

Aste sollecitate da taglio (e momento)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



La deformabilità a taglio
ed il fattore di taglio



Sommario

È stato mostrato come calcolare le tensioni tangenziali da taglio presenti nelle sezioni trasversali di una trave, con particolare riferimento ad alcune tipologie di sezioni trasversali molto diffuse nella pratica tecnica dell'ingegneria strutturale.

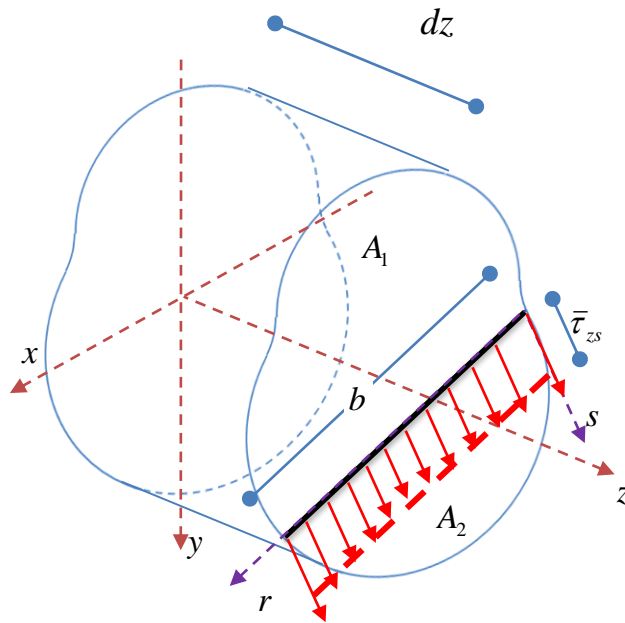
Di seguito saranno descritti gli effetti deformativi della sollecitazione tagliante e sarà introdotta una misura globale dello scorrimento tagliante presente in una generica sezione trasversale di una trave.

Bibliografia:

- Nunziante, Gambarotta, Tralli. Scienza delle Costruzioni. McGraw-Hill
- Comi, Corradi Dell'Acqua. Introduzione alla Meccanica Strutturale. McGraw-Hill



Gli scorrimenti da taglio



Si è visto che la teoria di Jourawsky permette di determinare le tensioni tangenziali medie presenti in una corda di una generica sezione trasversale di una trave sollecitata da una azione tagliante. In particolare, per la (96) si ha:

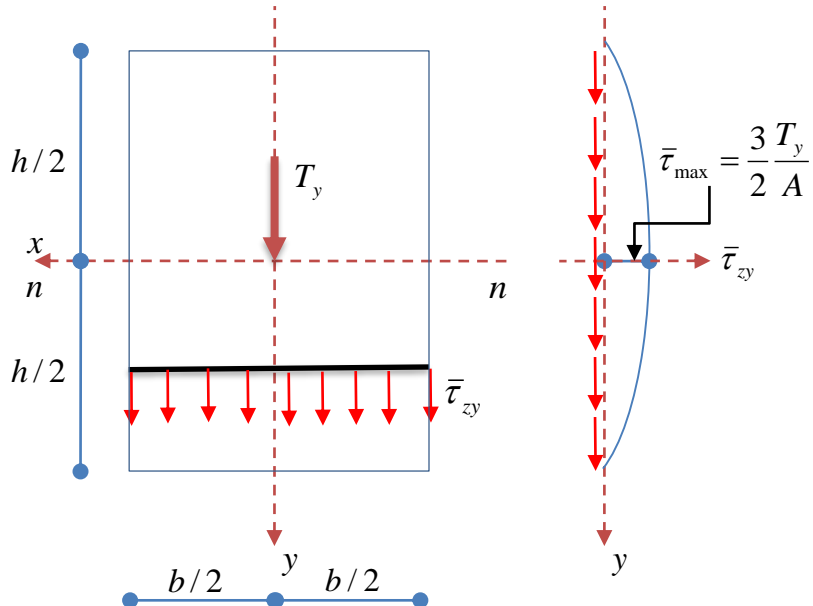
$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (96)$$

Si ricorda che la precedente relazione è stata ottenuta utilizzando solo equazioni di equilibrio. Se il materiale in esame ha un comportamento elastico lineare isotropo, gli scorrimenti angolari dovuti alla sollecitazione tagliante (96) si calcolano come segue:

$$\bar{\gamma}_{zs} = \frac{\bar{\tau}_{zs}}{G} = \frac{1}{G} \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = - \frac{1}{G} \frac{T_y S_x^{(A_1)}}{b I_x} \quad (107)$$



Gli scorrimenti da taglio



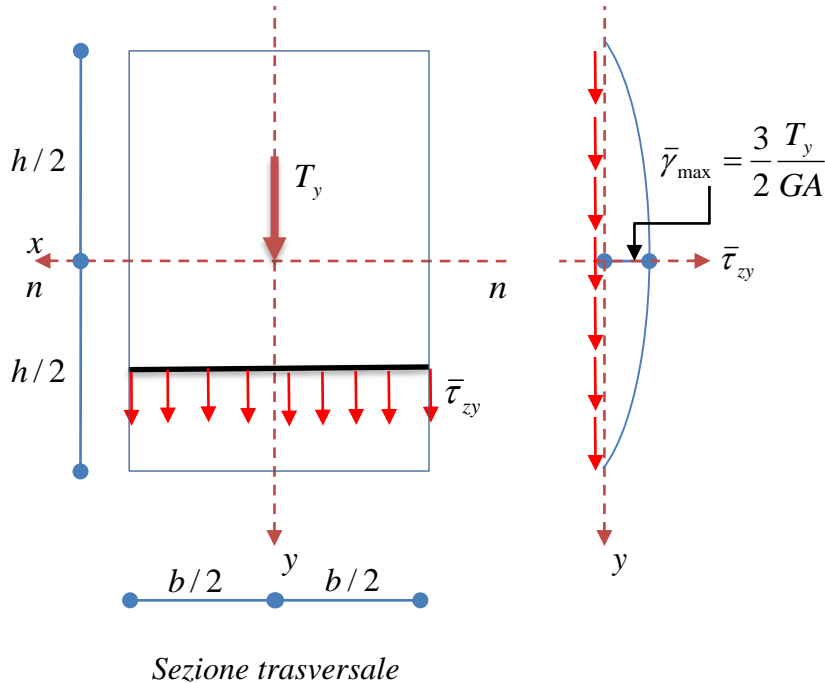
Sezione trasversale

Consideriamo ad esempio una trave a sezione trasversale rettangolare caricata da una azione tagliante parallela ad un asse di simmetria. Si è visto che le tensioni tangenziali medie presenti in una corda ortogonale all'azione tagliante si calcolano come segue:

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = \frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (108)$$



Gli scorrimenti da taglio



Consideriamo ad esempio una trave a sezione trasversale rettangolare caricata da una azione tagliante parallela ad un asse di simmetria. Si è visto che le tensioni tangenziali medie presenti in una corda ortogonale all'azione tagliante si calcolano come segue:

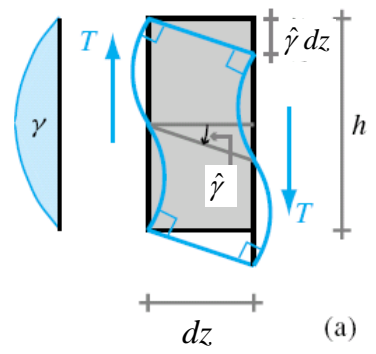
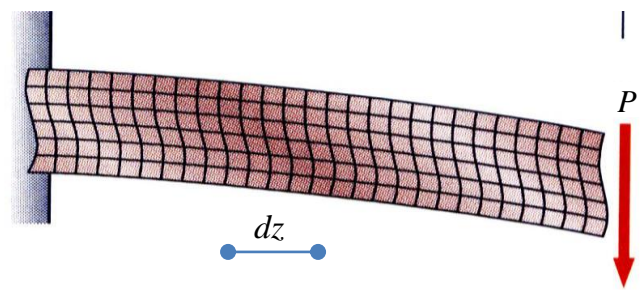
$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = \frac{3 T_y}{2 A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (108)$$

Per la (107), gli scorrimenti angolari hanno anch'essi un andamento parabolico e possono essere calcolati semplicemente dividendo la (108) per il modulo di rigidezza taglio G come segue

$$\bar{\gamma}_{zy} = \frac{1}{G} \frac{T_y S_x^{(A_2)}}{b I_x} = \frac{3 T_y}{2 G A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (109)$$



Gli scorrimenti da taglio



In presenza di una sollecitazione tagliante si ha allora uno scorrimento angolare tra le fibre longitudinali e quelle verticali della sezione come rappresentato in figura. Tale scorrimento non è uniforme su una generica sezione trasversale, ma varia rispetto all'asse y (v. figura nella slide precedente). In corrispondenza delle fibre longitudinali superiore ed inferiore lo scorrimento è nullo (tali fibre si mantengono ortogonali alla sezione trasversale deformata), mentre lo scorrimento angolare è massimo in corrispondenza della fibra baricentrica. Ne consegue che la sezione si ingobba come mostrato in figura. Nasce l'esigenza allora di introdurre una misura dello scorrimento globale della sezione trasversale.

Figura tratta da Comi-Corradi



Gli scorrimenti da taglio: scorrimento medio

Si definisce *scorrimento medio* di una sezione trasversale il valore $\hat{\gamma}$ tale che lo spostamento verticale relativo dovuto all'azione tagliante $dv^{(T)}$ tra due sezioni poste a distanza infinitesima dz sia pari a

$$dv^{(T)} = \hat{\gamma} dz \rightarrow \hat{\gamma} = \frac{dv^{(T)}}{dz} \quad (110)$$

Si osservi che, secondo la precedente definizione, lo scorrimento medio non è la media degli scorrimenti presenti nella sezione trasversale in esame, ma un valore *globalmente equivalente* ad essi.

Lo scorrimento medio (e la definizione di *fattore di taglio* che ne deriva) verrà determinato effettuando una semplice applicazione del Principio dei Lavori Virtuali.

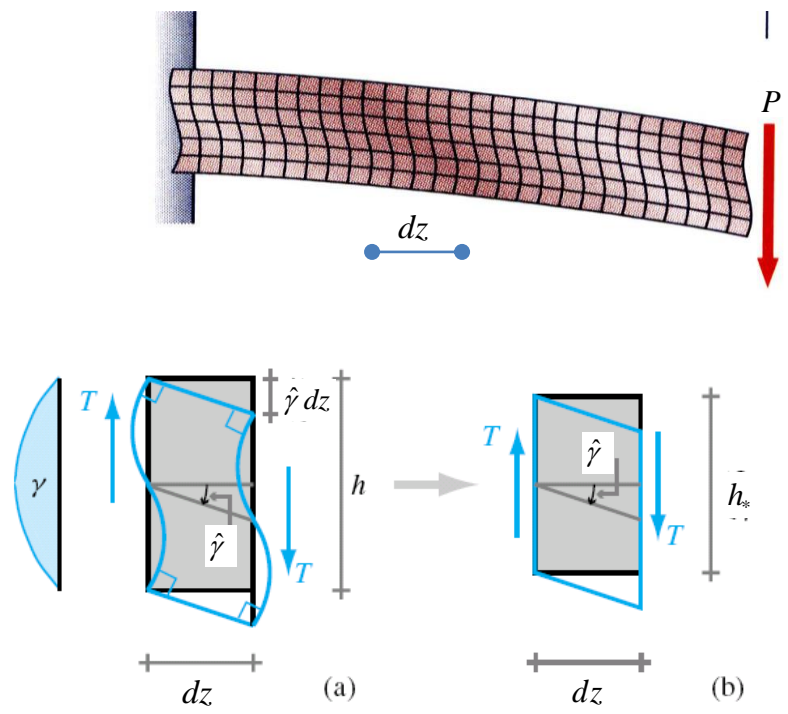
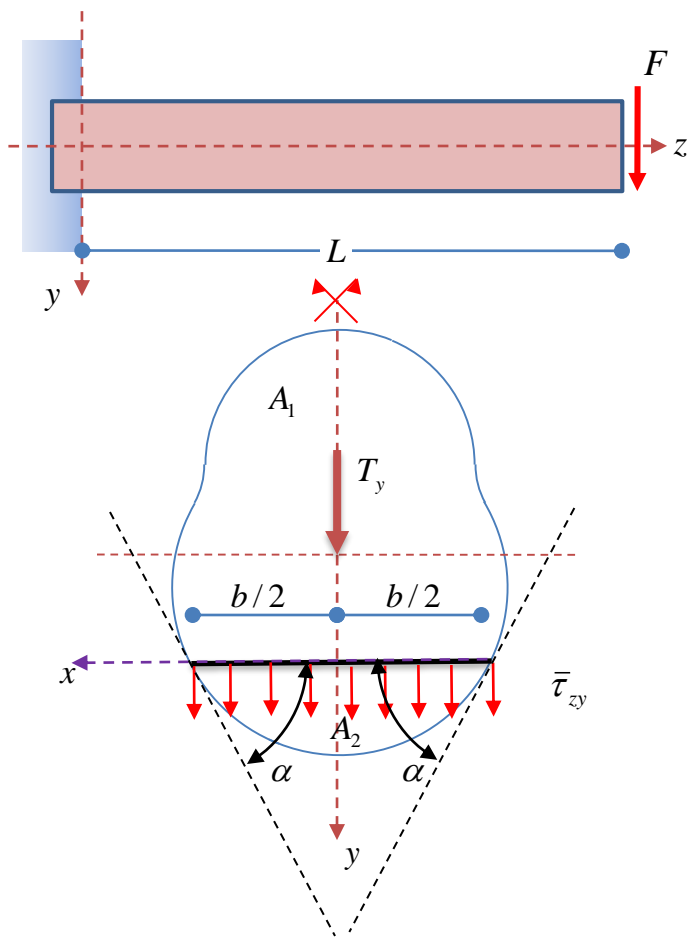


Figura tratta da Comi-Corradi



Calcolo dello scorrimento medio

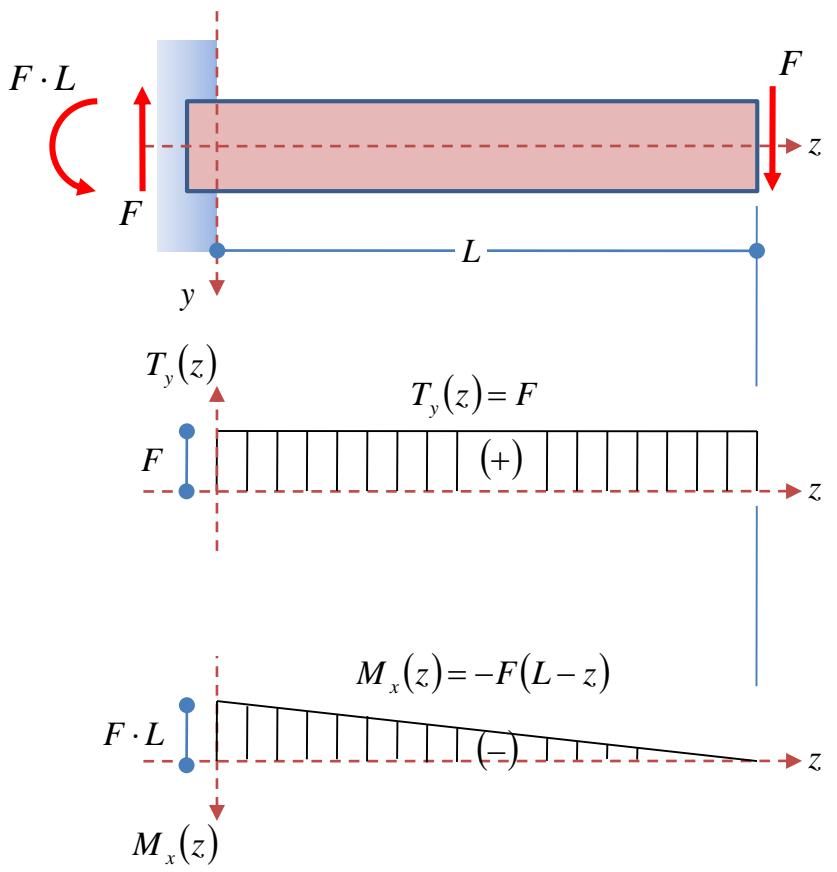


Per semplicità, sarà mostrato come calcolare lo scorrimento medio (ed il fattore di taglio) per una trave avente sezione trasversale dotata di un asse di simmetria.

Consideriamo la mensola schematizzata in figura, caricata in corrispondenza dell'estremo libero da una forza concentrata diretta secondo l'asse di simmetria della sezione trasversale. È ovvio verificare che gli assi baricentrici x ed y indicati in figura sono principali d'inerzia.



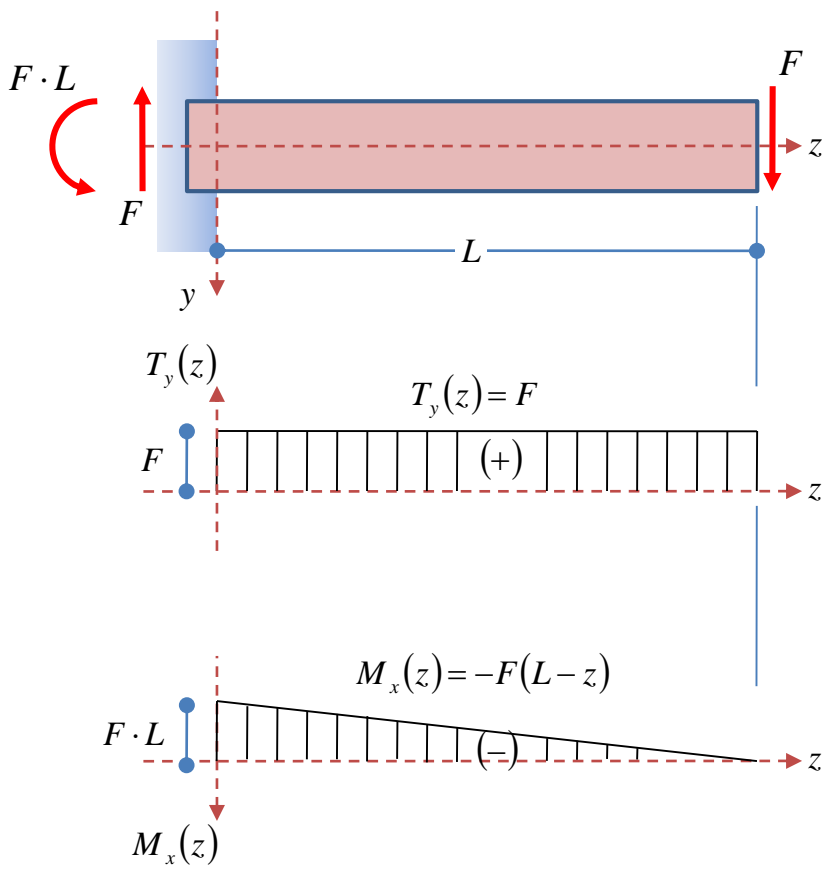
Calcolo dello scorrimento medio



Le reazioni vincolari dell'incastro e le caratteristiche della sollecitazione non nulle sono quelle indicate in figura. Per quanto è stato descritto nella precedente slide, sia la sollecitazione tagliante che quella flessionale sono dirette secondo un asse principale d'inerzia della sezione.



Calcolo dello scorrimento medio: strategia di soluzione



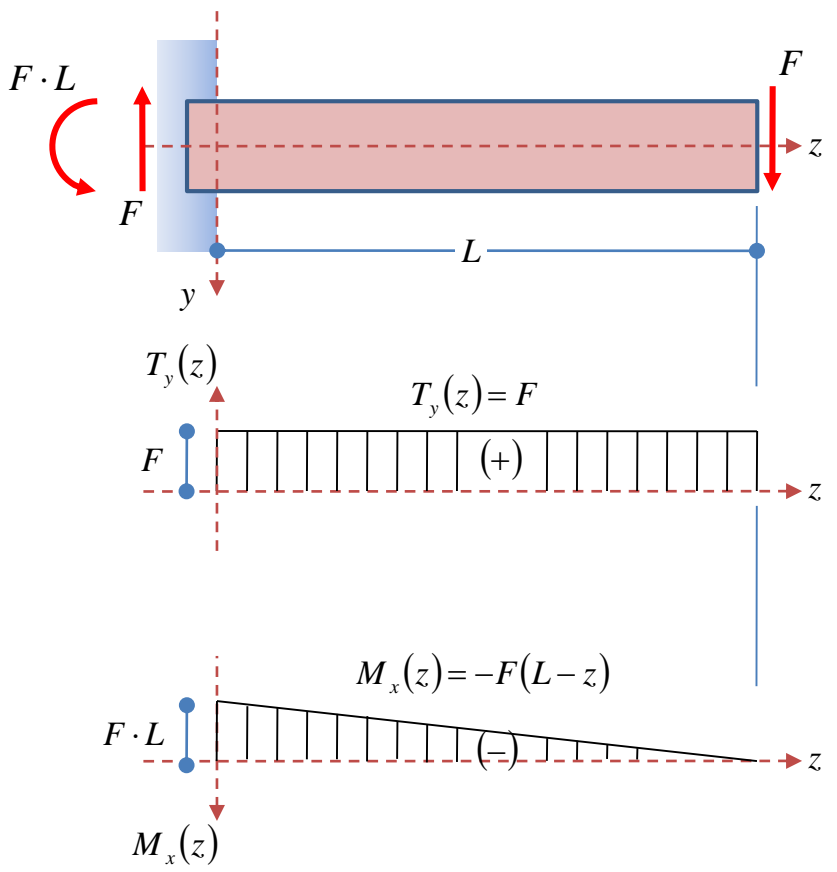
Lo scorrimento medio dovuto al taglio sarà determinato utilizzando la seguente strategia:

- calcoleremo inizialmente lo spostamento verticale δ del baricentro della sezione di estremità della mensola;
- lo spostamento δ sarà decomposto nell'aliquota dovuta alla sollecitazione flessionale δ^M ed in quella dovuta alla sollecitazione tagliante δ^T
- visto che la trave in esame è sollecitata da un taglio costante, tutte le sezioni trasversali si deformeranno a taglio in maniera analoga e quindi lo scorrimento medio sarà calcolato come segue

$$\hat{\gamma} = \frac{dv^{(T)}}{dz} = \frac{\delta^{(T)}}{L}$$



Calcolo dello scorrimento medio



Le tensioni normali dovute alla flessione (retta) si calcolano attraverso la formula di Navier come segue

$$\sigma_z = \frac{M_x(z)}{I_x} y = -\frac{F(L-z)}{I_x} y \quad (111)$$

mentre le tensioni tangenziali medie presenti in una corda ortogonale alla direzione del taglio (v. sezione trasversale nella slide precedente) si calcolano attraverso le (96) e (99) come segue

$$\bar{\tau}_{zy} = -\frac{T_y S_x^{(A_1)}(y)}{I_x b(y)} = -\frac{F S_x^{(A_1)}(y)}{I_x b(y)} \quad (112)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{2x}{b(y) \tan \alpha} \bar{\tau}_{zy} \quad (99)$$

Le precedenti sono le uniche componenti di tensione non nulle presenti nei punti materiali della trave in esame.



Calcolo dello scorrimento medio

Per un materiale a comportamento elastico lineare isotropo, le componenti di deformazione corrispondenti alle (111), (112) e (99) sono le seguenti:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \quad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (113)$$

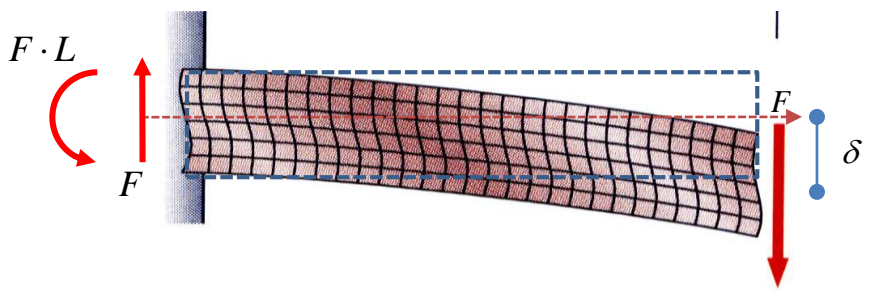
Si osservi che, per come sono state determinate, le componenti di tensione (111), (112) e (99) sono in equilibrio con i carichi esterni applicati alla trave in esame, mentre le componenti di deformazione (113) sono congruenti con il campo di spostamenti effettivamente presente nella trave (calcolato secondo la teoria del solido elastico lineare isotropo). Essi allora soddisfano l'equazione dei lavori virtuali

$$\underbrace{\int_B tr(\underline{\sigma}_f \cdot \underline{\varepsilon}_s) dv}_{L_{vi}} = \underbrace{\int_B \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{u}_s dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{u}_s ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}_f \cdot \bar{\mathbf{u}} ds}_{L_{ve}} \quad (114)$$

che, come è stato dimostrato, vale per un qualunque campo di forze e tensioni, purché rispettoso delle equazioni di equilibrio, e per un qualunque campo di (piccoli) spostamenti e deformazioni, purché congruente, e quindi anche per quelli contemporaneamente presenti nella trave in esame.



Calcolo dello scorrimento medio



Indicando con δ lo spostamento verticale del baricentro della sezione di estremità della trave in esame e trascurando il peso proprio, per il problema in esame il lavoro virtuale esterno è pari a

$$L_{ve} = F \cdot \delta \quad (115)$$

Considerando le componenti di tensione (111), (112) e (99) e le componenti di deformazione (113), il lavoro virtuale interno si scrive come segue

$$L_{vi} = \int_v \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zy} \gamma_{zy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} dv = \underbrace{\frac{1}{E} \int_v \sigma_z^2 dv}_{L_{vi}^{(M)}} + \underbrace{\frac{1}{G} \int_v \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2 dv}_{L_{vi}^{(T)}} \quad (116)$$

Esso è quindi somma di una parte relativa alla sollecitazione flessionale e di un'altra relativa alla sollecitazione tagliante.



Fattore di taglio

Utilizzando la (111), il contributo flessionale al lavoro virtuale interno si calcola come segue

$$L_{vi}^{(M)} = \frac{1}{E} \int_v \sigma_z^2 dv = \frac{F^2}{EI_x^2} \int (L-z)^2 y^2 dv = \frac{F^2}{EI_x^2} \int_0^L (L-z)^2 \left(\int_A y^2 dA \right) dz = \frac{F^2 L^3}{3EI_x} \quad (117)$$

mentre per le (112) e (99), la parte tagliante assume la seguente forma

$$\begin{aligned} L_{vi}^{(T)} &= \frac{1}{G} \int_v \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2 dv = \frac{1}{G} \int_v \tau_{zy}^2 \left(1 + \frac{4x^2}{b(y)^2 (\tan \alpha)^2} \right) dv = \frac{F^2}{GI_x^2} \int_0^L \left(\int_A \frac{S_x^2}{b^2} \left(1 + 4 \frac{x^2}{b^2 (\tan \alpha)^2} \right) dA \right) dz = \\ &= \frac{F^2 L}{GA^2 \rho_x^4} \int_A \frac{S_x^2}{b^2} \left(1 + 4 \frac{x^2}{b^2 (\tan \alpha)^2} \right) dA \end{aligned} \quad (118)$$

Nella precedente relazione è stato posto $I_x = \rho_x^2 A$ dove ρ_x rappresenta il raggio d'inerzia della sezione rispetto all'asse x . Definendo il fattore di taglio μ_y della sezione rispetto all'asse y come segue

$$\mu_y = \frac{1}{k_y} = \frac{1}{A \rho_x^4} \int_A \frac{S_x^2}{b^2} \left(1 + 4 \frac{x^2}{b^2 (\tan \alpha)^2} \right) dA \quad (119)$$

la (118) si può scrivere in maniera più compatta come segue

$$L_{vi}^{(T)} = \frac{F^2 L}{k_y G A} \quad (120)$$



Fattore di taglio

Sostituendo la (117) e la (120) nella (116) ed eguagliando al lavoro virtuale esterno (115) si ottiene

$$F \cdot \delta = \frac{F^2 L^3}{3EI_x} + \frac{F^2 L}{k_y G A} \rightarrow \delta = \frac{F L^3}{3EI_x} + \frac{F L}{k_y G A} = \delta^{(M)} + \delta^{(T)} \quad (121)$$

Lo spostamento totale dell'estremo libero della mensola in esame è allora pari alla somma di una parte dovuta alla sollecitazione flessionale e di una dovuta alla sollecitazione tagliante.

Si osservi che la sollecitazione tagliante presente nell'esempio in esame è costante rispetto a z . Pertanto tutte le sezioni trasversali della trave si comportano in maniera analoga rispetto alla sollecitazione tagliante e quindi lo scorrimento medio (110) si può calcolare come segue

$$\hat{\gamma} = \frac{dv^{(T)}}{dz} = \frac{\delta^{(T)}}{L} = \frac{F}{k_y G A} \quad (122)$$

Tale scorrimento, così come è stato definito nella presente lezione, è allora pari al valor medio degli scorrimenti che sarebbero presenti nella sezione trasversale della trave se essa avesse una superficie pari a

$$A_* = k_y A \quad (123)$$



Fattore di taglio: osservazione 1

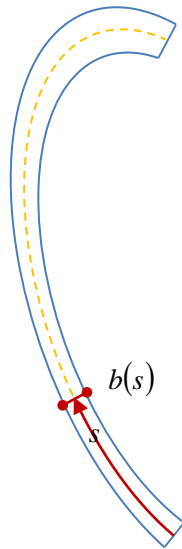
Si osservi che il fattore di taglio definito nella (119) dipende solo dalle caratteristiche geometriche della sezione trasversale della trave in esame. Si può verificare facilmente che esso è sempre un valore maggiore di 1 e che quindi l'area ridotta definita nella (123) è sempre minore dell'area effettiva della sezione trasversale. Il valore k_y , pari all'inverso del fattore di taglio, rappresenta in qualche maniera la porzione di sezione trasversale che contribuisce a contrastare le deformazioni dovute al taglio.

Si dimostra facilmente che per una sezione trasversale rettangolare si ha

$$\mu_y = \frac{6}{5} \quad (124)$$



Fattore di taglio: osservazione 2



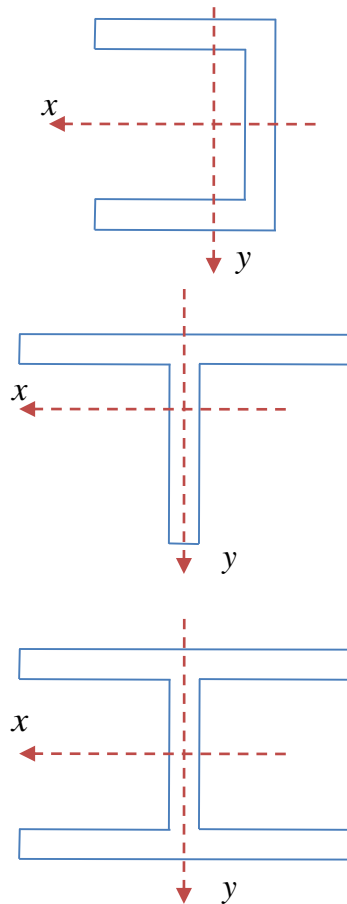
Per le sezioni sottili, in una generica corda ortogonale alla linea media della sezione il valore delle tensioni tangenziali parallele alla corda (99) è molto più piccolo di quello delle tensioni tangenziali ad essa ortogonali (112). Pertanto per tale tipologia di sezione il fattore di taglio può essere calcolato come segue

$$\mu_y = \frac{1}{k_y} = \frac{1}{A\rho_x^4} \int_{\Gamma} \frac{S_x^2}{b} ds \quad (125)$$

dove Γ rappresenta la linea media della sezione.



Fattore di taglio: osservazione 3



Come suggerito a pag. 173 del libro di Comi-Corradi, per profili in parete sottile, in prima approssimazione, il fattore di taglio può essere calcolato in prima approssimazione come rapporto fra l'area totale della sezione e l'area degli elementi rettangolari che compongono la sezione stessa, "allungati" parallelamente alla direzione dell'azione tagliante. Pertanto, ad esempio per i profili indicati in figura, il fattore di taglio può essere calcolato come segue:

$$\mu_y = \frac{1}{k_y} = (\text{area totale} / \text{area delle flange parallele ad } y)$$

$$\mu_x = \frac{1}{k_x} = (\text{area totale} / \text{area delle flange parallele ad } x)$$

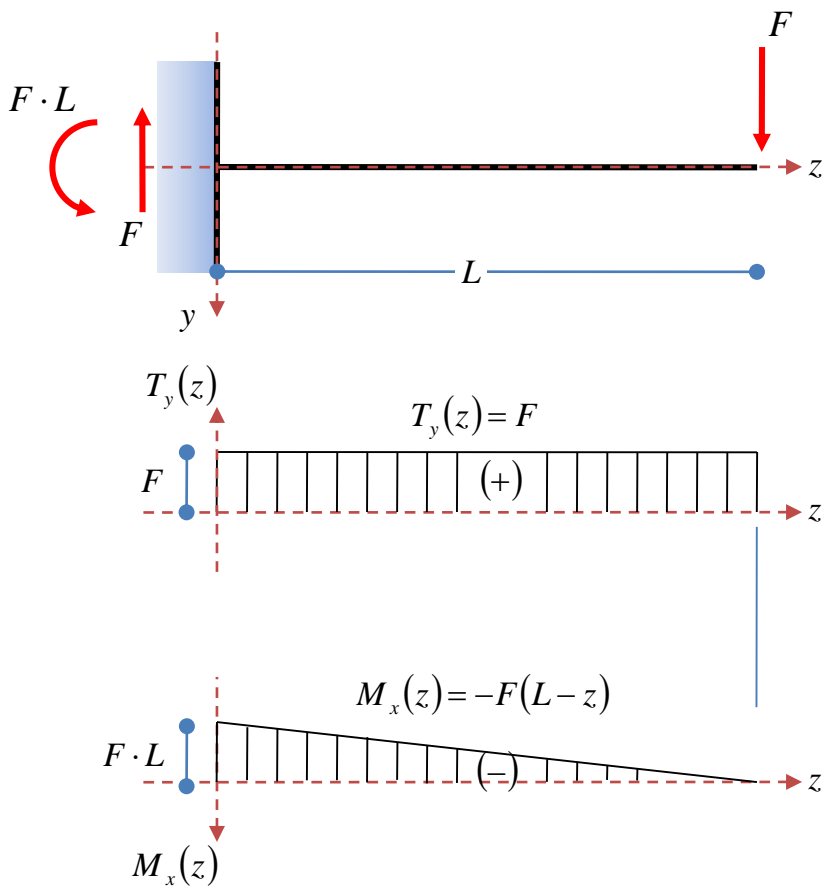


Aste sollecitate da taglio (e momento)

Deformabilità a taglio e flessionale



Esempio: trave a mensola

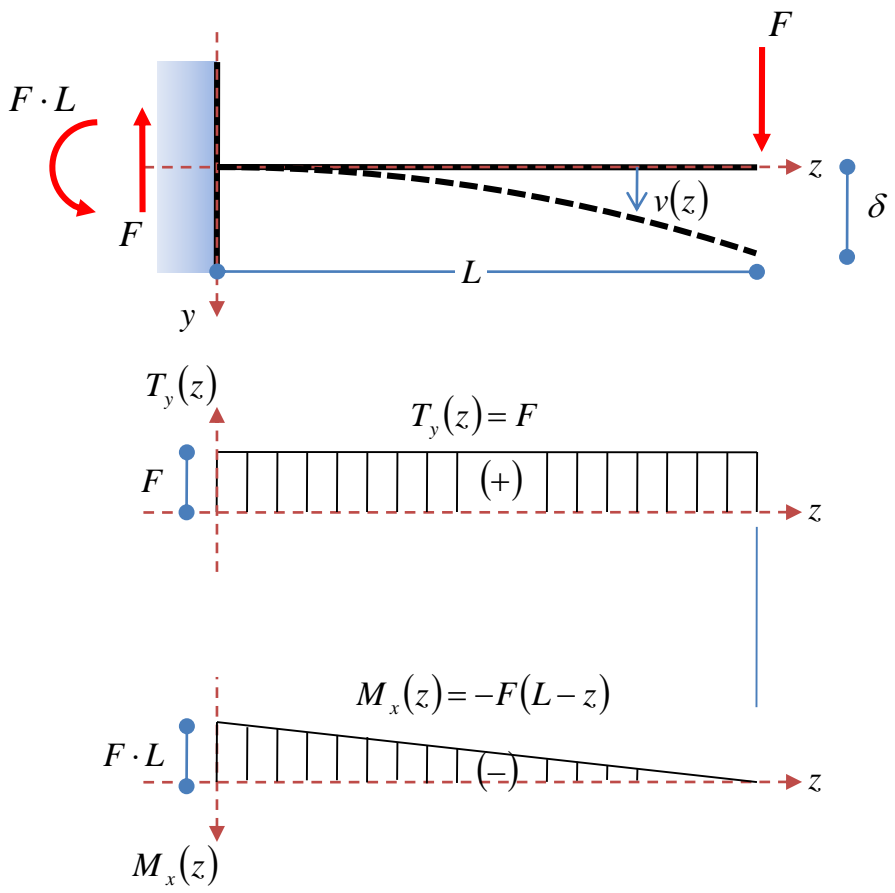


Si consideri la trave a mensola schematizzata in figura.

Siano gli assi x ed y del sistema di riferimento indicato in figura baricentrici e principali d'inerzia per le sezioni trasversali della trave in esame. In tal caso la flessione (e quindi anche la sollecitazione tagliante) è retta ed il piano yz coinciderà con il piano di inflessione della trave: l'asse geometrico della trave si deformerà mantenendosi su tale piano.



Esempio: trave a mensola



Sia $v(z)$ lo spostamento verticale del baricentro di una generica sezione trasversale avente ascissa z . Per il principio di sovrapposizione degli effetti tale spostamento è pari alla somma di due contributi: il primo $v^{(M)}(z)$ dovuto alla sollecitazione flessionale ed il secondo $v^{(T)}(z)$ dovuto alla sollecitazione tagliante.

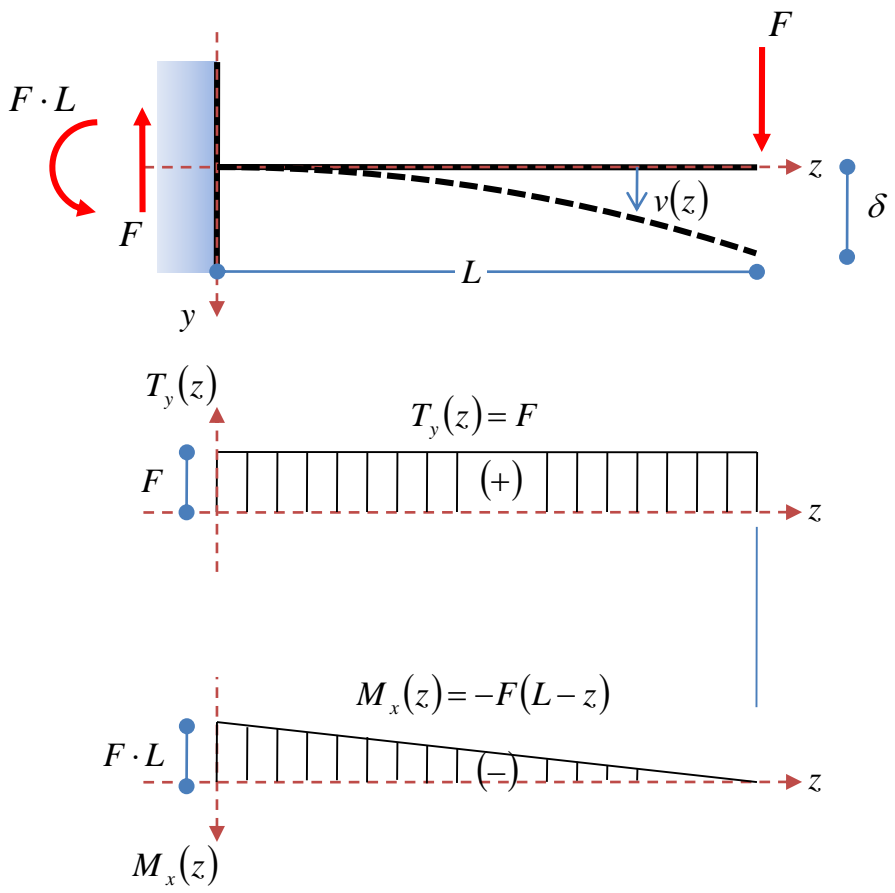
$$v(z) = v^{(M)}(z) + v^{(T)}(z) \tag{126}$$

In particolare, è stato mostrato che lo spostamento verticale del baricentro della sezione di estremità è pari a

$$\delta = v(L) = \frac{F L^3}{3EI_x} + \frac{F L}{k_y GA} = \delta^{(M)} + \delta^{(T)} \tag{127}$$



Esempio: trave a mensola



La deformabilità a taglio della trave in esame può essere confrontata con la sua deformabilità flessionale attraverso il seguente rapporto

$$\frac{\delta^{(T)}}{\delta^{(M)}} = \frac{FL}{\frac{3EI_x}{k_yGA}} = \frac{3E}{k_yG} \left(\frac{\rho_x}{L} \right)^2 \quad (128)$$

Nella precedente relazione il termine ρ_x rappresenta il raggio d'inerzia della sezione rispetto all'asse x . Introducendo la seguente misura di snellezza della trave

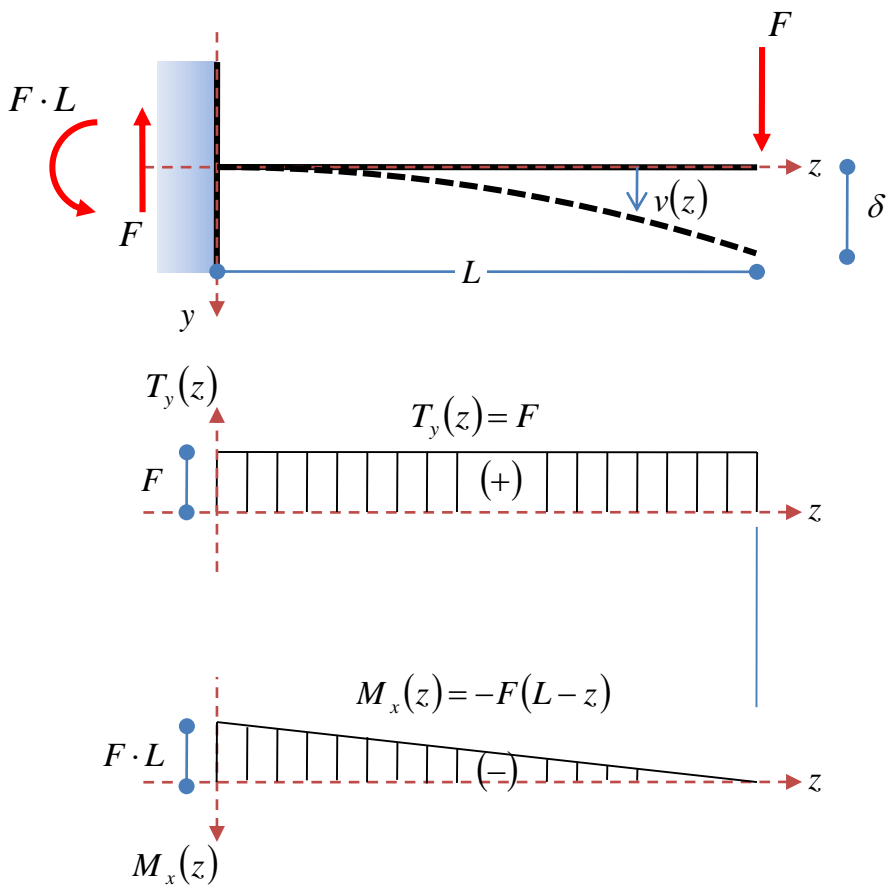
$$\xi = \frac{L}{\rho_x} \quad (129)$$

la (128) si può scrivere come segue

$$\frac{\delta^{(T)}}{\delta^{(M)}} = \frac{3E}{k_yG} \frac{1}{\xi^2} \quad (130)$$



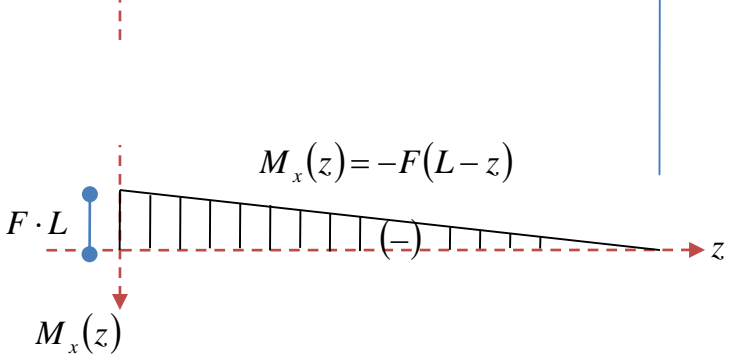
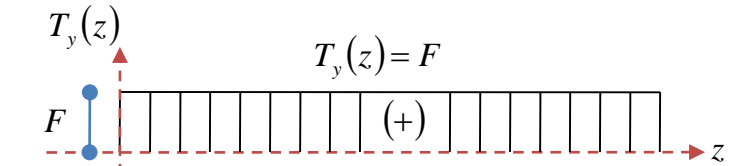
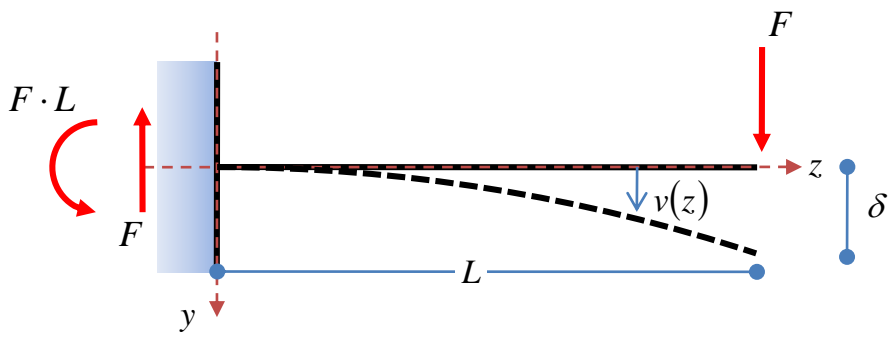
Esempio: trave a mensola



La (130) indica che la deformabilità a taglio di una trave diminuisce in maniera iperbolica con la sua "snellezza": tanto più la sua lunghezza aumenta rispetto alle dimensioni della sezione trasversale, tanto più la deformabilità flessionale prevale su quella tagliante.



Esempio: trave a mensola



Ad esempio, per una trave in acciaio a sezione trasversale rettangolare di dimensioni $A = b h$ si ha:

$$E = 210 \text{ GPa} \quad \rho_x^2 = \frac{h^2}{12}$$
$$G = 80 \text{ GPa} \quad k_y = \frac{5}{6}$$

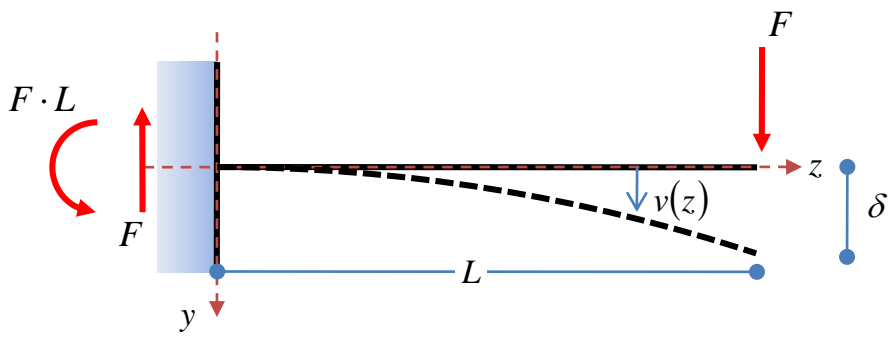
e quindi la (128) diviene

$$\frac{\delta^{(T)}}{\delta^{(M)}} = \frac{3 \cdot 210}{5 \cdot 80} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \cong 0.8 \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (131)$$

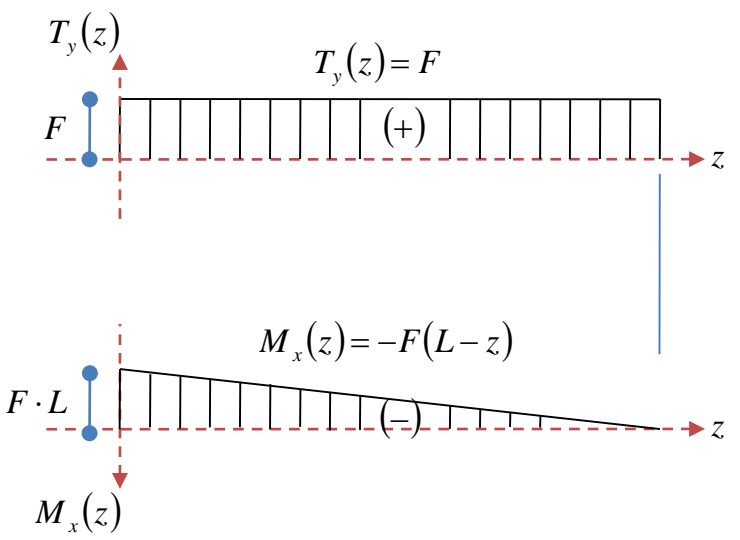
Il contributo tagliante allora diminuisce all'aumentare della luce della trave. Ad esempio, se la luce della mensola in esame è pari a 10 volte l'altezza della sezione trasversale, allora il rapporto tra il contributo tagliante e quello flessionale risulta inferiore all'1%.



Esempio: trave a mensola



In generale, per travi "abbastanza snelle", la deformabilità a taglio è trascurabile rispetto a quella flessionale.





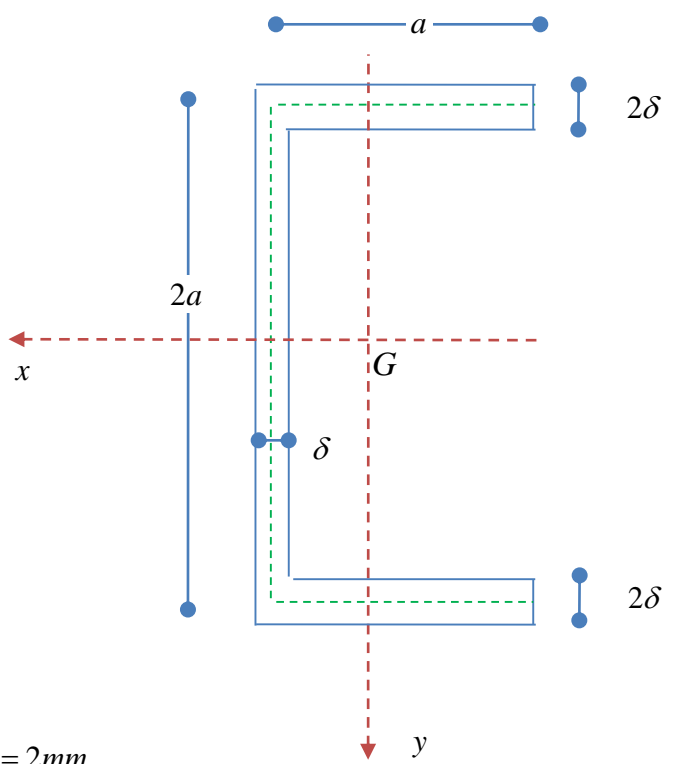
Aste sollecitate da taglio (e momento)

Calcolo del fattore di taglio: esercizi proposti



Calcolo del fattore di taglio

Utilizzando la (125), si calcolino i fattori di taglio μ_x e μ_y della sezione schematizzata in figura e si confrontino con quelli approssimati come suggerito nella "osservazione 3".

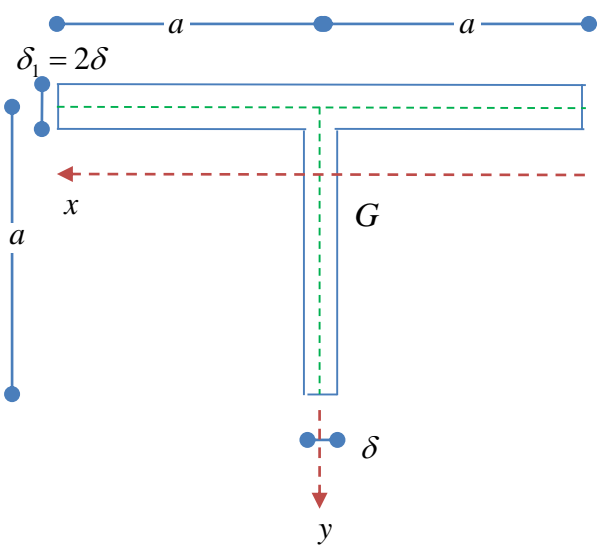


$\delta = 2mm$
 $a = 50 mm$



Calcolo del fattore di taglio

Utilizzando la (50.21), si calcolino i fattori di taglio μ_x e μ_y della sezione schematizzata in figura e si confrontino con quelli approssimati come suggerito nella "osservazione 3".



$\delta = 2mm$
 $a = 30mm$