1.25	1.5	2.0	3.0	5.0	$\infty$
$k_\tau$	4.804	4.52	4.33	4.07	3.74	3.43	3.00
$k_\theta$	7.114	5.82	5.11	4.37	3.80	3.43	3.00



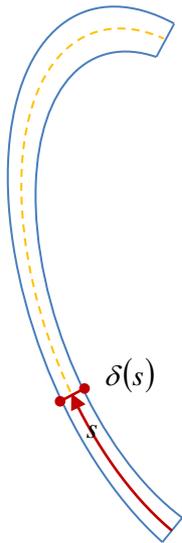
# Aste in torsione: sezione aperta a parete sottile

---

Altri tipi di sezione trasversale



## Sezione trasversale a parete sottile e profilo aperto



Per una sezione sottile aperta una buona approssimazione per  $J$  è la seguente

$$J = \frac{1}{3} \int_0^b \delta(s)^3 ds \quad (74)$$

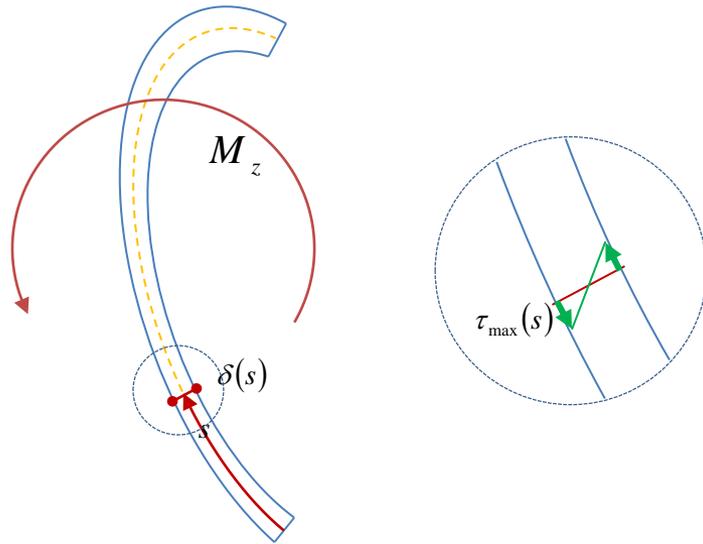
dove  $\delta(s)$  è lo spessore, eventualmente variabile, della sezione e  $b$  è la sua lunghezza totale. Se la sezione è a spessore costante la (3) si particolarizza come segue

$$J = \frac{1}{3} b \delta^3 \quad (75)$$

Si osservi che la (4) è analoga a quella ottenuta per sezioni rettangolari molto allungate.



## Sezione trasversale a parete sottile e profilo aperto



Per una sezione sottile aperta una buona approssimazione per  $J$  è la seguente

$$J = \frac{1}{3} \int_0^b \delta(s)^3 ds \quad (74)$$

dove  $\delta(s)$  è lo spessore, eventualmente variabile, della sezione e  $b$  è la sua lunghezza totale. Se la sezione è a spessore costante la (3) si particolarizza come segue

$$J = \frac{1}{3} b \delta^3 \quad (75)$$

Si osservi che la (4) è analoga a quella ottenuta per sezioni rettangolari molto allungate.

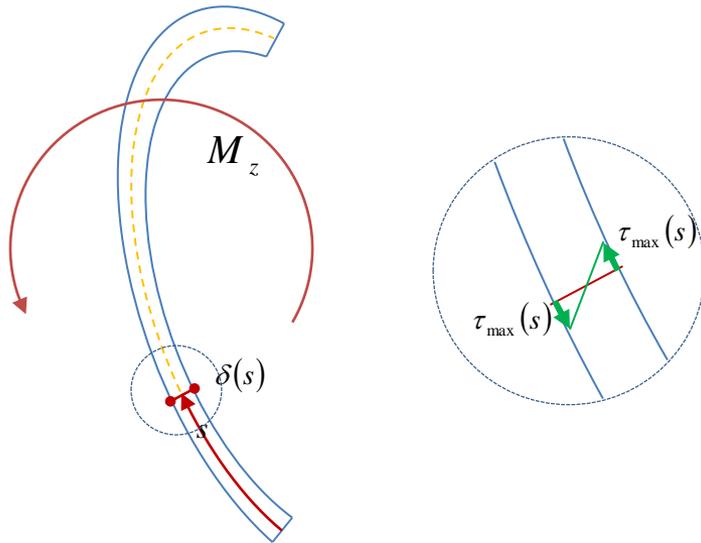
La tensione tangenziale massima presente in una generica corda e la curvatura torsionale si possono calcolare come segue

$$\tau_{\max}(s) = \frac{M_z}{J} \delta(s) \quad \theta' = \frac{\Delta\Theta}{L} = \frac{M_z}{GJ} \quad (76)$$

Secondo la precedente relazione, **nei tratti più spessi si ha una tensione maggiore.**



## Sezione trasversale a parete sottile e profilo aperto

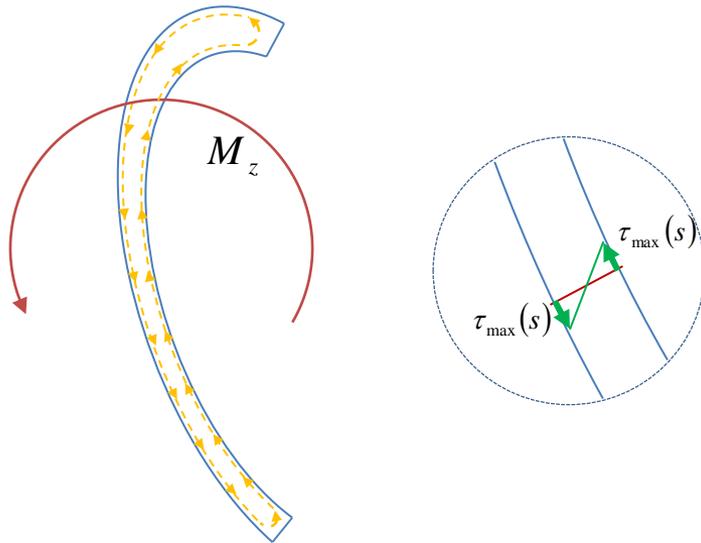


### OSSERVAZIONI

- il segno delle tensioni tangenziali non è costante sullo spessore; in una generica corda la tensione tangenziale massima è uguale ed opposta alla tensione tangenziale minima;



## Sezione trasversale a parete sottile e profilo aperto

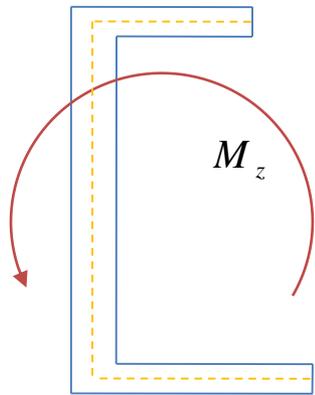


### OSSERVAZIONI

- il segno delle tensioni tangenziali non è costante sullo spessore; in una generica corda la tensione tangenziale massima è uguale ed opposta alla tensione tangenziale minima;
- le isostatiche di tensione (ossia le curve passanti per i punti della sezione che hanno lo stesso valore, in modulo, di tensione tangenziale), hanno un andamento del tipo indicato in figura: il flusso delle tensioni tangenziali segue delle curve che si chiudono all'interno della sezione.



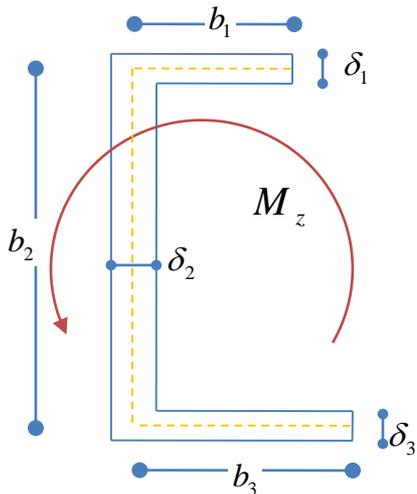
## Caso particolare 1



Si consideri il caso particolare di un'asta sollecitata da un momento torcente costante  $M_z$ , la cui sezione trasversale è ottenuta assemblando  $n$  parti rettangolari molto allungate.



## Caso particolare 1

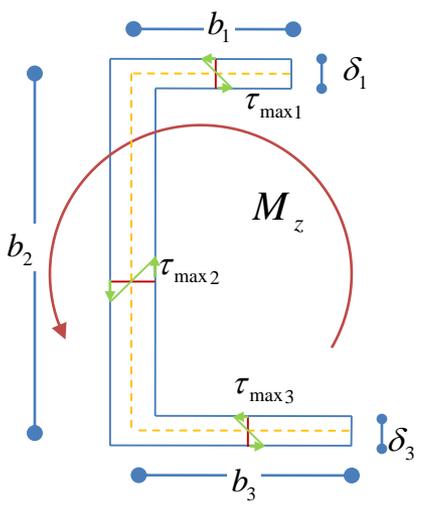


Si consideri il caso particolare di un'asta sollecitata da un momento torcente costante  $M_z$ , la cui sezione trasversale è ottenuta assemblando  $n$  parti rettangolari molto allungate. Siano  $b_i$  e  $\delta_i$  rispettivamente la lunghezza della linea d'asse e lo spessore dell' $i$ -esimo rettangolo che compone la sezione in esame. In questo caso la (74) si particularizza come segue

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3 \quad (77)$$



## Caso particolare 1



Si consideri il caso particolare di un'asta sollecitata da un momento torcente costante  $M_z$ , la cui sezione trasversale è ottenuta assemblando  $n$  parti rettangolari molto allungate. Siano  $b_i$  e  $\delta_i$  rispettivamente la lunghezza della linea d'asse e lo spessore dell' $i$ -esimo rettangolo che compone la sezione in esame. In questo caso la (74) si particularizza come segue

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3 \quad (77)$$

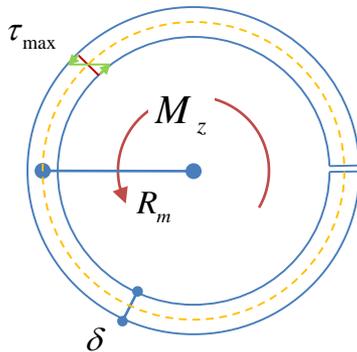
Dalle (76) si ottiene il valore della tensione tangenziale massima in ogni tratto e la curvatura torsionale come segue

$$\tau_{max_i} = \frac{M_z}{J} \delta_i \quad \theta' = \frac{M_z}{GJ} \quad (78)$$

Nei tratti più spessi si ha una tensione tangenziale maggiore



## Caso particolare 2



Si consideri come secondo caso particolare quello di una sezione a corona circolare, alla quale sia stato operato un taglio come indicato in figura. In questo caso la (74) si particolarizza come segue

$$J = \frac{2}{3} \pi R_m \delta^3 \quad (79)$$

Dalle (76) si ottiene inoltre il valore della tensione tangenziale massima in ogni corda e la curvatura torsionale come segue

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J} \delta \quad \theta' = \frac{M_z}{GJ} \quad (80)$$



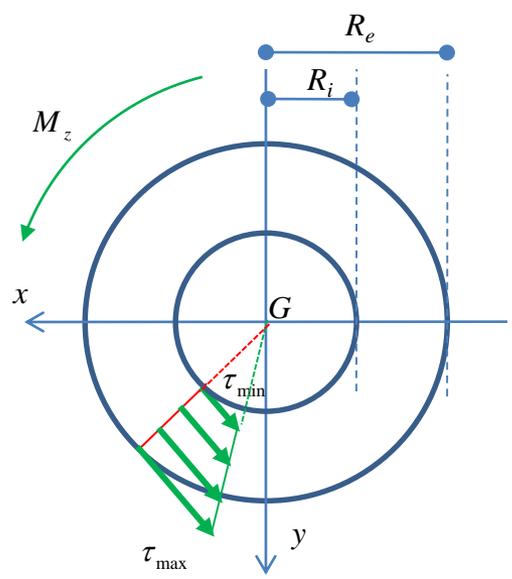
# Confronto con la sezione a corona circolare

---

Altri tipi di sezione trasversale



## La sezione circolare cava



Si è visto che, in una trave a sezione circolare cava caricata da un momento torcente costante, le tensioni tangenziali hanno un andamento lineare sullo spessore come indicato in figura.

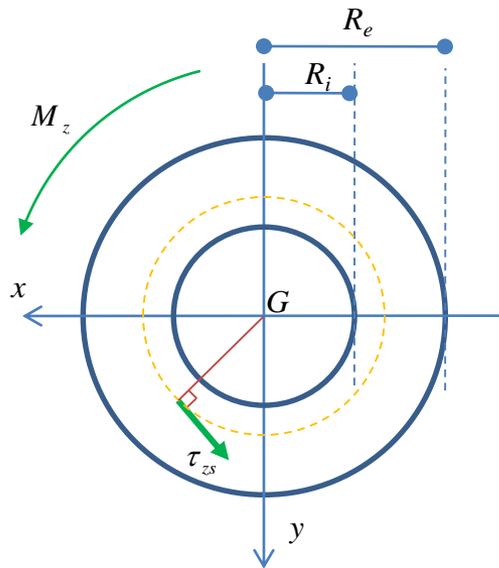
$$\tau(r) = \frac{M_z}{I_0} r \quad R_i \leq r \leq R_e$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R_e$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_z}{I_0} R_i$$



## La sezione circolare cava



$$\tau(r) = \frac{M_z}{I_0} r \quad R_i \leq r \leq R_e$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R_e$$

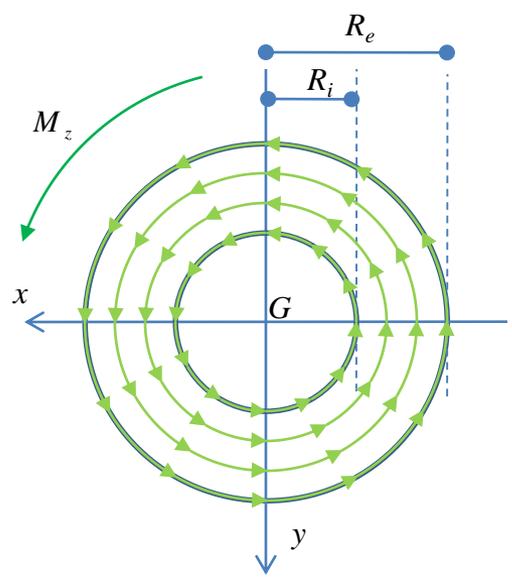
$$\tau_{\min} = \frac{M_z}{I_0} R_i$$

Si è visto che, in una trave a sezione circolare cava caricata da un momento torcente costante, le tensioni tangenziali hanno un andamento lineare sullo spessore come indicato in figura.

La risultante delle tensioni tangenziali è puntualmente tangente alla circonferenza di centro  $G$  e passante per il punto in esame.



## La sezione circolare cava



$$\tau(r) = \frac{M_z}{I_0} r \quad R_i \leq r \leq R_e$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R_e$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_z}{I_0} R_i$$

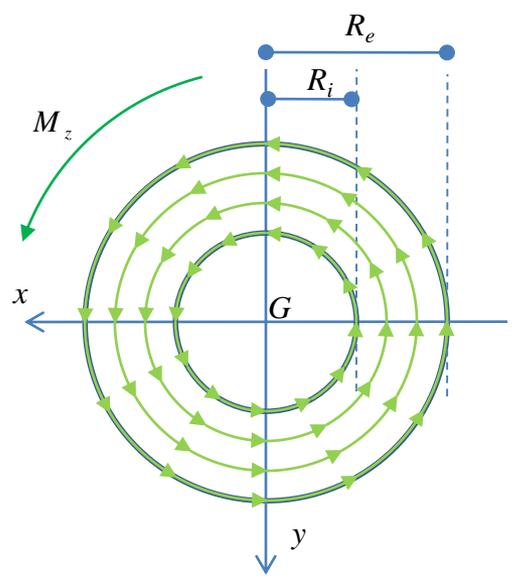
Si è visto che, in una trave a sezione circolare cava caricata da un momento torcente costante, le tensioni tangenziali hanno un andamento lineare sullo spessore come indicato in figura.

La risultante delle tensioni tangenziali è puntualmente tangente alla circonferenza di centro  $G$  e passante per il punto in esame.

Tali tensioni sono allora disposte secondo un flusso che ha come isostatiche di tensione delle circonferenze concentriche e che è tale da equilibrare il momento torcente esterno.



## La sezione circolare cava



### OSSERVAZIONI:

- per una sezione circolare cava non si ha inversione sul segno delle tensioni tangenziali presenti in una corda radiale (differentemente da quanto visto per le sezioni sottili aperte)
- le isostatiche di tensione si chiudono su se stesse percorrendo tutta la sezione
- il valore delle tensioni tangenziali è pressoché costante per sezioni circolari cave molto sottili. In questo caso si ha infatti

$$\tau(r) = \frac{M_z}{I_0} r \quad R_i \leq r \leq R_e$$

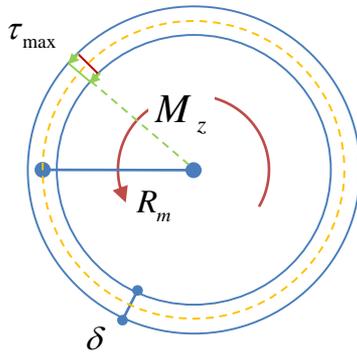
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R_e$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_z}{I_0} R_i$$

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \frac{R_e}{R_i} = 1 + \frac{\delta}{R_i}$$

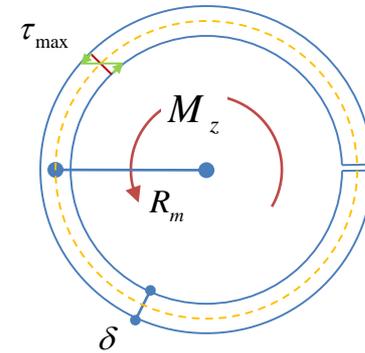


## La sezione circolare cava



$$I_0 = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R_e \quad \gamma_{\max} = \frac{M_z}{GI_0} R_e$$



$$J = \frac{2}{3} \pi R_m \delta^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J} \delta \quad \theta' = \frac{M_z}{GJ}$$

**A parità di sollecitazione torcente, materiale e caratteristiche geometriche, la sezione circolare cava risulta più rigida e meno sollecitata.**