

Aste sollecitate da taglio (e momento)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



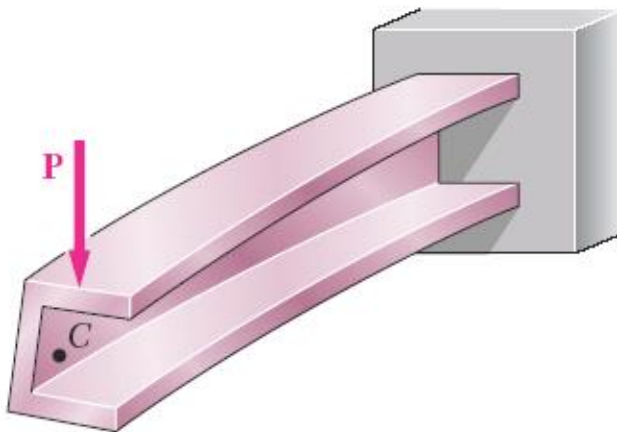
Il centro di taglio



Sommario

È stato analizzato il caso di una trave in parete sottile aperta sollecitata da una azione tagliante; in particolare è stato mostrato come applicare la formula di Jourawsky a questa tipologia di sezione. Il procedimento operativo è stato descritto attraverso una applicazione pratica ad una sezione a "T".

Si osservi che finora abbiamo sempre parlato di direzione dell'azione tagliante senza mai specificare il suo effettivo punto di applicazione o la sua effettiva direzione. In ogni caso però, com'è intuitivo, il punto di applicazione di detta azione tagliante è importante in quanto una sua "eccentricità" (rispetto ad un punto particolare che sarà descritto nella presente lezione, detto centro di taglio) induce azioni torsionali.





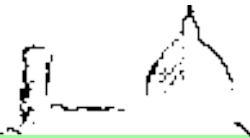
Sommario

Di seguito verrà mostrato come determinare il centro di taglio di una generica sezione aperta a parete sottile. Si vedrà che il centro di taglio è una proprietà della sezione (come lo è ad esempio il baricentro, anche se in generale il centro di taglio può non coincidere con esso se non per casi particolari ad esempio di sezioni doppiamente simmetriche) e non dipende quindi dalla particolare azione tagliante agente.

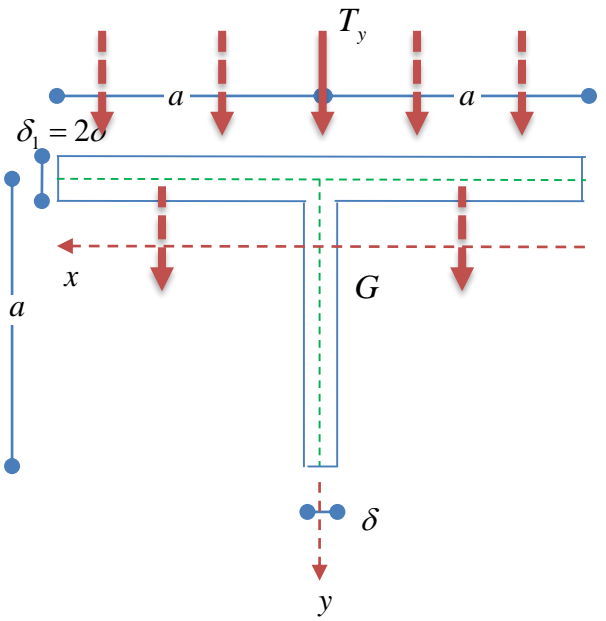
Come si vedrà di seguito, il centro di taglio di una sezione ha la seguente proprietà: se la direzione di una azione tagliante passa per il centro di taglio della sezione su cui essa è applicata, allora "non si hanno" effetti torsionali. Si vedrà che esistono tre diverse definizioni del centro di taglio.

Viceversa, se una azione tagliante non passa per il centro di taglio della sezione su cui agisce, allora oltre alle tensioni tangenziali da taglio (che si calcolano attraverso la formula di Jourawsky) essa produce anche sollecitazioni torsionali.

Ancora una volta, l'argomento della presente lezione sarà descritto in maniera "operativa" analizzando una sezione a profilo aperto e parete sottile. La procedura descritta di seguito può essere applicata anche a sezioni a parete sottile di altre forme.

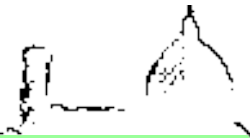


La sezione "T": taglio parallelo all'asse di simmetria

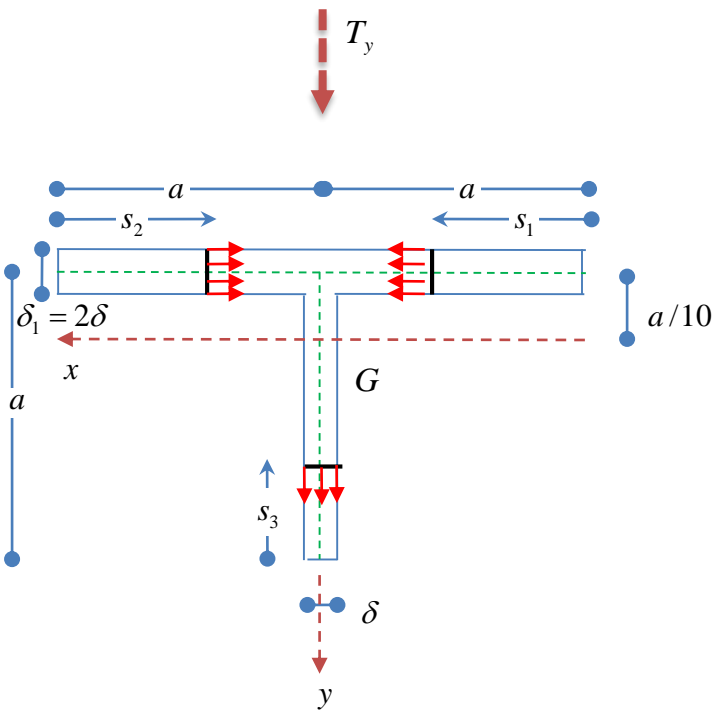


È stata precedentemente considerata la sezione a "T" riportata in figura, caricata da una azione tagliante parallela all'asse di simmetria della sezione stessa. Abbiamo osservato che per l'azione tagliante agente non è stato specificato né il punto di applicazione né la direzione esatta: a una qualunque delle azioni indicate in figura corrisponde una flessione retta e quindi per ognuna di esse è applicabile la procedura descritta.

Di seguito risponderemo alla seguente domanda: tra tutte le infinite azioni taglianti (parallele all'asse principale in esame), quali producono solo tensioni tangenziali da taglio? E quindi, viceversa, quali **NON PRODUCONO** (in media) effetti torcenti?



La sezione a "T": taglio parallelo all'asse di simmetria



Si è visto che le tensioni tangenziali presenti nelle corde della sezione in esame possono essere determinate attraverso le seguenti leggi:

- parte destra dell'ala

$$\bar{\tau}_{zs}(s_1) = \frac{6T_y}{17\delta a^2} s_1 \quad 0 \leq s_1 \leq a$$

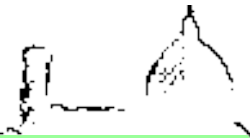
- parte sinistra dell'ala

$$\bar{\tau}_{zs}(s_2) = \frac{6T_y}{17\delta a^2} s_2 \quad 0 \leq s_2 \leq a$$

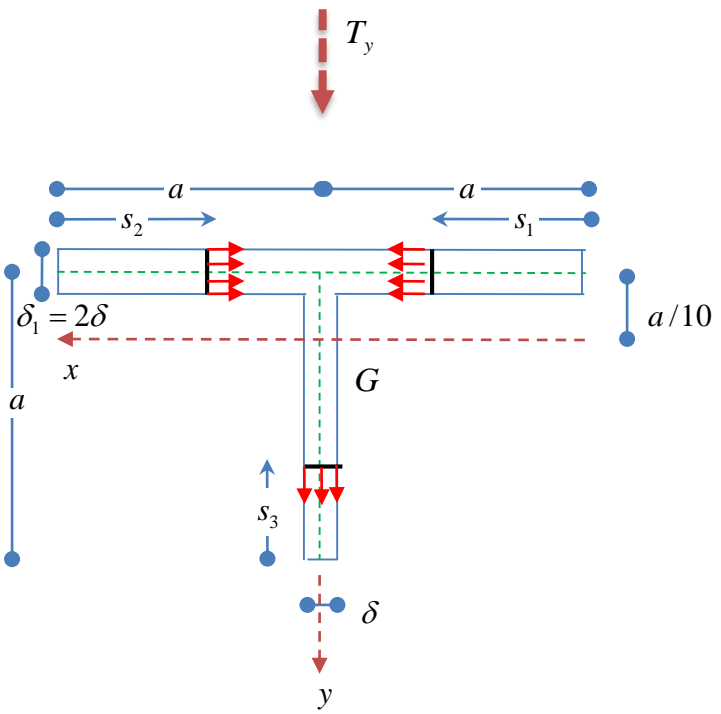
- anima

$$\bar{\tau}_{zs}(s_3) = -\frac{6T_y(9a - 5s_3)s_3}{17a^3\delta} \quad 0 \leq s_3 \leq a$$

(105)

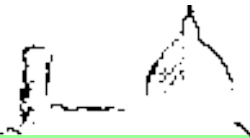


La sezione a "T": taglio parallelo all'asse di simmetria

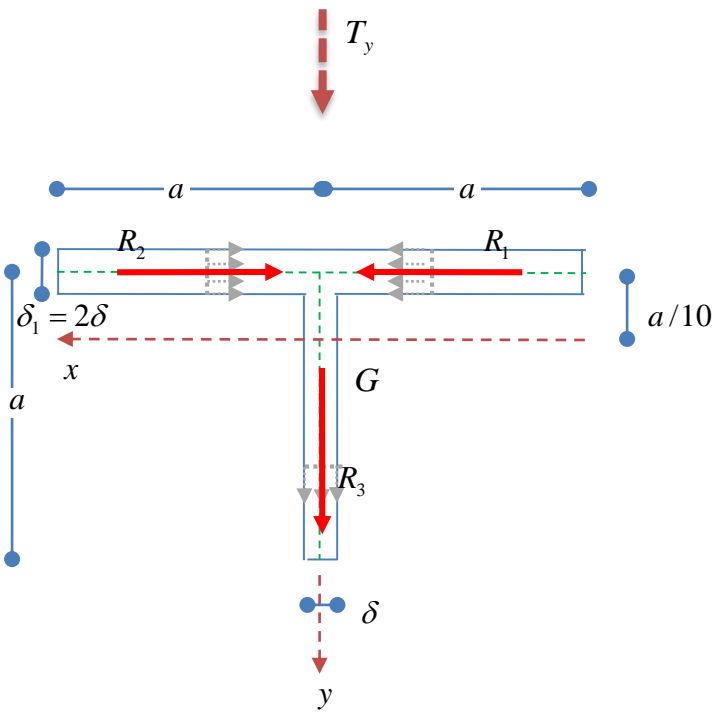


Tali tensioni sono ovviamente equivalenti all'azione che le ha provocate (principio di azione e reazione): l'azione che produce le tensioni tangenziali (105) è allora equivalente alla risultante di tali tensioni.

D'altronde, nelle (105) abbiamo considerato SOLO GLI EFFETTI (valutati in termini di tensioni) DI UNA SOLLECITAZIONE TAGLIANTE (non è stato considerato nessun contributo torsionale) e quindi possiamo dire che la risultante delle tensioni tangenziali (105) è una azione tagliante che **PRODUCE EFFETTI TORSIONALI NULLI**, ossia è l'azione tagliante che stiamo cercando.



La sezione a "T": taglio parallelo all'asse di simmetria



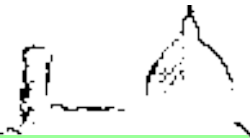
Indichiamo con R_1 , R_2 ed R_3 i moduli delle risultanti delle tensioni tangenziali (105) agenti rispettivamente nella parte destra e sinistra dell'ala e nell'anima della sezione in esame. Il loro valore si calcola come segue:

$$R_1 = \int_0^a \bar{\tau}_{zs}(s_1) \delta_1 ds_1 = \frac{6}{17} T_y$$

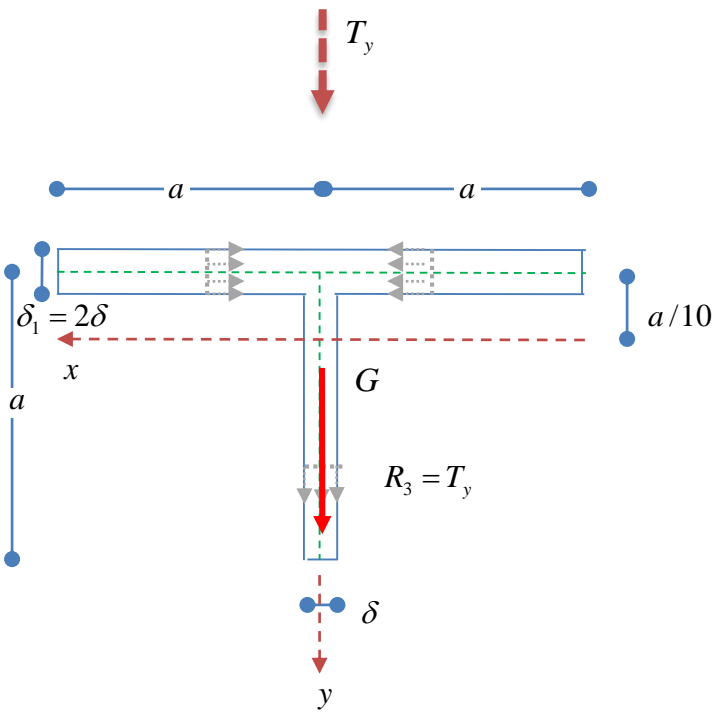
$$R_2 = \int_0^a \bar{\tau}_{zs}(s_2) \delta_1 ds_2 = \frac{6}{17} T_y = R_1$$

$$R_3 = \int_0^a |\bar{\tau}_{zs}(s_3)| \delta ds_3 = T_y$$

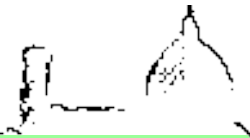
La loro retta d'azione coincide con la linea media dei tratti a cui corrispondono, come indicato in figura (non è necessario calcolarne il punto di applicazione esatto, ma solo la loro direzione).



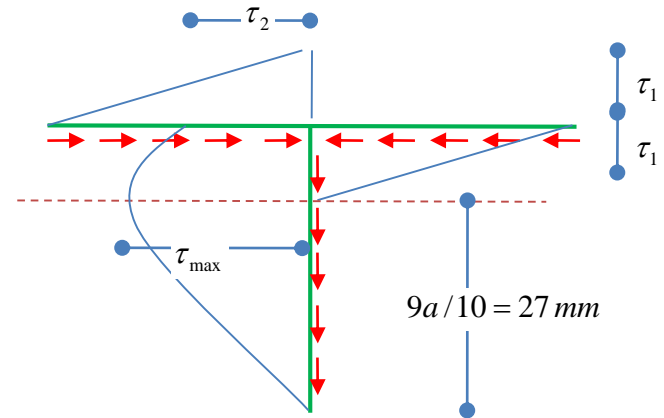
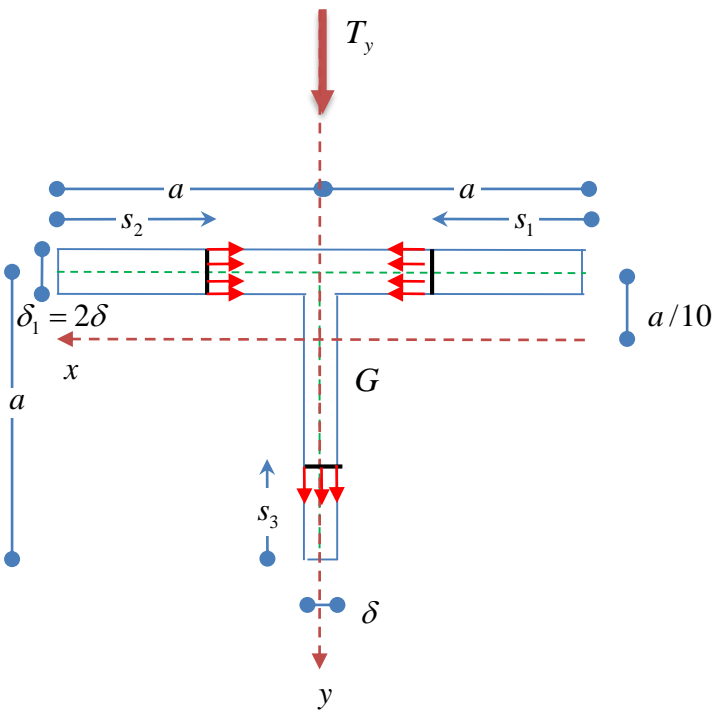
La sezione a "T": taglio parallelo all'asse di simmetria



Complessivamente allora, la risultante delle tensioni tangenziali è pari ad una forza di modulo pari alla sollecitazione esterna ed avente direzione coincidente con l'asse y . Tale forza è univocamente determinata per cui esiste una sola azione tagliante, tra tutte quelle parallela all'asse y , che induce nella sezione in esame solo tensioni tangenziali da taglio (che si calcolano con la formula di Jourawsky).



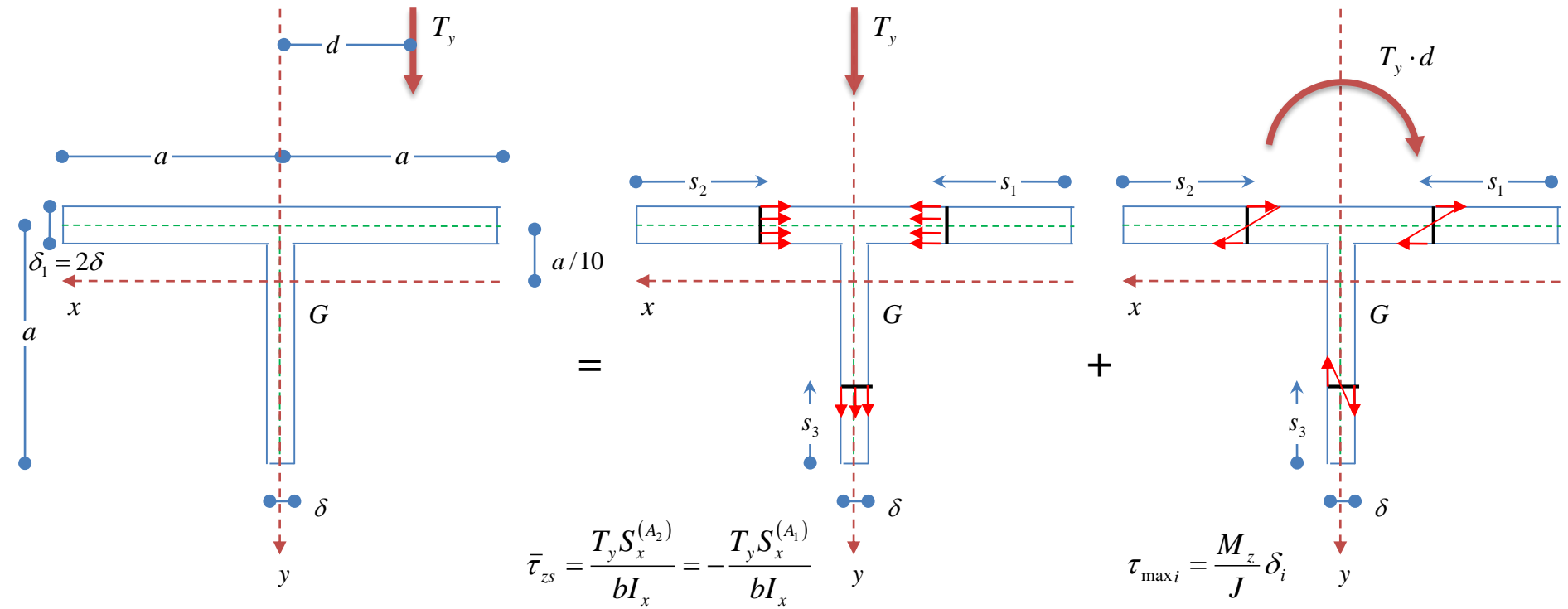
La sezione a "T": taglio parallelo all'asse di simmetria



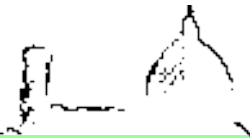
Per quanto abbiamo detto, allora, una forza diretta secondo l'asse y (e quindi non solo parallelo ad esso, ma avente tale asse come direzione) produce nella sezione in esame solo tensioni tangenziali da taglio ...



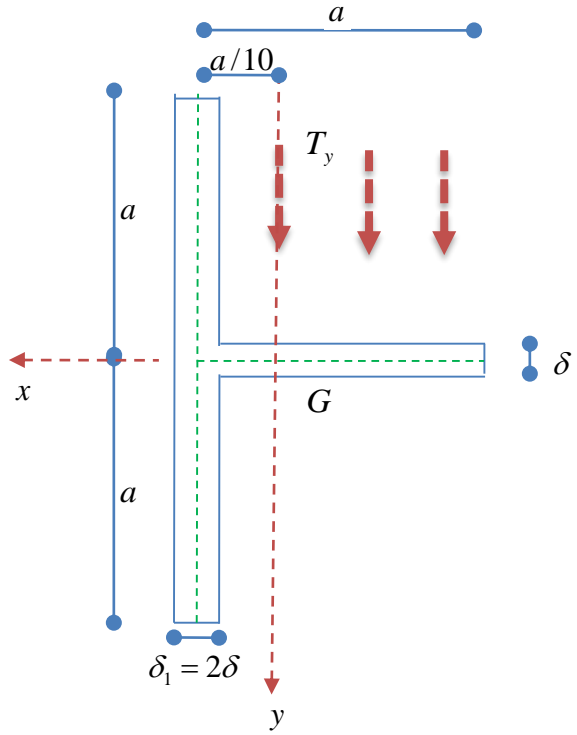
La sezione a "T": taglio parallelo all'asse di simmetria



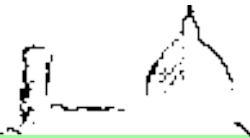
... mentre una forza parallela all'asse y , ma eccentrica come indicato in figura, per l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse z tra le azioni esterne e le azioni interne, produce anche un effetto torsionale analizzabile come descritto precedentemente.



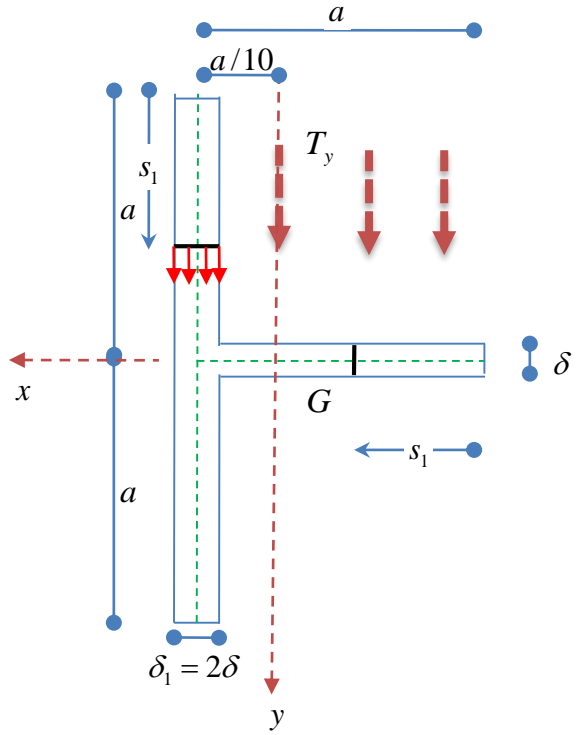
La sezione a "T": taglio parallelo al secondo asse principale



In maniera analoga può essere affrontato il problema della sezione a "T" in esame caricata da una azione tagliante parallela all'altro asse principale d'inerzia come indicato in figura. Fra le infinite sollecitazioni taglienti parallele a tale asse, vogliamo determinare quella (o quelle, se ne esistesse più di una) che non produce effetti torsionali.



La sezione a "T": taglio parallelo al secondo asse principale



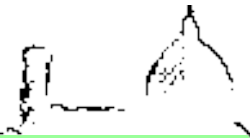
Le funzioni che definiscono l'andamento delle tensioni tangenziali medie presenti sulle corde della sezione sono le seguenti:

- ala

$$\bar{\tau}_{zs}(s_1) = \frac{3}{4} \frac{\left(a - \frac{s_1}{2}\right) s_1}{\delta a^3} T_y \quad 0 \leq s_1 \leq 2a$$

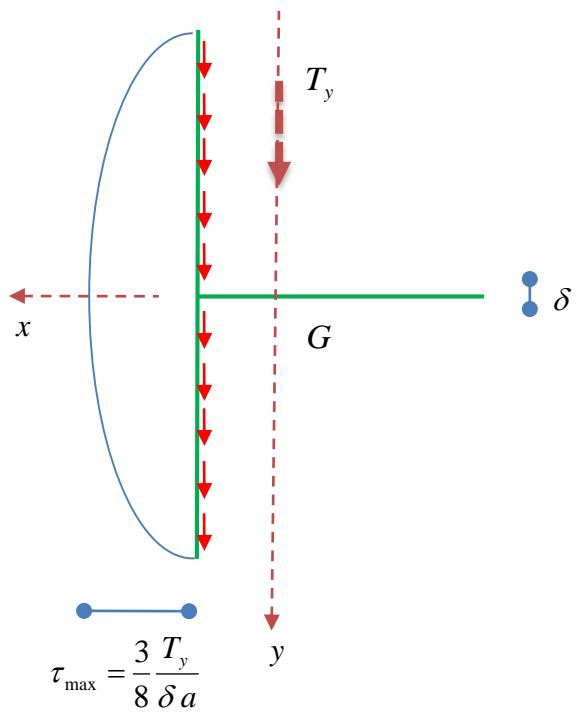
- anima

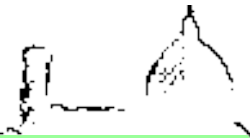
$$\bar{\tau}_{zs}(s_2) = 0 \quad 0 \leq s_2 \leq a$$



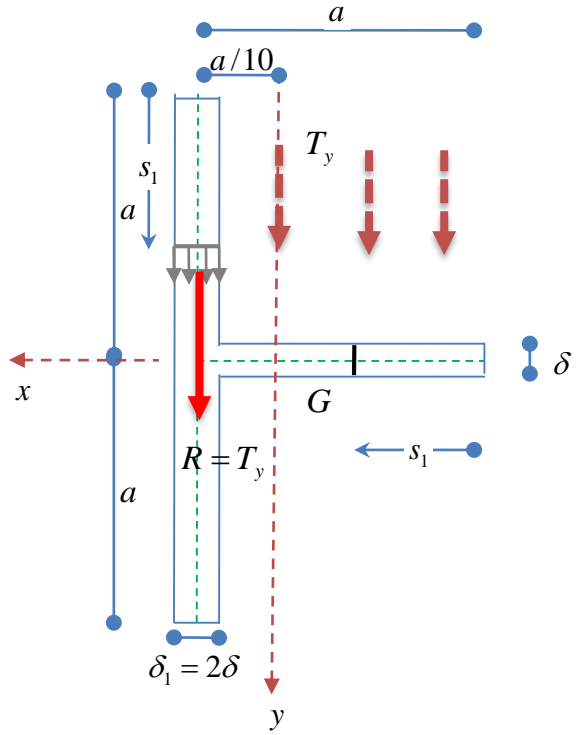
La sezione a "T": taglio parallelo al secondo asse principale

Tali tensioni sono diagrammate nella figura a fianco





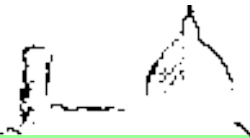
La sezione a "T": taglio parallelo al secondo asse principale



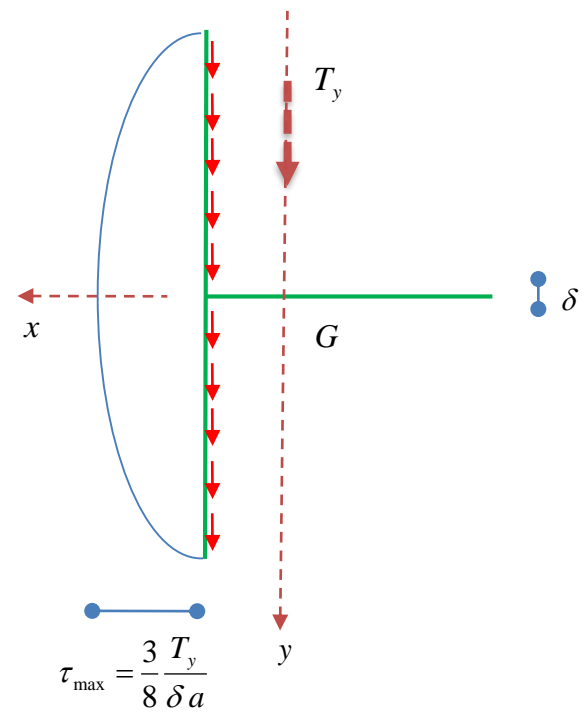
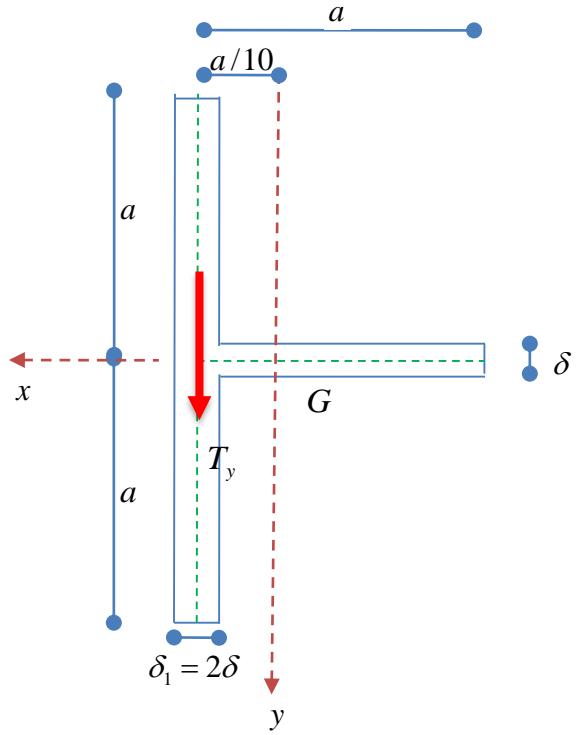
Il modulo della risultante delle tensioni tangenziali presenti sull'ala (e quindi su tutta la sezione, visto che l'anima è scarica) si calcola come segue

$$R = \int_0^{2a} \bar{\tau}_{zs}(s_1) \delta_1 ds_1 = T_y$$

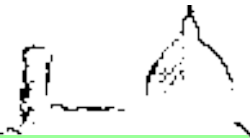
ed è quindi pari al modulo della sollecitazione tagliante esterna. La direzione di tale risultante coincide con la linea media dell'ala e quindi essa è univocamente determinata. Pertanto esiste una sola direzione per l'azione tagliante, tra tutte quelle parallela all'asse y , che induce nella sezione in esame solo tensioni tangenziali da taglio (che si calcolano con la formula di Jourawsky).



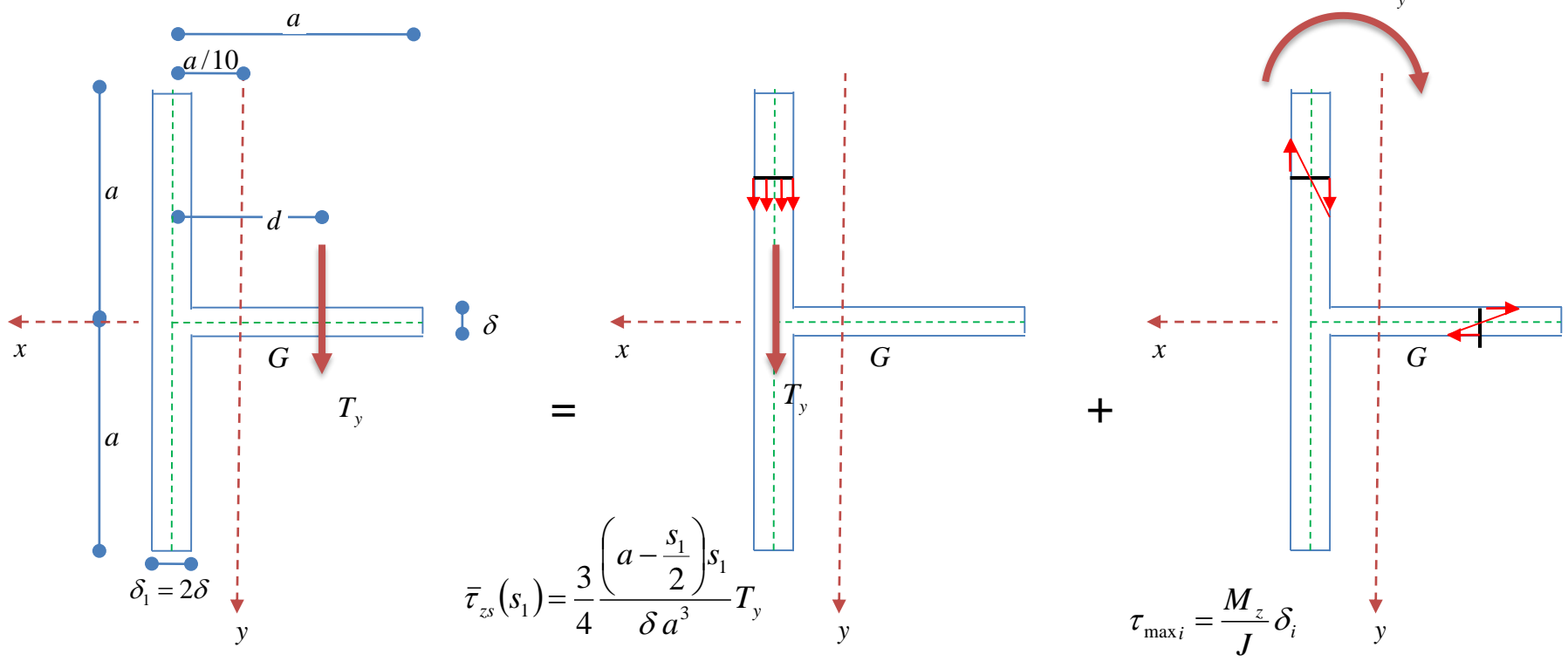
La sezione a "T": taglio parallelo al secondo asse principale



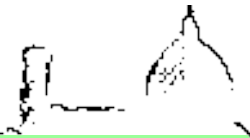
Ricapitolando, allora, una forza parallela all'asse y e diretta secondo la linea media dell'ala produce nella sezione in esame solo tensioni tangenziali da taglio ...



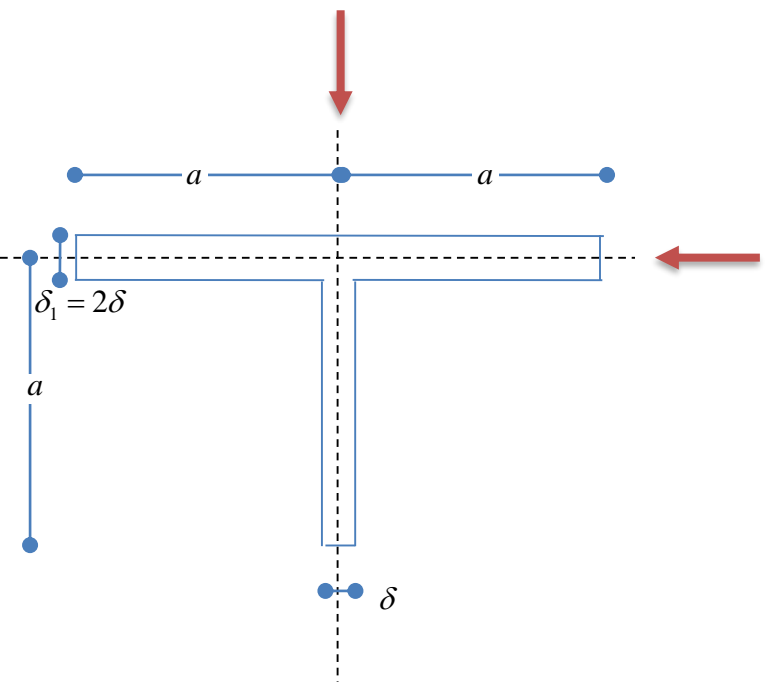
La sezione a "T": taglio parallelo al secondo asse principale



... mentre una forza parallela all'asse y , ma eccentrica come indicato in figura, per l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse z tra le azioni esterne e le azioni interne produce anche un effetto torsionale.



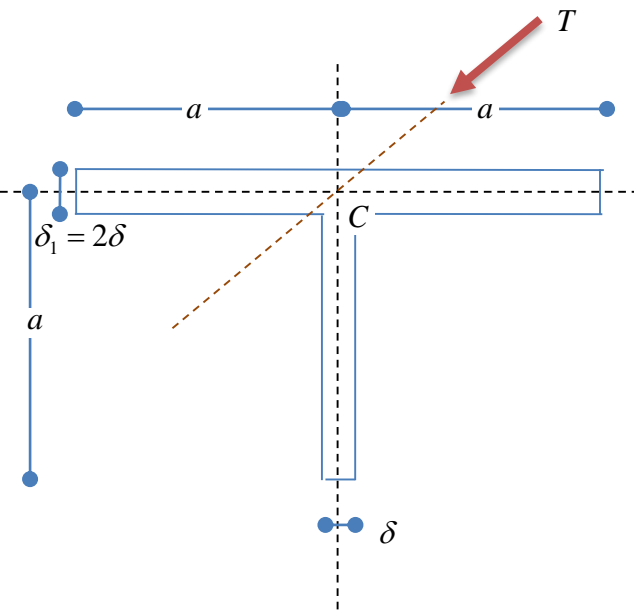
La sezione a "T": centro di taglio



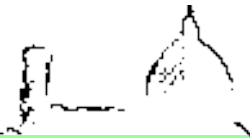
Per quanto è stato determinato, allora, se la sezione in esame è sollecitata da una azione tagliante diretta secondo uno degli assi indicati in figura, allora in tale sezione non sono presenti effetti torsionali e le tensioni tangenziali sono solo quelle calcolabili con la formula di Jourawsky.



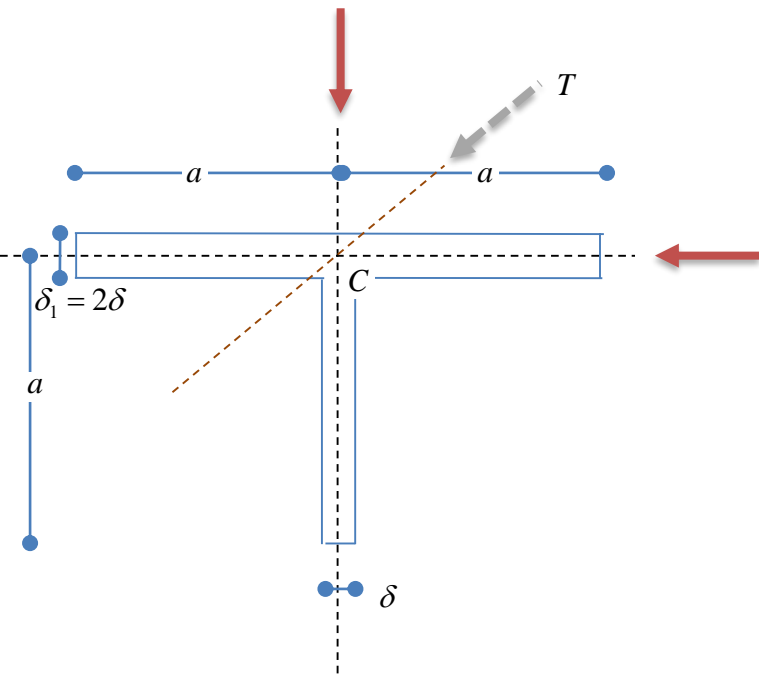
La sezione a "T": centro di taglio



Consideriamo adesso che la sezione in esame sia caricata da una azione tagliante comunque inclinata, ma la cui direzione passa per il punto C di intersezione degli assi precedentemente determinati.



La sezione a "T": centro di taglio



Per il principio di sovrapposizione degli effetti, tale forza può essere decomposta come indicato in figura. Per quanto abbiamo detto in precedenza, ognuna delle due componenti produce solo tensioni tangenziali da taglio; pertanto, se la sezione è caricata da una azione tagliante passante per il punto *C* (detto *centro di taglio*) di intersezione degli assi determinati come indicato precedentemente, allora essa produce solo tensioni tangenziali da taglio.

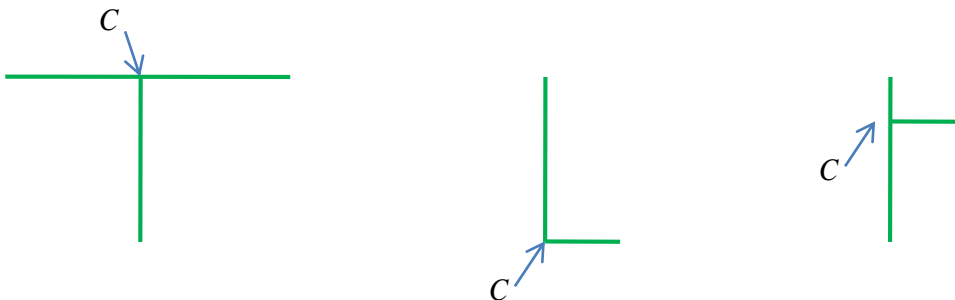
Data allora una generica sezione, si definisce centro di taglio quel particolare punto che ha la seguente proprietà: se la sezione in esame è sollecitata da una azione tagliante passante per esso, allora in tale sezione le tensioni tangenziali da torsione sono nulle. Si dimostra che tale punto esiste sempre ed è unico: esso è indipendente dalla particolare azione tagliante presente nella sezione, ma dipende solo dalla sua forma e dimensione.



Proprietà del centro di taglio

Si dimostra che per il centro di taglio valgono le seguenti proprietà:

1. se una sezione è dotata di un asse di simmetria, allora il centro di taglio appartiene a tale asse; ovviamente, allora, se una sezione è dotata di due assi di simmetria, il centro di taglio si trova in corrispondenza della loro intersezione (e coincide, quindi, con il baricentro)
2. se una sezione a parete sottile è costituita "dall'assemblaggio" di elementi rettangolari e se le linee medie di tali elementi si intersecano tutte in uno stesso punto, allora il centro di taglio coincide con tale punto





Procedura per la determinazione del centro di taglio

Data una generica sezione a parete sottile, per la determinazione del centro di taglio può essere utilizzata la seguente procedura:

1. si determinano le direzioni principali della sezione in esame;
2. si calcola la direzione della risultante delle tensioni tangenziali da taglio presenti nella sezione in esame, corrispondenti ad una azione tagliante parallela ad un asse principale d'inerzia della sezione;
3. si calcola la direzione della risultante delle tensioni tangenziali da taglio presenti nella sezione in esame, corrispondenti ad una azione tagliante parallela all'altro asse principale d'inerzia della sezione;
4. il centro di taglio è il punto di intersezione delle due direzioni determinate nei precedenti punti 2 e 3.



Procedura per la determinazione del centro di taglio

Caso particolare 1: sezione dotata di un asse di simmetria.

Com'è ben noto, un asse di simmetria è anche asse principale d'inerzia. Come è stato indicato nelle precedenti slide, se una sezione è dotata di asse di simmetria, allora il centro di taglio appartiene a tale asse. Pertanto, per la determinazione del centro di taglio, si usa la seguente procedura:

1. si calcola la direzione della risultante delle tensioni tangenziali da taglio presenti nella sezione in esame, corrispondenti ad una azione tagliante ortogonale all'asse di simmetria della sezione
2. il centro di taglio è il punto di intersezione tra la direzione determinata al punto precedente e l'asse di simmetria della sezione



Procedura per la determinazione del centro di taglio

Caso particolare 2: sezione dotata di due assi di simmetria.

Come è stato già detto, se una sezione è dotata di due assi di simmetria, allora il centro di taglio è il punto di intersezione di tali assi e si determina direttamente per via grafica.

In questo caso il centro di taglio coincide con il baricentro.



Nota: definizioni del centro di taglio

Nelle precedenti slide è stata fornita una definizione del centro di taglio basata sullo stato di tensione. In particolare il centro di taglio è stato definito come segue:

1. *il centro di taglio C di una sezione è il punto per il quale passano le rette d'azione delle risultanti delle tensioni tangenziali dovute al taglio*

Pertanto, se la direzione della sollecitazione tagliante contiene il centro di taglio così come definito al punto 1, essa produce solamente tensioni tangenziali da taglio e le tensioni tangenziali torsionali sono nulle.

Si noti che esistono altre definizioni del centro di taglio;

2. *il centro di taglio C di una sezione è il punto tale che, se la direzione della sollecitazione tagliante contiene tale punto, allora la sezione non ruota torsionalmente attorno all'asse z ;*
3. *il centro di taglio C di una sezione è il punto tale che, se la direzione della sollecitazione tagliante contiene tale punto, allora il lavoro compiuto dalle tensioni tangenziali dovuto al taglio per gli scorrimenti torsionali è nullo.*

Si dimostra che, per sezioni aperte a parete sottile la definizione 3 coincide con la 1. Inoltre, si dimostra che la definizione 3 differisce dalla 2 per effetti secondari che si annullano se il coefficiente di Poisson del materiale è nullo. Pertanto, la definizione 1 viene comunemente accettata nella pratica tecnica.

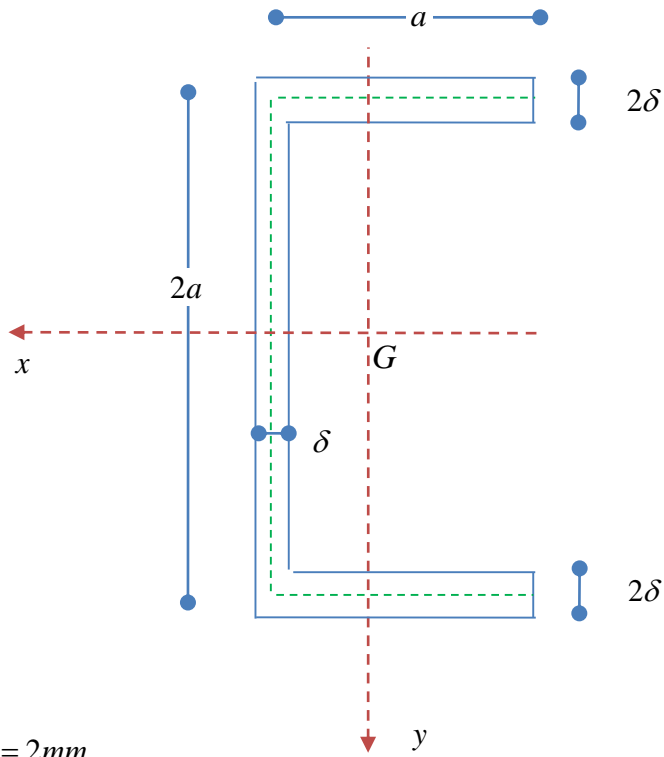


Aste sollecitate da taglio (e momento)

Il centro di taglio: esercizi proposti



Profilo a "C"

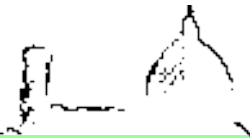


$\delta = 2mm$

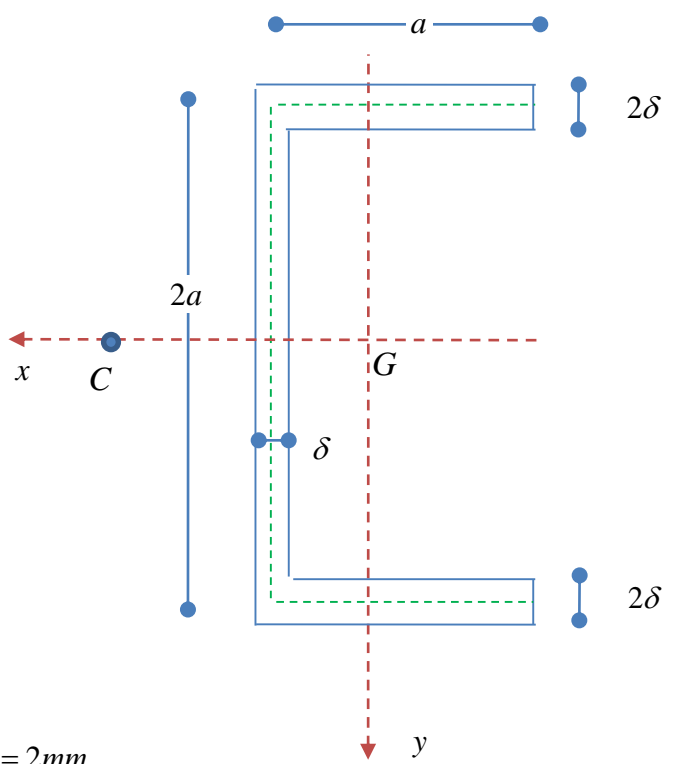
$a = 50mm$

Si determini il centro di taglio della sezione indicata in figura.

Si osservi che la sezione in esame è dotata di un asse di simmetria.

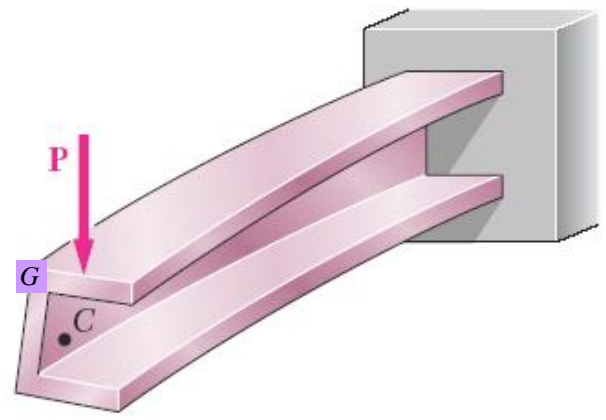


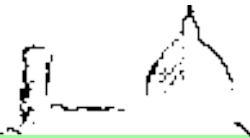
Profilo a "C"



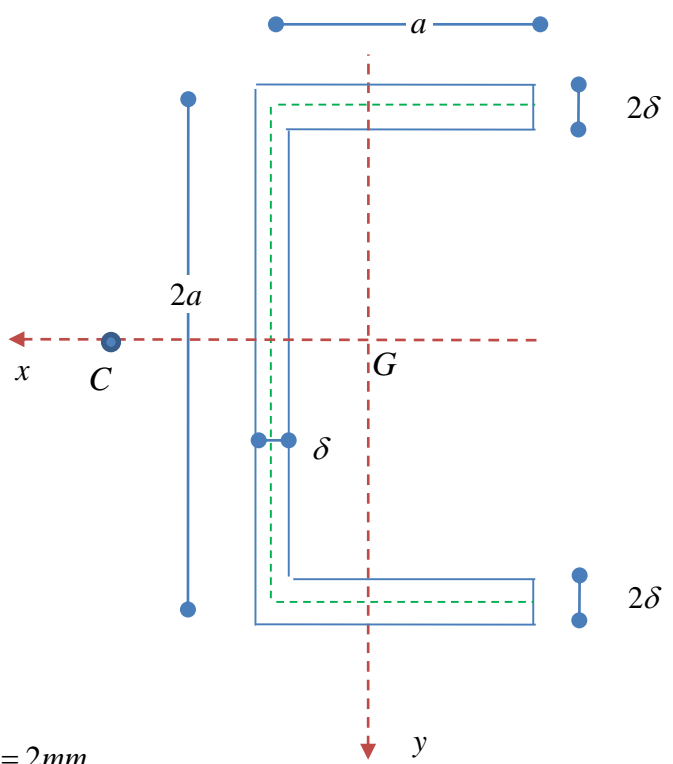
$\delta = 2\text{mm}$
 $a = 50\text{mm}$

Per il problema in esame si otterrà che il centro di taglio è orientativamente posizionato come indicato in figura. Questo significa ad esempio che, se una trave a mensola a sezione trasversale a "C" è caricata all'estremo libero da una forza posizionata in corrispondenza del baricentro, allora tale trave sarà soggetta anche a torsione



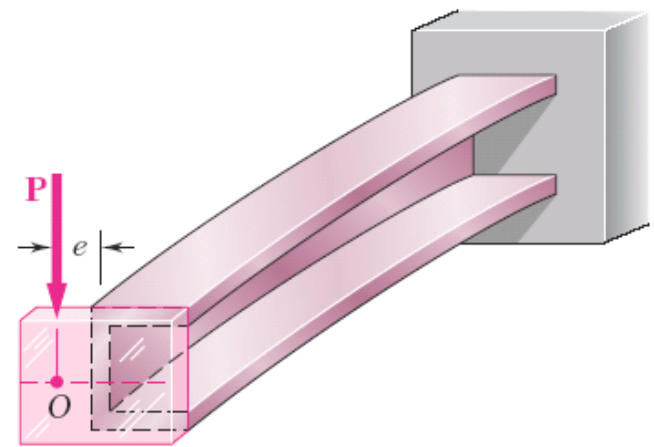


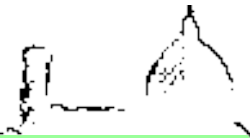
Profilo a "C"



$\delta = 2\text{mm}$
 $a = 50\text{mm}$

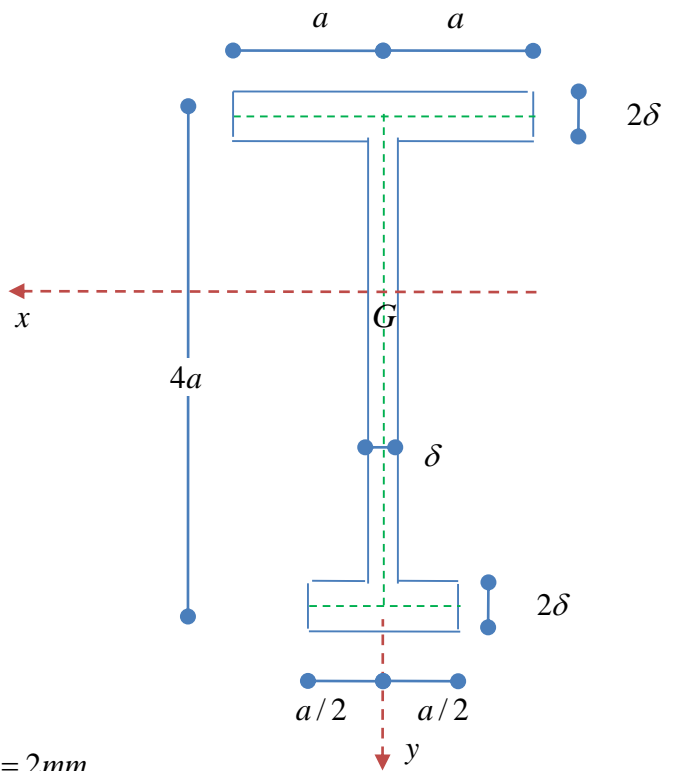
Se invece il carico di estremità è posizionato in corrispondenza del centro di taglio, allora la mensola in esame non sarà soggetta a torsione ma solo a taglio e flessione. Le sezioni trasversali non subiranno rotazioni attorno all'asse della trave.





Profilo a "doppio T"

Si determini il centro di taglio della sezione indicata in figura.

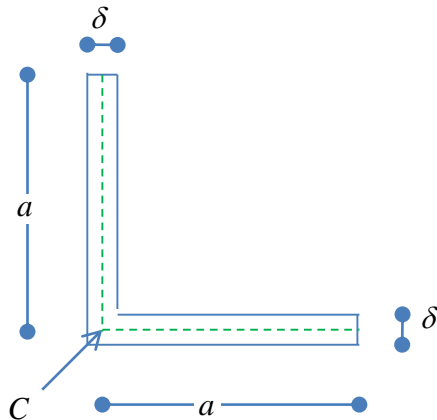


$\delta = 2mm$
 $a = 50 mm$



Profilo a "L"

Per la sezione indicata in figura si verifichi che il centro di taglio si trova nella posizione indicata.



$$\delta = 2mm$$

$$a = 30 mm$$