

# Asta sollecitata a torsione



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Profili chiusi a parete sottile:  
teoria approssimata di *Bredt*



## Teoria di Bredt – ipotesi di base sullo stato tensionale

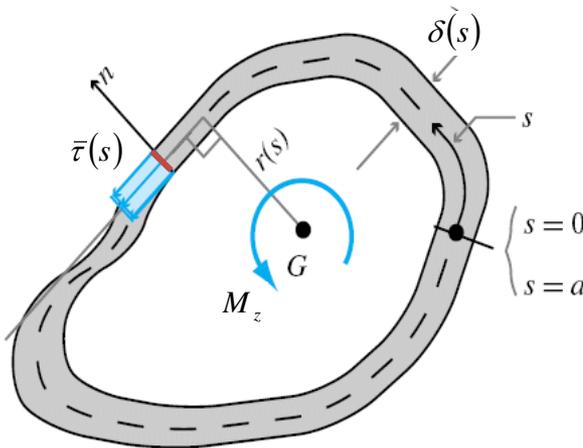


Figura tratta da Comi-Corradi

Le osservazioni fatte a proposito di una sezione circolare cava giustificano la teoria (approssimata) della torsione secondo Bredt.

Tale teoria si riferisce a travi, sollecitate da un momento torcente costante, aventi sezione trasversale chiusa a parete sottile come indicato in figura.

Fissato un sistema di riferimento intrinseco  $s$ , si indica con  $\bar{\tau}(s)$  la tensione tangenziale **media** presente in una corda di ascissa  $s$ . Per quanto detto per una sezione circolare cava, se lo spessore  $\delta(s)$  è piccolo,

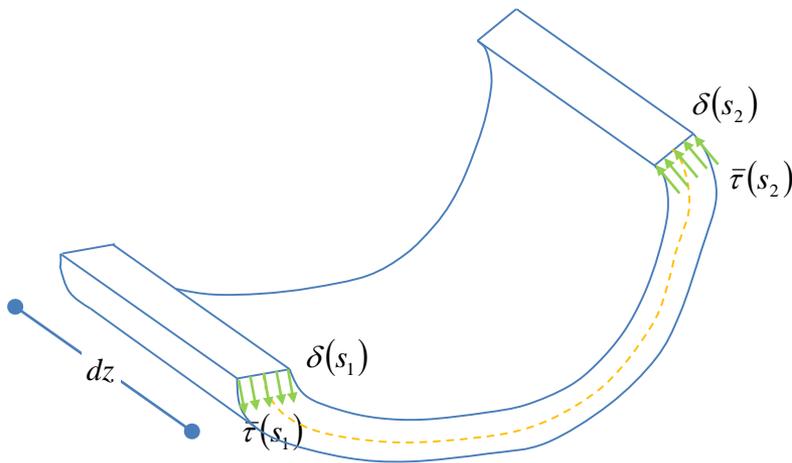
possiamo immaginare che il valore medio di tensione tangenziale non sia molto differente da quello realmente presente nei punti della corda considerata.

Si ipotizza inoltre che la tensione tangenziale media sia diretta parallelamente alla tangente alla linea media della sezione come indicata in figura.



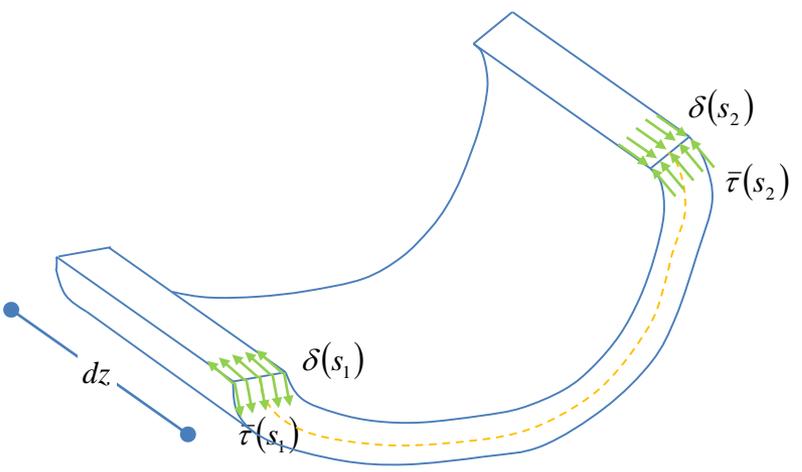
## Teoria di Bredt – risultato preliminare

Si consideri un tratto di trave di lunghezza  $dz$  ed una porzione di sezione compresa tra due corde poste rispettivamente ad ascissa  $s_1$  ed  $s_2$ . Siano  $\bar{\tau}(s_1)$  e  $\bar{\tau}(s_2)$  le tensioni tangenziali medie presenti in tali corde.





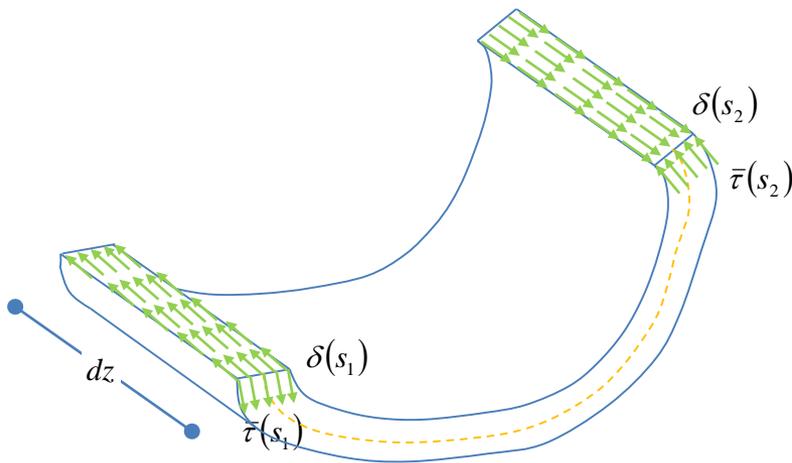
## Teoria di Bredt – risultato preliminare



Si consideri un tratto di trave di lunghezza  $dz$  ed una porzione di sezione compresa tra due corde poste rispettivamente ad ascissa  $s_1$  ed  $s_2$ . Siano  $\bar{\tau}(s_1)$  e  $\bar{\tau}(s_2)$  le tensioni tangenziali medie presenti in tali corde. Per la simmetria del tensore di tensione, sulla parte superiore delle corde ad ascissa  $s_1$  ed  $s_2$  saranno presenti delle tensioni tangenziali ortogonali a quelle prima determinate e di pari intensità.



## Teoria di Bredt – risultato preliminare

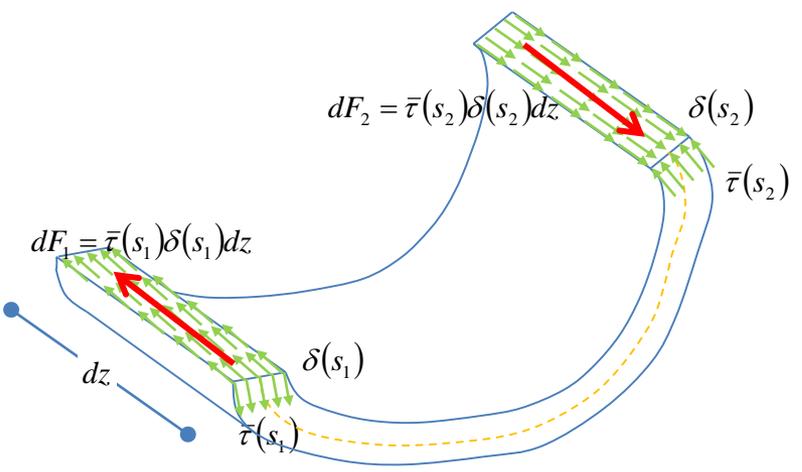


Si consideri un tratto di trave di lunghezza  $dz$  ed una porzione di sezione compresa tra due corde poste rispettivamente ad ascissa  $s_1$  ed  $s_2$ . Siano  $\bar{\tau}(s_1)$  e  $\bar{\tau}(s_2)$  le tensioni tangenziali medie presenti in tali corde. Per la simmetria del tensore di tensione, sulla parte superiore delle corde ad ascissa  $s_1$  ed  $s_2$  saranno presenti delle tensioni tangenziali ortogonali a quelle prima determinate e di pari intensità.

Visto inoltre che, per ipotesi, su tutta la trave è presente un momento torcente costante, su tutti i punti delle due facce tagliate con piani paralleli all'asse della trave sarà presente lo stesso valore di tensione tangenziale.



## Teoria di Bredt – risultato preliminare

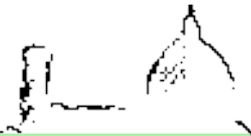


Si consideri un tratto di trave di lunghezza  $dz$  ed una porzione di sezione compresa tra due corde poste rispettivamente ad ascissa  $s_1$  ed  $s_2$ . Siano  $\bar{\tau}(s_1)$  e  $\bar{\tau}(s_2)$  le tensioni tangenziali medie presenti in tali corde. Per la simmetria del tensore di tensione, sulla parte superiore delle corde ad ascissa  $s_1$  ed  $s_2$  saranno presenti delle tensioni tangenziali ortogonali a quelle prima determinate e di pari intensità.

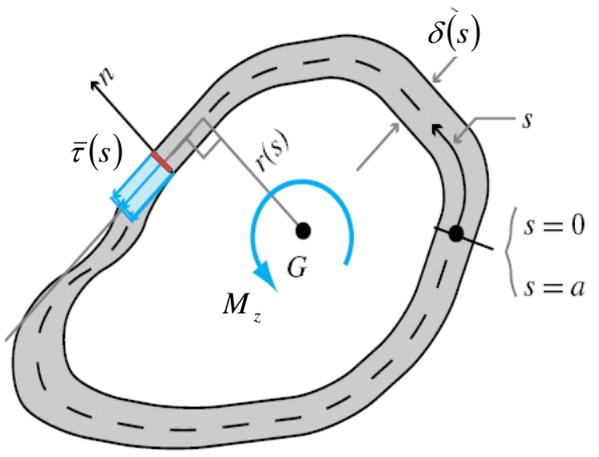
Visto inoltre che, per ipotesi, su tutta la trave è presente un momento torcente costante, su tutti i punti delle due facce tagliate con piani paralleli all'asse della trave sarà presente lo stesso valore di tensione tangenziale. Indicando con  $dF_1$  e  $dF_2$  le risultanti di tali tensioni, per l'equilibrio della porzione di trave in esame alla traslazione nella direzione dell'asse si ha

$$dF_1 = dF_2 \rightarrow \bar{\tau}(s_1)\delta(s_1) = \bar{\tau}(s_2)\delta(s_2) = q \quad \longrightarrow \quad q = \bar{\tau}(s)\delta(s) = \text{cost} \quad (81)$$

La precedente relazione dimostra che il flusso  $q$  delle tensioni tangenziali, definito come il prodotto tra il modulo delle tensioni e lo spessore, è costante.



## Teoria di Bredt – calcolo delle tensioni tangenziali medie



Indicando con  $\Gamma$  la linea media della sezione in esame, per l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse della trave si ha

$$M_z = \oint_{\Gamma} \bar{\tau}(s) \delta(s) r(s) ds = \bar{\tau}(s) \delta(s) \oint_{\Gamma} r(s) ds \quad (82)$$

Nella precedente relazione è stato utilizzato il risultato (81).



## Teoria di Bredt – calcolo delle tensioni tangenziali medie

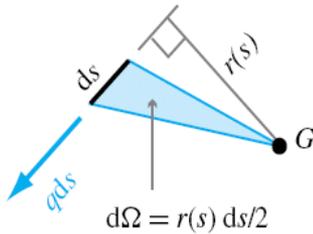
Indicando con  $\Gamma$  la linea media della sezione in esame, per l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse della trave si ha

$$M_z = \oint_{\Gamma} \bar{\tau}(s) \delta(s) r(s) ds = \bar{\tau}(s) \delta(s) \oint_{\Gamma} r(s) ds \quad (82)$$

Nella precedente relazione è stato utilizzato il risultato (81).

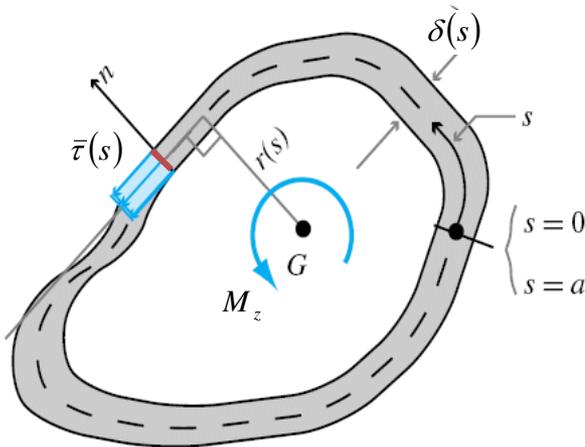
Per il calcolo dell'integrale di linea, si osservi che il prodotto  $r(s)ds$  è pari al doppio dell'area del triangolo avente per base  $ds$  e due lati ottenuti congiungendo gli estremi di  $ds$  con il baricentro  $G$  della sezione (v. figura), per cui si ha

$$r(s)ds = 2d\Omega \rightarrow \oint_{\Gamma} r(s)ds = 2\Omega \quad (83)$$





## Teoria di Bredt – calcolo delle tensioni tangenziali medie



Indicando con  $\Gamma$  la linea media della sezione in esame, per l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse della trave si ha

$$M_z = \oint_{\Gamma} \bar{\tau}(s) \delta(s) r(s) ds = \bar{\tau}(s) \delta(s) \oint_{\Gamma} r(s) ds \quad (82)$$

Nella precedente relazione è stato utilizzato il risultato (81).

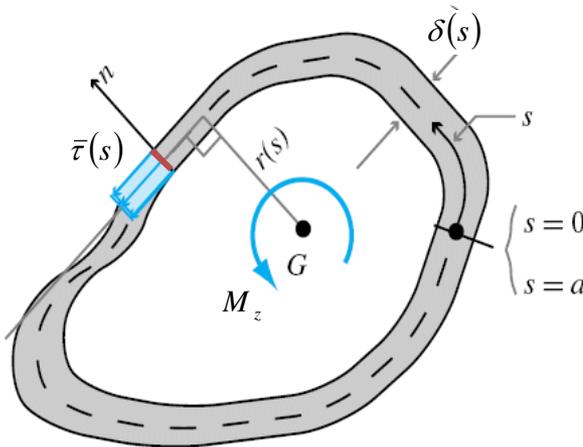
Per il calcolo dell'integrale circuitato, si osservi che il prodotto  $r(s)ds$  è pari al doppio dell'area del triangolo avente per base  $ds$  e due lati ottenuti congiungendo gli estremi di  $ds$  con il baricentro  $G$  della sezione (v. figura), per cui si ha

$$r(s)ds = 2d\Omega \rightarrow \oint_{\Gamma} r(s)ds = 2\Omega \quad (83)$$

Dove  $\Omega$  rappresenta l'area racchiusa dalla linea media della sezione (area racchiusa dalla linea tratteggiata in figura).



## Teoria di Bredt – calcolo delle tensioni tangenziali medie



Sostituendo la (83) nella (82) si ottiene il valore della tensione tangenziale media presente su una generica corda di ascissa  $s$  come segue

$$M_z = \bar{\tau}(s)\delta(s)2\Omega \rightarrow \bar{\tau}(s) = \frac{M_z}{2\Omega\delta(s)} \quad (84)$$

Secondo la precedente relazione, per i profili chiusi i valori massimi di tensione tangenziale si hanno in corrispondenza delle zone più strette, contrariamente a quanto visto per le sezioni sottili aperte.



## Teoria di Bredt – calcolo della curvatura torsionale

In accordo con la teoria qui esposta, è possibile calcolare la curvatura torsionale come segue:

$$\theta' = \frac{M_z}{GJ} \qquad J = \frac{4\Omega^2}{\oint_{\Gamma} \frac{1}{\delta(s)} ds} \qquad (85)$$

La precedente relazione può essere dimostrata come segue.

Per ipotesi sulla generica sezione trasversale del solido in esame sono presenti solo le tensioni tangenziali  $\bar{\tau}(s)$ , calcolate mediante la (84), che per la (82) sono in equilibrio con il carico esterno  $M_z$  (il sistema forze-tensioni qui considerato è equilibrato). Alle tensioni tangenziali  $\bar{\tau}(s)$  corrispondono gli scorrimenti  $\bar{\gamma}(s) = \bar{\tau}(s)/G$ . Indichiamo con  $\Delta\Theta$  la rotazione relativa tra le basi del solido, congruente con tali scorrimenti. Utilizzando la (84), per il principio dei lavori virtuali si ha (si indica con  $L$  la lunghezza della trave e con  $A$  la sezione trasversale)

$$M_z \Delta\Theta = \int_0^L \int_A \bar{\tau}(s) \bar{\gamma}(s) dA dz = \frac{L}{G} \int_A \bar{\tau}(s)^2 dA = \frac{L}{G} \int_A \left( \frac{M_z}{2\Omega \delta(s)} \right)^2 dA = \frac{LM_z^2}{G4\Omega^2} \int_A \frac{1}{\delta(s)^2} dA = \frac{LM_z^2}{G4\Omega^2} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\delta(s)^2} \delta(s) ds = \frac{LM_z^2}{G4\Omega^2} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\delta(s)} ds$$

dalla quale si ricava

$$\theta' = \frac{\Delta\Theta}{L} = \frac{M_z}{G4\Omega^2} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\delta(s)} ds$$

che dimostra la (85).



## SOMMARIO

Si riassumono di seguito le espressioni per il calcolo delle tensioni tangenziali e della curvatura torsionale per travi soggette a momento torcente costante, aventi una delle sezioni trasversali qui esaminate.

Tipo di sezione	Tensione tangenziale	Curvatura torsionale	Caratteristica geometrica
Circolare	$\tau_{\max} = \frac{M_z R}{I_0}$	$\theta' = \frac{M_z}{GI_0}$	$I_0 = \frac{\pi R^4}{2}$
Circolare cava	$\tau_{\max} = \frac{M_z R_e}{I_0} \quad \tau_{\min} = \frac{M_z R_i}{I_0}$	$\theta' = \frac{M_z}{GI_0}$	$I_0 = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$
Rettangolare	$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_\tau} \delta$	$\theta' = \frac{M_z}{GJ_\theta}$	$J_\tau = \frac{b\delta^3}{k_\tau} \quad J_\theta = \frac{b\delta^3}{k_\theta}$
Sottile aperta	$\tau_{\max}(s) = \frac{M_z}{J} \delta(s)$	$\theta' = \frac{M_z}{GJ}$	$J = \frac{1}{3} \int_0^b \delta(s)^3 ds$
Sottile schiusa Bredt	$\bar{\tau}(s) = \frac{M_z}{2\Omega \delta(s)}$	$\theta' = \frac{M_z}{GJ}$	$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{1}{\delta(s)} ds}$