# Aste sollecitate da taglio (e momento)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

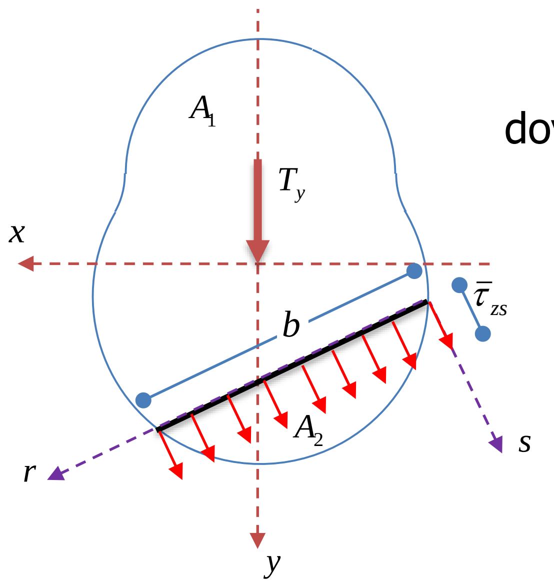
Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

## Profili aperti a parete sottile

# Sommario

È stata descritta una teoria approssimata, dovuta a Jourawsky, che permette di calcolare le tensioni tangenziali <u>medie</u> presenti in una generica corda (punti allineati su un segmento) di una sezione trasversale di un'asta sollecitata da una <u>azione tagliante diretta parallelamente ad una direzione principale d'inerzia</u> della sezione stessa. È stato mostrato che, sulla base di <u>sole considerazioni di equilibrio</u>, da tale teoria si ottiene la seguente relazione per il calcolo delle tensioni tangenziali medie

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \qquad (96)$$




dove

$T_y =$ taglio (ip. parallelo all'asse principale $y$)

$b =$ lunghezza della corda in esame

$I_x =$ momento d'inerzia di TUTTA la sezione rispetto all'asse $x$ *(asse neutro)*

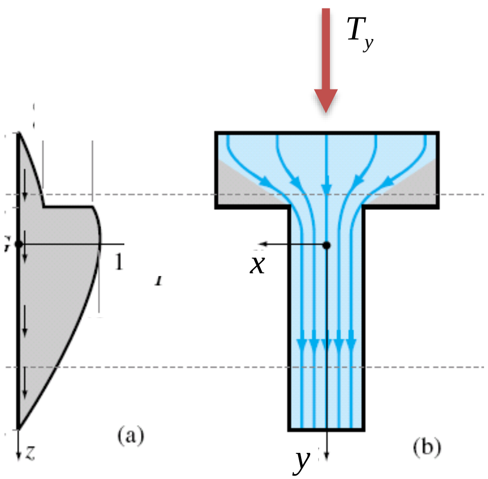
$S_x^{(A_1)} =$ momento statico rispetto all'asse $x$ della porzione di sezione "al di sopra" della corda in esame

$\bar{\tau}_{zs} =$ tensione tangenziale media presente sulla corda in esame nella direzione ortogonale alla corda stessa

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# Introduzione

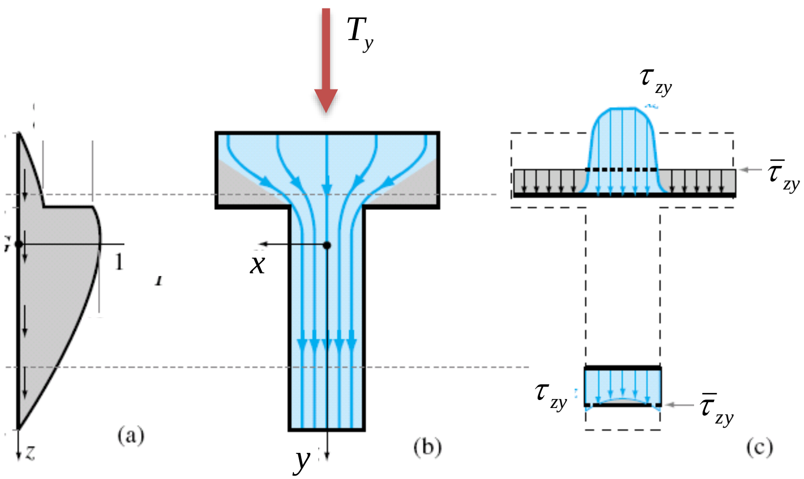
È stato evidenziato più volte che la tensione tangenziale calcolata attraverso la (96) rappresenta il valore medio di quelle effettivamente presenti nei punti della corda in esame. L'errore che si commette applicando la (96) dipende da vari fattori fra cui, non ultimo, la forma della sezione. Si consideri ad esempio una sezione a "T".




Il diagramma delle tensioni tangenziali medie presenti nelle corde della sezione ortogonali al carico tagliante è quello indicato nella parte (a) della figura a fianco. Tale diagramma è suddiviso in due tratti parabolici aventi massimo in corrispondenza della corda per cui passa l'asse neutro relativo alla sollecitazione flessionale accoppiata al taglio $T_y$. Si osservi che il salto del valore delle tensioni tangenziali che si ha in corrispondenza del cambio di lunghezza della corda (ossia nel passaggio dall'ala all'anima) è una «anomalia» dovuta alle approssimazioni contenute nella teoria di Jourawsky.

*Figura tratta da Comi-Corradi, "Introduzione alla meccanica strutturale"*

# Introduzione




Le tensioni tangenziali effettivamente presenti in una generica corda ortogonale al carico tagliante hanno un andamento del tipo indicato in azzurro nella parte (c) della figura a fianco: per la sezione in esame, la formula di Jourawsky approssima meglio i valori reali di tensione tangenziale nei tratti "più stretti" della sezione.

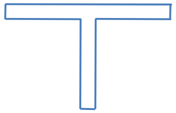
Questo è in accordo con quanto descritto per la sezione rettangolare.

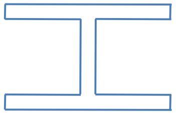
*Figura tratta da Comi-Corradi, "Introduzione alla meccanica strutturale"*

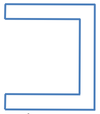
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

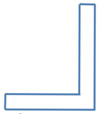
# Sommario

profili aperti in parete sottile

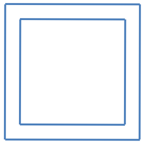

sezione a "T"

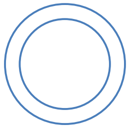

sezione a "doppio T"


sezione a "C"


sezione ad "L"

profili chiusi in parete sottile


sezione scatolare


sezione tubolare

Nella presente lezione analizzeremo un caso di notevole importanza applicativa, ossia quello delle travi a profilo (sezione trasversale) in parete sottile, caratterizzate dall'avere una sezione trasversale di spessore molto piccolo rispetto alle altre dimensioni. È questa una tipologia di travi (soprattutto metalliche) molto diffusa nelle applicazioni ingegneristiche e per la quale la formula di Jourawsky fornisce risultati molto accurati.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# Profili a parete sottile

profili aperti in parete sottile

sezione a "T" — sezione a "doppio T" — sezione a "C" — sezione ad "L"

profili chiusi in parete sottile

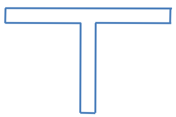
sezione scatolare — sezione tubolare

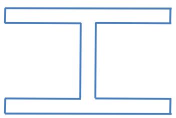
In analogia a quanto descritto precedentemente con riferimento a una sezione rettangolare, visto che le sezioni in esame sono costituite da elementi molto allungati, è lecito supporre che le tensioni tangenziali dovute alle sollecitazioni taglianti siano prevalentemente dirette parallelamente alla linea media della sezione stessa e che il loro valore sia pressoché costante per tutti i punti di una corda ortogonale alla linea media. In tal modo il problema in esame si traduce allora nella semplice applicazione diretta della formula di Jourawsky per la determinazione della tensione tangenziale media presente in una generica corda del profilo in esame nella direzione della linea media della sezione stessa.

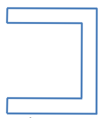
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

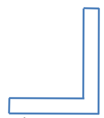
# Profili aperti in parete sottile

profili aperti in parete sottile


sezione a "T"

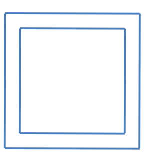

sezione a "doppio T"

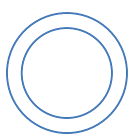

sezione a "C"


sezione ad "L"

Analizzeremo inizialmente i <u>profili aperti a parete sottile</u>. Il metodo di analisi per questi tipi di profili sarà descritto operativamente con riferimento ad una sezione trasversale specifica, ed in particolare per una sezione a "T". La procedura descritta di seguito può essere applicata all'analisi di sezioni a parete sottile aventi altre forme.

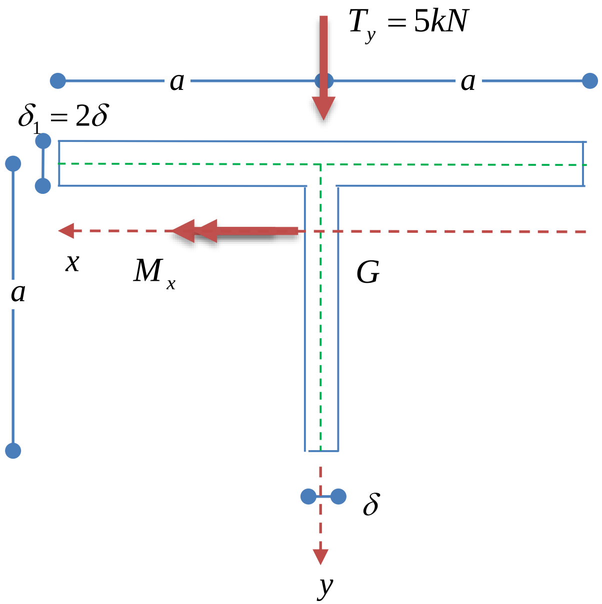
profili chiusi in parete sottile


sezione scatolare


sezione tubolare

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"




$\delta = 2mm$

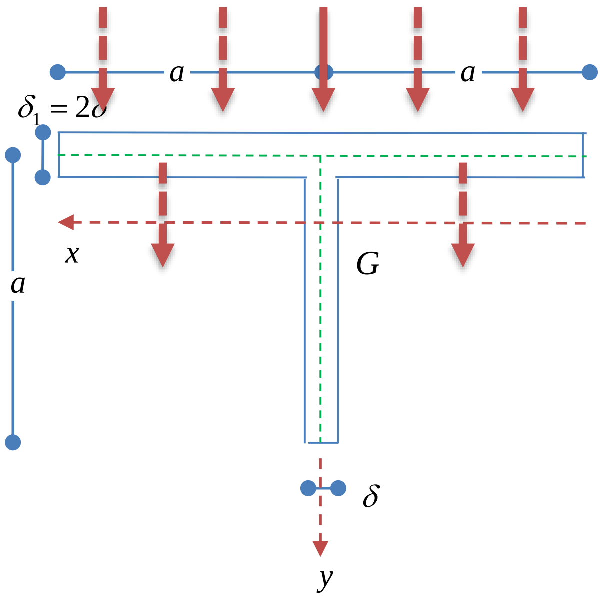
$a = 30\ mm$

Consideriamo una trave avente una sezione trasversale a “T”, caricata da una sollecitazione tagliante parallela al suo asse di simmetria come indicato in figura.

Per quanto si è detto, a tale sollecitazione tagliante è associata anche una sollecitazione flessionale (retta per il caso in esame), i cui effetti, che non sono considerati in questa sede, possono essere valutati applicando la formula di Navier (28).

Gli assi del sistema di riferimento indicati in figura sono assi principali d’inerzia per la sezione in esame: l’asse $y$ è asse di simmetria e quindi sicuramente è asse principale d’inerzia, e l’asse $x$ è baricentrico ed ortogonale ad un asse principale e quindi anch’esso principale d’inerzia.

# Osservazione



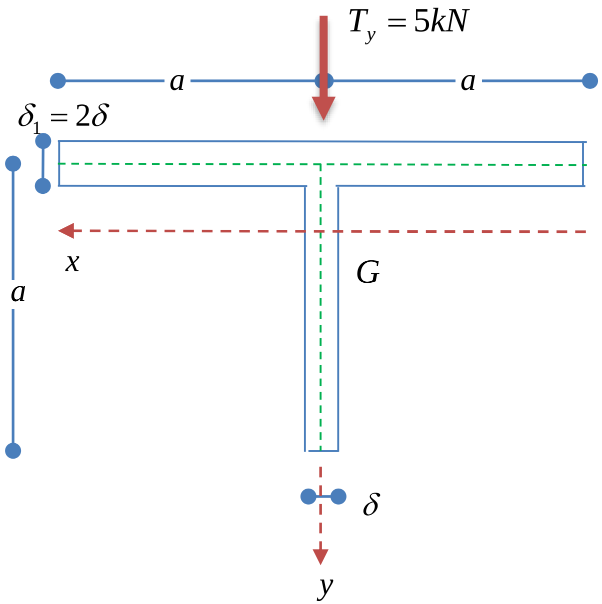

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

Si osservi che, per motivi operativi, abbiamo indicato $T_y$ come diretta secondo un asse passante per il baricentro. In generale però, stiamo semplicemente supponendo che la sua direzione sia parallela all'asse principale $y$ e quindi ognuna delle forze indicate in figura (ed una qualunque azione tagliante ad esse parallela) è ammissibile per quanto verrà descritto nella presente lezione. Anticipiamo però che, se la forza tagliante non passa per il *centro di taglio* della sezione, essa produce anche sollecitazioni torsionali.

In definitiva allora, per l'azione tagliante in esame non è stato specificato né il punto di applicazione, né la direzione esatta, ma solo che essa sia parallela all'asse $y$.

# La sezione a "T"

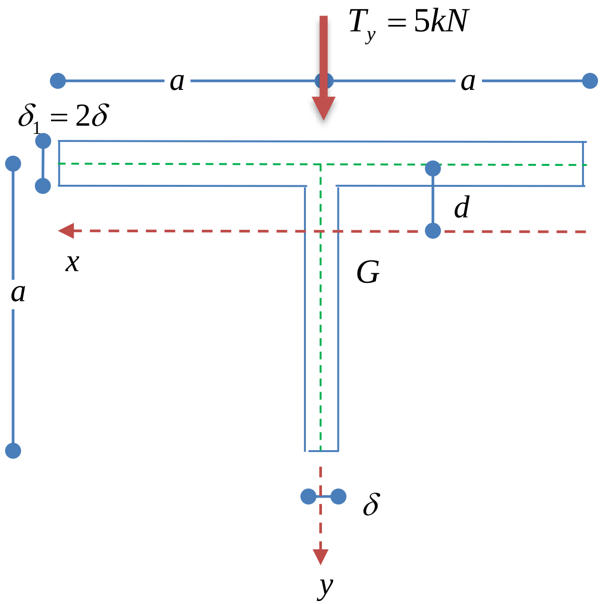



$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

La prima cosa da fare, per poter applicare le relazioni determinate nella precedente lezione, è calcolare il baricentro della sezione (al fine di poter posizionare gli assi del sistema di riferimento). Visto che l'asse $y$ è asse di simmetria, esso conterrà il baricentro.

# La sezione a "T"




La prima cosa da fare, per poter applicare le relazioni determinate nella precedente lezione, è calcolare il baricentro della sezione (al fine di poter posizionare gli assi del sistema di riferimento). Visto che l'asse $y$ è asse di simmetria, esso conterrà il baricentro. La distanza $d$ tra il baricentro e la linea media dell'ala della sezione in esame si può calcolare come segue: indicando con $A$ l'area della sezione in esame e con $S_t$ il momento statico di tutta la sezione rispetto alla retta $t$-$t$, passante per la linea media dell'ala si ha

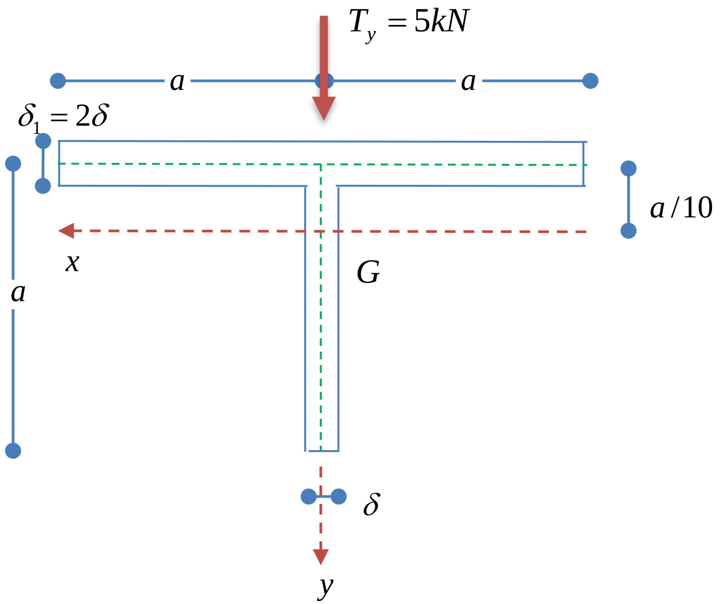
$$S_t = A \cdot d = \frac{\delta \cdot a^2}{2} \rightarrow d = \frac{\delta \cdot a^2}{2A} = \frac{a}{10}$$

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

# La sezione a "T"

Vogliamo adesso determinare le tensioni tangenziali medie presenti in una generica corda ortogonale alla linea media della sezione.

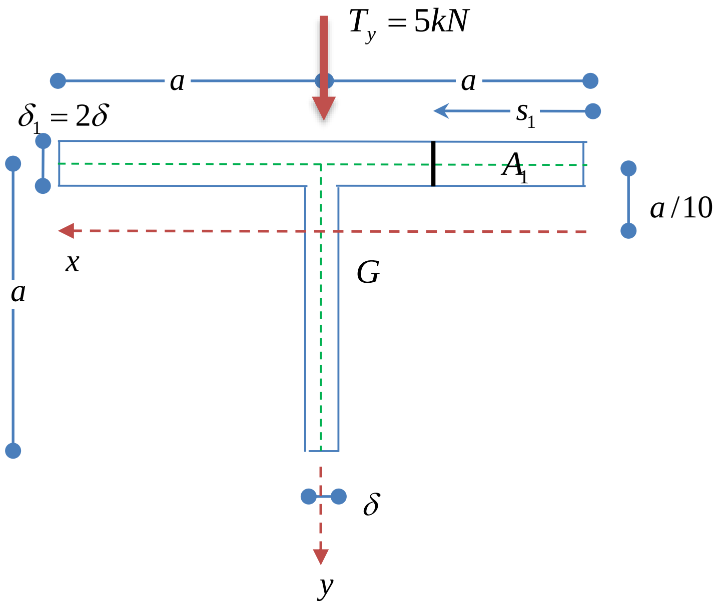



$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"




$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

Consideriamo inizialmente una corda generica nella parte destra dell'ala della sezione. Al fine di poterla identificare univocamente si introduce una ascissa intrinseca $s_1$ come indicato in figura. Essa può avere i seguenti valori (si trascura lo spessore $\delta$ rispetto ad *a*)

$$0 \le s_1 \le a$$

Le tensioni tangenziali medie su tale corda si calcolano attraverso la (96) come segue

$$\bar{\tau}_{zs} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \qquad (2)$$

dove $T_y = 5kN$

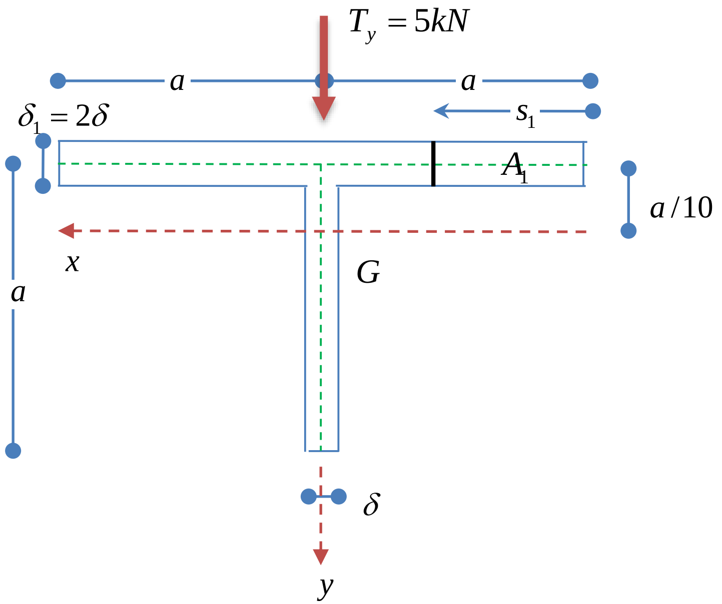
$b = 2\delta = 4\ mm$

*trascurabile*

$$I_x = \frac{1}{12}\delta a^3 + \delta a\left(\frac{2}{5}a\right)^2 + \frac{1}{12}2a(2\delta)^3 + 2a\,2\delta\left(\frac{a}{10}\right)^2 \cong$$

$$\cong \frac{17}{60}\delta a^3 = 15300\,mm^4$$

# Osservazione




$\delta = 2mm$

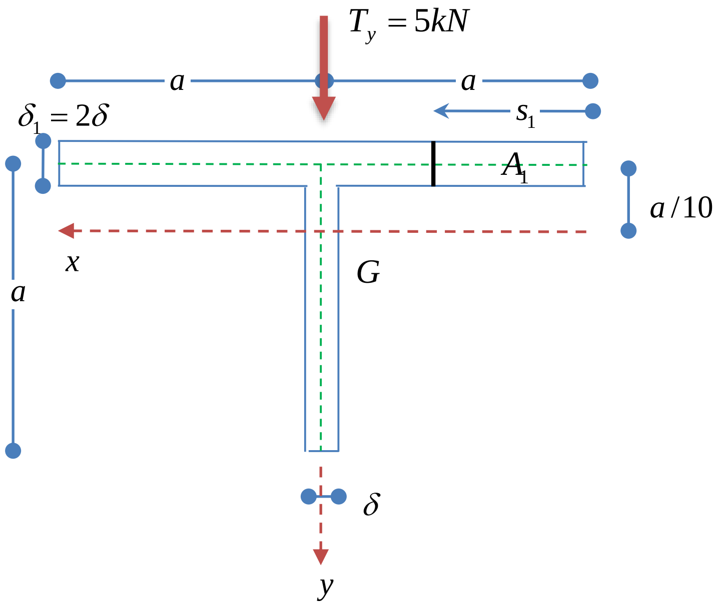
$a = 30\ mm$

Nel calcolo del momento d'inerzia effettuato nella precedente slide è stato trascurato il termine in $\delta^3$ in quanto, per definizione, nelle sezioni in parete sottile lo spessore è molto più piccolo delle altre dimensioni.

In generale, allora, per le sezioni in parete sottile i termini cubici nello spessore possono essere trascurati senza che si facciano errori significativi.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"




$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

I precedenti valori non dipendono dalla posizione della corda sul tratto in esame, mentre il momento statico della porzione di sezione che precede la corda rispetto all'asse $x$ varia linearmente come segue:

$$S_x^{(A_1)} = \delta_1 s_1 \left(-\frac{a}{10}\right) = -\frac{\delta a}{5} s_1$$

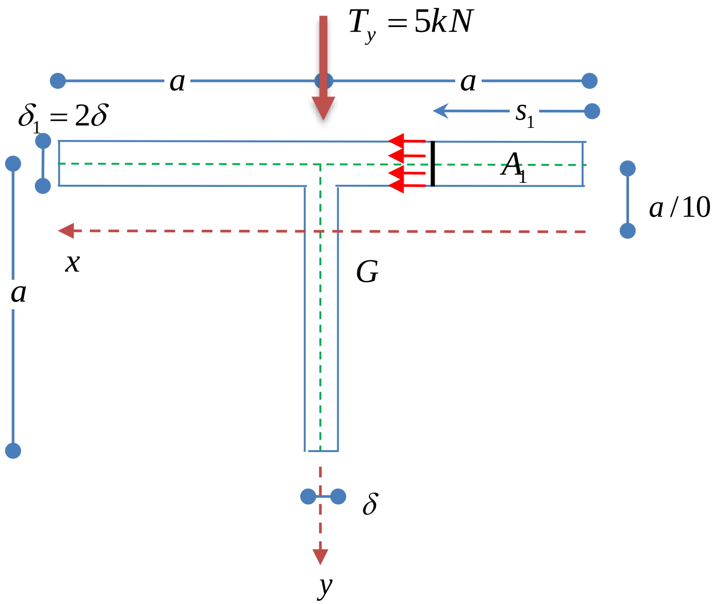
Sostituendo i dati così determinati nella (101) si ottiene la seguente espressione delle tensioni tangenziali medie

$$\bar{\tau}_{zs} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{bI_x} = \frac{6T_y}{17\delta a^2} s_1 = 0.9804\, s_1 \qquad (102)$$

che definisce un *<u>andamento lineare</u>* rispetto l'ascissa $s_1$.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"




$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

I precedenti valori non dipendono dalla posizione della corda sul tratto in esame, mentre il momento statico della porzione di sezione che precede la corda rispetto all'asse $x$ varia linearmente come segue:

$$S_x^{(A_1)} = \delta_1 s_1 \left(-\frac{a}{10}\right) = -\frac{\delta a}{5} s_1$$

Sostituendo i dati così determinati nella (101) si ottiene la seguente espressione delle tensioni tangenziali medie

$$\bar{\tau}_{zs} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} = \frac{6T_y}{17\delta a^2} s_1 = 0.9804[\frac{N}{mm^3}] s_1 \tag{102}$$

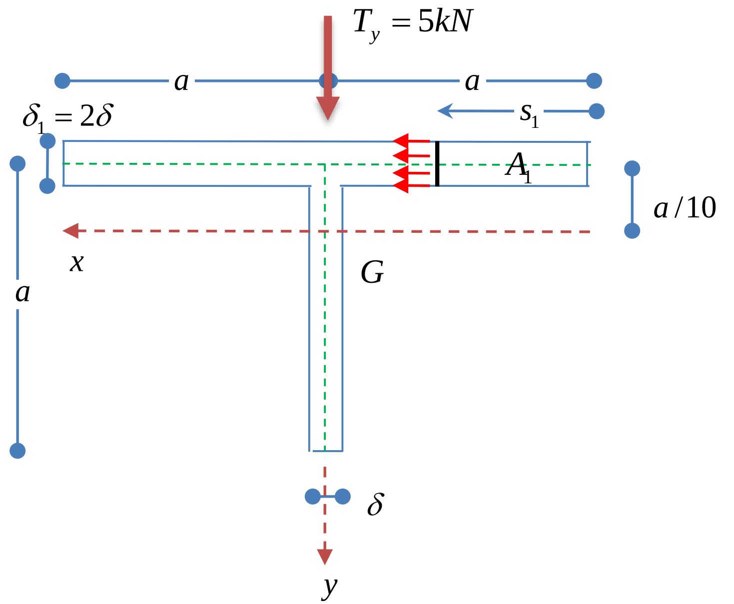
che definisce un *andamento lineare* rispetto l'ascissa $s_1$. Nel dominio di validità della (102), le tensioni tangenziali medie hanno segno positivo e sono quindi "uscenti" dalla sezione $A_1$.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$




Si osservi che nella (102) il coefficiente *0.9804* è espresso in $N/mm^3$ e quindi, esprimendo $s_1$ in millimetri si ottengono valori della tensione in MPa.

$$\bar{\tau}_{zs}(s_1) = 0.9804\, s_1$$

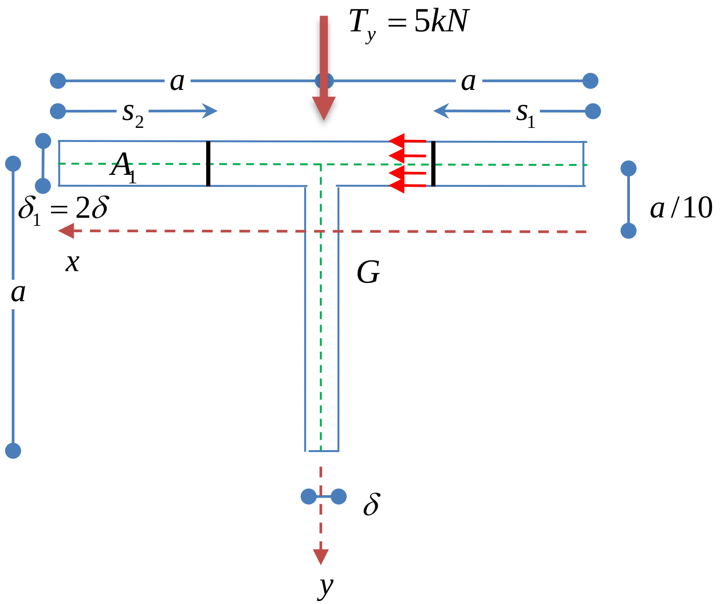
$$0 \le s_1 \le a$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$




$\bar{\tau}_{zs}(s_1) = 0.9804\, s_1$

$0 \leq s_1 \leq a$

Consideriamo adesso una generica corda ortogonale alla linea media della sezione ed appartenente alla parte sinistra dell'ala della sezione, individuata dall'ascissa $s_2$, il cui valore è compreso all'interno del seguente intervallo

$$0 \leq s_2 \leq a$$

Le tensioni tangenziali medie su tale corda si calcola ancora attraverso la (96) come segue:

$$T_y = 5kN$$

$$b = 2\delta = 4\ mm$$

$$I_x = \frac{17}{60}\delta a^3 = 15300\, mm^4$$

$$S_x^{(A_1)} = \delta_1 s_2 \left(-\frac{a}{10}\right) = -\frac{\delta a}{5} s_2$$

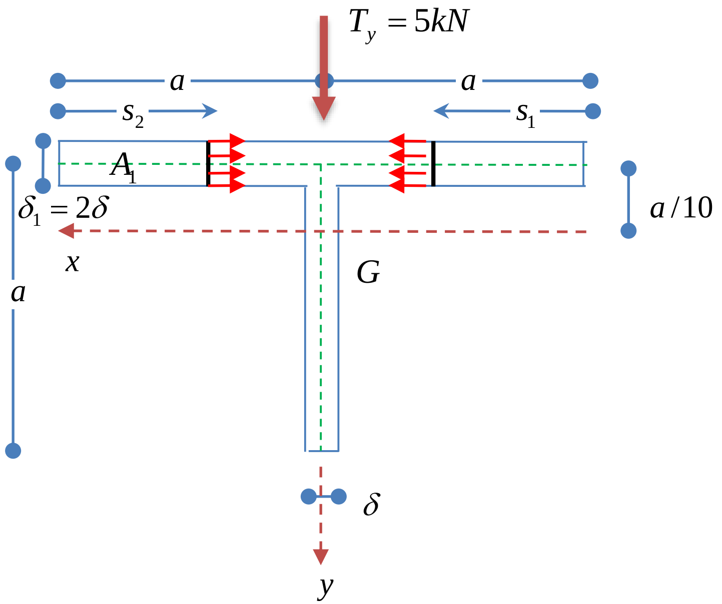
$$\bar{\tau}_{zs} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} = \frac{6T_y}{17\delta a^2} s_2 = 0.9804[N/mm^3] s_2 \qquad (103)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$




$\bar{\tau}_{zs}(s_2) = 0.9804\, s_2$ $\qquad$ $\bar{\tau}_{zs}(s_1) = 0.9804\, s_1$

$0 \le s_2 \le a$ $\qquad$ $0 \le s_1 \le a$

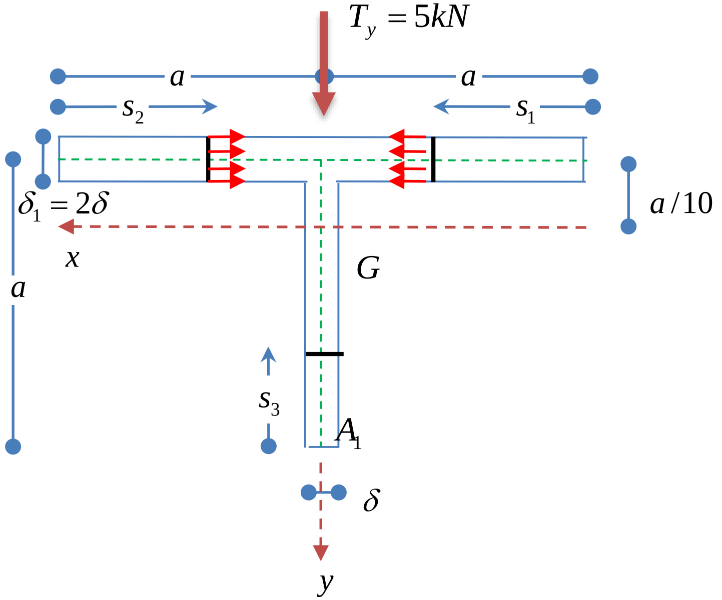
Le tensioni tangenziali medie calcolate sulle corde di tale tratto sono ancora lineari e positive e quindi "uscenti" dalla sezione $A_1$ per la quale è stato calcolato il momento statico.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$




$\bar{\tau}_{zs}(s_2) = 0.9804\, s_2$

$0 \le s_2 \le a$

$\bar{\tau}_{zs}(s_1) = 0.9804\, s_1$

$0 \le s_1 \le a$

Consideriamo adesso una generica corda ortogonale alla linea media della sezione ed appartenente all'anima, individuata dall'ascissa $s_3$, il cui valore è ancora compreso all'interno del seguente intervallo

$$0 \le s_3 \le a$$

In questo caso la (96) si particolarizza come segue

$$T_y = 5kN$$

$$b = \delta = 2\ mm$$

$$I_x = \frac{17}{60}\delta\, a^3 = 15300\, mm^4$$

$$S_x^{(A_1)} = \delta\, s_3\left(\frac{9}{10}a - \frac{s_3}{2}\right) = \frac{\delta}{5}\left(\frac{9}{2}a - s_3\right)s_3$$

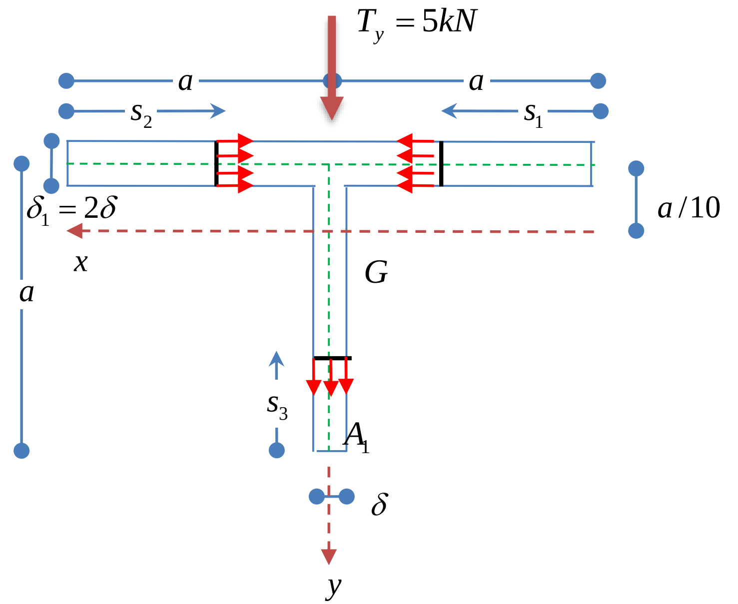
$$\bar{\tau}_{zs} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} = -\frac{6T_y(9a - 5s_3)s_3}{17a^3\delta} = -0.3268(27 - 0.5\, s_3)s_3 \quad (104)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$




$$\bar{\tau}_{zs}(s_2) = 0.9804\, s_2 \qquad \bar{\tau}_{zs}(s_1) = 0.9804\, s_1$$

$$0 \le s_2 \le a \qquad 0 \le s_1 \le a$$

$$\bar{\tau}_{zs} = -0.3268(27 - 0.5\, s_3)s_3$$

$$0 \le s_3 \le a$$

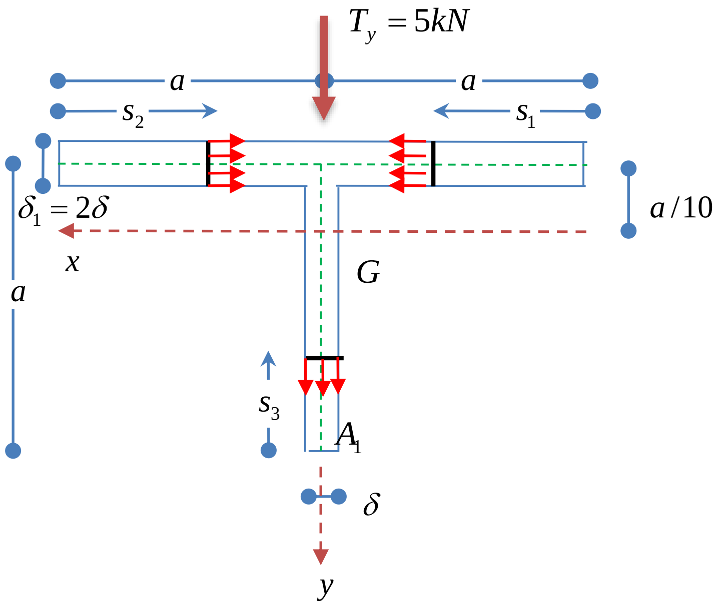
Nel suo dominio di definizione, la (104) è sempre negativa e quindi le tensioni tangenziali sono “entranti” nella corda in esame. Il loro andamento è parabolico con $s_3$ e presentano un massimo in corrispondenza dell’asse neutro.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# La sezione a "T"

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$



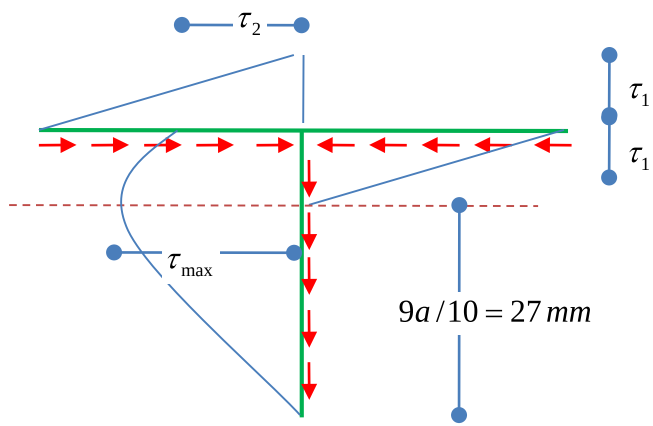

$$\bar{\tau}_{zs}(s_2) = 0.9804\, s_2 \qquad \bar{\tau}_{zs}(s_1) = 0.9804\, s_1$$

$$0 \le s_2 \le a \qquad 0 \le s_1 \le a$$

$$\bar{\tau}_{zs} = -0.3268(27 - 0.5\, s_3)s_3$$

$$0 \le s_3 \le a$$

Le leggi delle tensioni tangenziali così determinate possono essere diagrammate sulla linea media della sezione come segue




I valori assoluti delle tensioni tangenziali (significative) indicate nella precedente figura sono pari a

$$\tau_1 = 0.9804 \cdot 30 = 29.41 MPa$$

$$\tau_2 = 0.3268(27 - 0.5 \cdot 30) \cdot 30 = 117.65 MPa$$

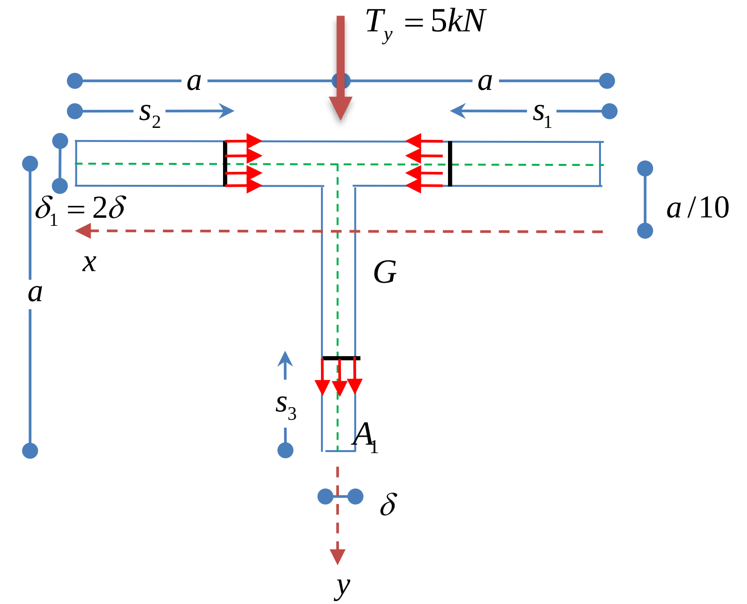
$$\tau_{max} = 0.3268(27 - 0.5 \cdot 27) \cdot 27 = 119.12 MPa$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# Osservazione

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$



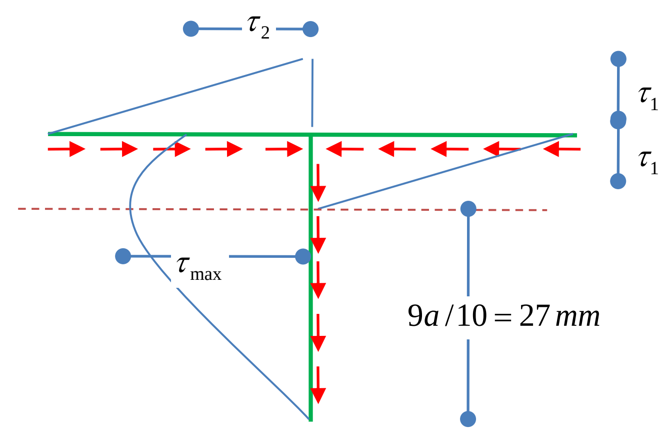

$$\bar{\tau}_{zs}(s_2) = 0.9804\, s_2 \qquad \bar{\tau}_{zs}(s_1) = 0.9804\, s_1$$

$$0 \le s_2 \le a \qquad 0 \le s_1 \le a$$

$$\bar{\tau}_{zs} = -0.3268(27 - 0.5\, s_3)s_3$$

$$0 \le s_3 \le a$$

È facile verificare (anche operativamente) che, per sezioni sottili formate da elementi rettangolari, nelle parti parallele all'asse neutro l'andamento delle tensioni tangenziali è sempre lineare.

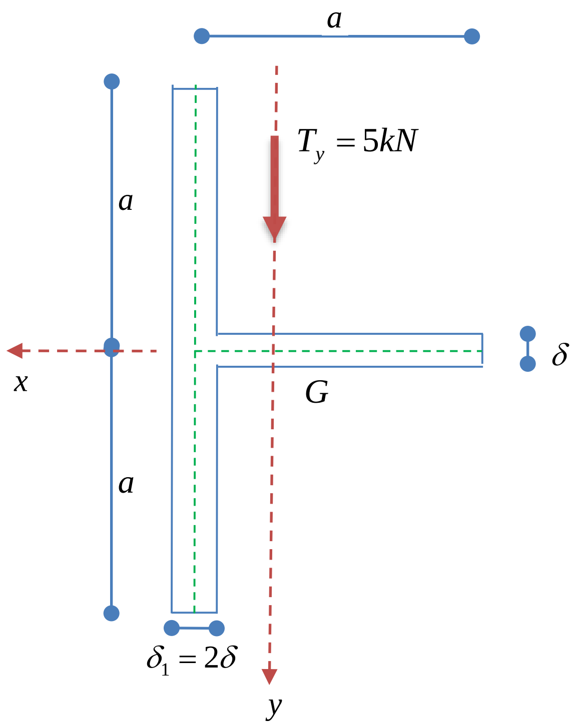



Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# Aste sollecitate da taglio (e momento)

Profili aperti in parete sottile: esercizi proposti

# Profili a "T"



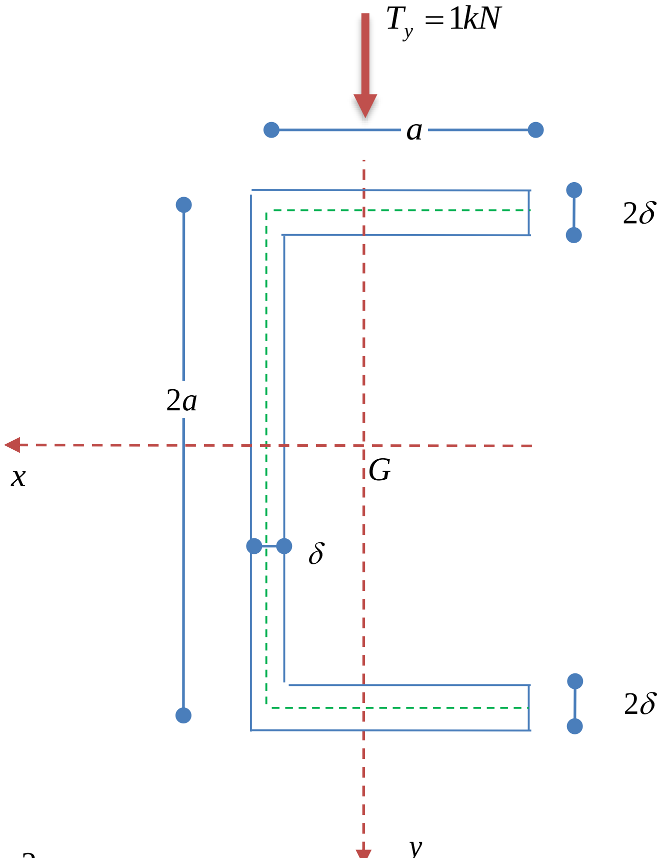

Si calcoli e si diagrammi il valore delle tensioni tangenziali medie per la sezione indicata in figura.

$\delta = 2mm$

$a = 30\ mm$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# Profili a "C"




$\delta = 2mm$

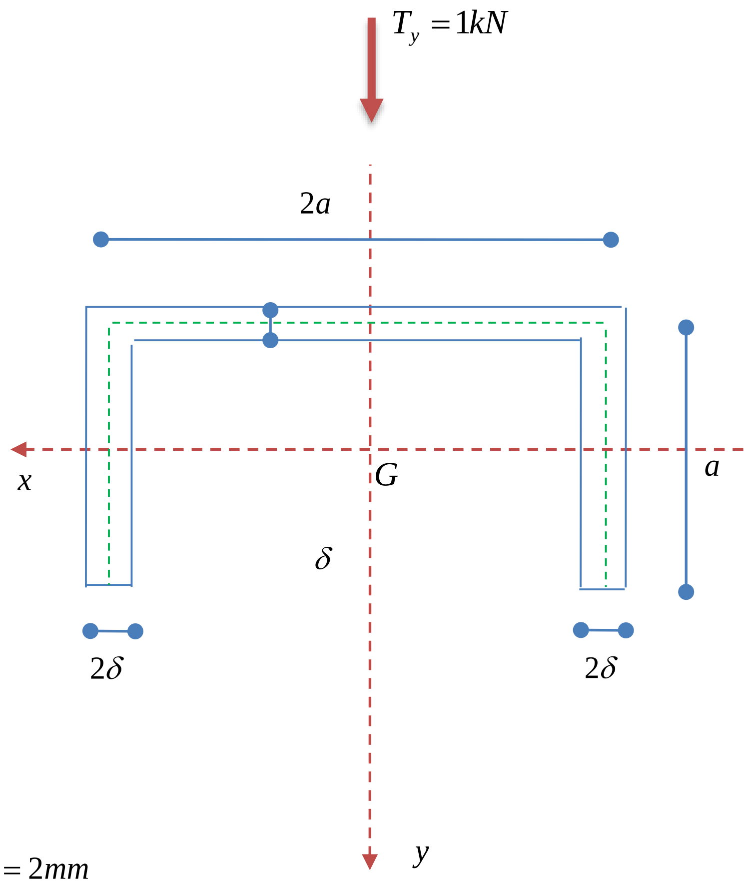
$a = 50\ mm$

Si calcoli e si diagrammi il valore delle tensioni tangenziali medie per la sezione indicata in figura.

Per il procedimento risolutivo l'allievo può consultare il libro di testo (Comi-Corradi, Introduzione alla meccanica strutturale) a pag. 165.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

# Profili a "C"




$\delta = 2mm$

$a = 50\ mm$

Si calcoli e si diagrammi il valore delle tensioni tangenziali medie per la sezione indicata in figura.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831