

Teoria tecnica della trave



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Definizione del problema strutturale



Ipotesi iniziali

Si consideri una trave:

- ad asse rettilineo (o a piccola curvatura)
- a sezione trasversale arbitraria ⁽¹⁾
- in materiale omogeneo, elastico, lineare, isotropo

Si consideri un *sistema di riferimento* avente origine in corrispondenza del baricentro di una delle due sezioni di estremità della trave, asse z contenente l'asse geometrico della trave e assi x e y coincidenti con gli assi principali d'inerzia della sezione trasversale.

⁽²⁾Ipotizziamo, per semplicità, che la trave in esame sia caricata da azioni aventi componente in direzione x nulla (problema «piano»): in questo caso, si dimostra facilmente che le uniche componenti delle caratteristiche della sollecitazione eventualmente non nulle sono le seguenti:

$$N(z)$$

$$T_y(z) \rightarrow T(z) \quad (\text{taglio in direzione } y; \text{ si omette il pedice per brevità di notazione})$$

$$M_x(z) \rightarrow M(z) \quad (\text{momento flettente in direzione } x; \text{ si omette il pedice per brev. di notaz.}) \quad (3)$$

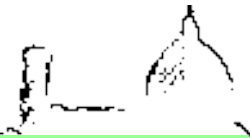
$$M_z(z) \rightarrow M_t(z) \quad (\text{momento torcente})$$



Ipotesi iniziali

Note al testo nella precedente slide:

- (1) per quanto detto nella precedente slide, si ipotizza che la *sezione trasversale* della trave in esame sia arbitraria, quindi anche variabile con l'ascissa z , purché gli assi x e y siano principali d'inerzia per tutte le sezioni trasversali della trave;
- (2) *l'ipotesi sui carichi* non restringe la generalità dei risultati che troveremo, ma è assunta in quanto consente di utilizzare una notazione più snella; i risultati possono essere facilmente estesi ai casi in cui siano presenti anche $T_x(z)$ e $M_y(z)$ semplicemente sovrapponendo i relativi effetti, i quali si ottengono generalizzando quanto sarà ottenuto in riferimento a $T_y(z)$ e $M_x(z)$;
- (3) si osservi che il momento flettente $M_x(z)$ è, per ipotesi, parallelo ad un asse principale d'inerzia della sezione trasversale (*flessione retta*).



Sommario: definizione del problema strutturale

- Dati
- Incognite

Problemi di resistenza

Criteri di resistenza (puntuali o globali)

\updownarrow

Verifica (o progetto) per resistenza

Azioni

carichi distribuiti: $q(z), n(z)$
 forze concentrate: F_y, F_z
 coppie concentrate: \mathcal{M}, \mathcal{W}

$$\begin{array}{l} \Delta N = -F_z \\ \Delta T = -F_y \\ \Delta M = -\mathcal{M} \\ \Delta M_t = -\mathcal{W} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{equilibrio} \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{l} N'(z) = -n(z) \\ T'(z) = -q(z) \\ M'(z) = T(z) \\ M_t'(z) = 0 \end{array}$$

Sollecitazioni

$N(z), T(z), M(z), M_t(z)$

Problemi di rigidezza

Spostamenti

congruenza

\updownarrow

legami costitutivi

\longleftrightarrow

Deformazioni



Sommario

Di seguito, procederemo alla definizione del problema strutturale in esame, ed in particolare:

- introdurremo delle "*misure di spostamento*", (funzioni di spostamento di particolari punti della struttura - ossia dell'asse geometrico della trave) attraverso le quali è possibile determinare le componenti di spostamento di tutti gli altri punti del solido, in accordo con la teoria che descriveremo;
- definiremo delle *misure "globali" di deformazione*, congruenti con i precedenti spostamenti;
- *determineremo le rimanenti relazioni che definiscono il problema strutturale schematizzato nella precedente slide*, ossia le relazioni di congruenza e di legame costitutivo.

Le precedenti operazioni verranno svolte con l'approccio definito dalla teoria tecnica della trave. La sua descrizione formale viene riportata nella prossima slide.



Teoria tecnica

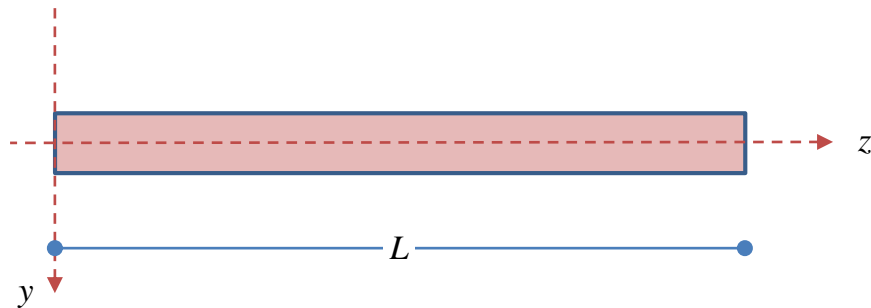
L'approccio risolutivo utilizzato nella teoria tecnica può essere genericamente descritto come segue:

1. si formulano ipotesi volutamente semplificative (ma verosimili ed in accordo con le evidenze sperimentali) sul campo di spostamento presente nella trave;
 - tali ipotesi, che dipendono ovviamente dal particolare problema in esame, devono essere *compatibile con la soluzione esatta del problema di de Saint Venant*; in pratica si sostituiscono le equazioni di compatibilità con dette ipotesi sul campo di spostamento;
 - in generale si assume che tale soluzione sia valida anche sotto ipotesi più generali di quelle formulate per il solido di *de Saint Venant*;
2. (a) si introducono delle misure di sollecitazione in equilibrio con i carichi esterni, e (b) delle misure di deformazione congruenti con il campo di spostamenti definito al punto precedente;
3. si impongono localmente le equazioni costitutive del materiale e le equazioni di equilibrio in modo da determinare lo stato tensionale presente sulla sezione trasversale ed i legami tra le precedenti misure di sollecitazione e di deformazione.

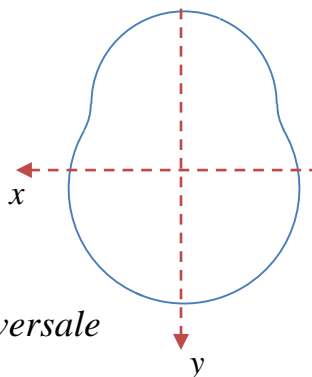
Le soluzioni ottenute utilizzando tale approccio possono risultare approssimate, ma in ogni caso sono sempre rispettose delle equazioni di equilibrio.



1. ipotesi sul campo di spostamento



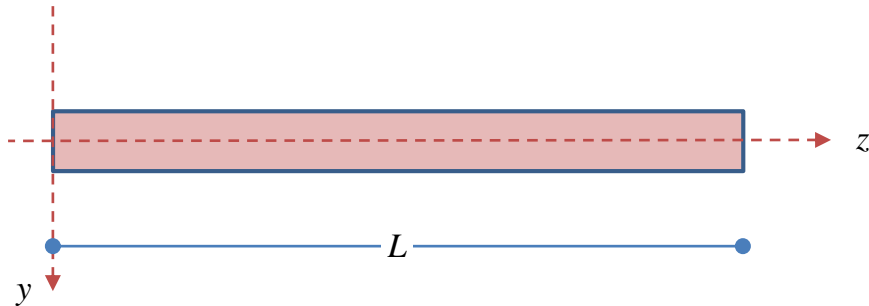
Nel rispetto delle "ipotesi iniziali" (v. slide 2), consideriamo una trave, eventualmente parte di un generico sistema strutturale



Sezione trasversale



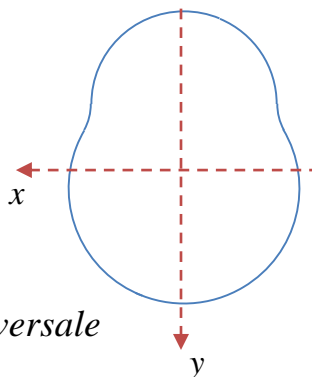
1. ipotesi sul campo di spostamento



Le ipotesi cinematiche su cui si basa la teoria tecnica rappresentano una semplificazione basata su evidenze sperimentali.

Si suppone che, nel processo deformativo, le sezioni trasversali della trave:

1. si mantengano piane;
2. si mantengano rigide nel loro piano;

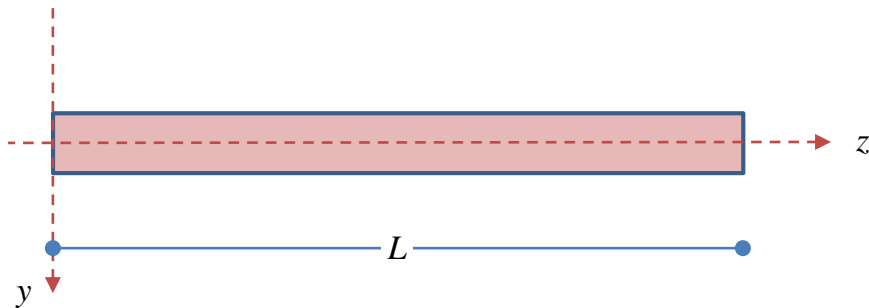


Sezione trasversale

Si osservi che la seconda ipotesi è più forte di quella formulata per lo studio della flessione nella trave di de Saint Venant, ma vedremo che ha le medesime implicazioni pratiche ai fini dello sviluppo della teoria strutturale.



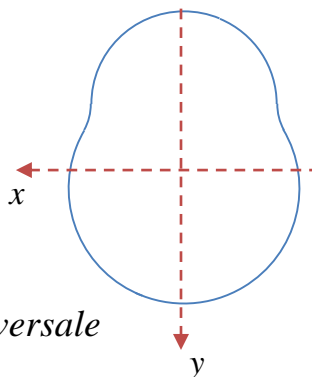
1. ipotesi sul campo di spostamento



La seconda delle precedenti ipotesi implica che, in un generico punto materiale della trave, le componenti di deformazione rispetto al sistema di riferimento indicato in figura sono tali che

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \quad (1)$$

Indicando con $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$ le componenti di spostamento di un generico punto materiale $P \equiv (x,y,z)$ rispettivamente in direzione x , y e z , le (1) implicano che



Sezione trasversale

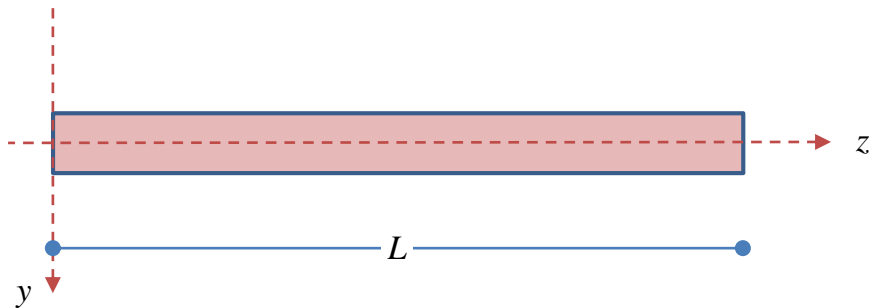
$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(y,z)$$

$$\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} = 0 \rightarrow v = v(x,z) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,z)}{\partial x} = 0$$



1. ipotesi sul campo di spostamento



Indichiamo con

$$u_0(z) \quad v_0(z) \quad w_0(z) \quad (3)$$

le componenti di spostamento del baricentro di una generica sezione trasversale della trave in esame avente scissa z , e con

$$\varphi_x(z) \quad \varphi_y(z) \quad \theta(z) \quad (4)$$

le rotazioni (infinitesime) di tale sezione trasversale rispetto agli assi x , y e z rispettivamente.

Si dimostra facilmente che, a meno di moti rigidi e nell'ipotesi di piccole deformazioni, il più generico campo di spostamenti compatibile con le precedenti ipotesi può essere espresso come segue:

$$u(y, z) = u_0(z) - \theta(z)y$$

$$v(x, z) = v_0(z) + \theta(z)x \quad (5)$$

$$w(x, y, z) = w_0(z) + \varphi_x(z)y - \varphi_y(z)x$$

Gli spostamenti di un generico punto materiale possono allora essere determinati attraverso le componenti di spostamento (3) e (4) che pertanto possono essere utilizzate come misure dello spostamento di tutti i punti della trave.



2.a misure di sollecitazione in equilibrio con i carichi

Sono state già introdotte le caratteristiche della sollecitazione come misure (componenti della risultante e del momento risultante relativo al baricentro della sezione) dello stato di sollecitazione presente in una generica sezione trasversale. In particolare, le caratteristiche della sollecitazione sono state definite come segue:

$$\begin{aligned} N(z) &= \int_A \sigma_z dA && \text{Sforzo normale} \\ T_y \Rightarrow T(z) &= \int_A \tau_{zy} dA && \text{Taglio} \\ M_x \Rightarrow M(z) &= \int_A \sigma_z y dA && \text{Momento flettente} \\ M_t(z) &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA && \text{Momento torcente} \end{aligned} \tag{6}$$

Nei telai piani (ipotesi formulate nella slide 2) sono inoltre verificate le seguenti relazioni

$$T_x(z) = \int_A \tau_{zx} dA = 0 \quad M_y(z) = - \int_A \sigma_z x dA = 0 \tag{7}$$



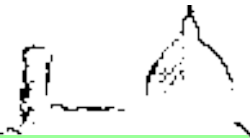
2.a misure di sollecitazione in equilibrio con i carichi

Le equazioni di equilibrio (per trave ad asse rettilineo o a piccola curvatura) tra le precedenti componenti di sollecitazione ed i carichi esterni possono essere espresse come segue:

$$\begin{aligned}
 \Delta N &= -F_x & N'(z) &= -n(z) \\
 \Delta T &= -F_y & \Delta M' &= -F_y & T'(z) &= -q(z) \\
 \Delta M &= -\mathcal{M} & M'(z) &= T(z) \\
 \Delta M_t &= -\mathcal{W} & M_t'(z) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Si osservi che le precedenti equazioni di equilibrio:

- sono "globali" in quanto coinvolgono misure "globali" di sollecitazione (ossia gli integrali delle tensioni $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$);
- non contengono informazioni circa le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} che pure possono essere presenti nella sezione trasversale. Tali componenti di tensione resteranno indeterminate. In ogni caso esse sono influenti ai fini dello sviluppo della teoria che stiamo trattando ed in genere hanno, nelle applicazioni pratiche, valori trascurabili rispetto alle altre componenti di tensione (tranne al più in alcuni punti particolari della struttura come ad esempio quelli in cui sono direttamente applicati i carichi).



2.b misure di deformazione congruenti con gli spostamenti

Dalle (5) si calcolano le seguenti componenti di deformazione:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0(z)}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_x(z)}{\partial z} y - \frac{\partial \varphi_y(z)}{\partial z} x \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi_y(z) + \frac{\partial u_0(z)}{\partial z} - \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} y \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \gamma_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi_x(z) + \frac{\partial v_0(z)}{\partial z} + \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} x
\end{aligned} \tag{9}$$

Introducendo le seguenti quantità

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(z) &= \frac{\partial w_0(z)}{\partial z} & \text{Deformazione longitudinale della fibra baricentrica} \\
\chi_x(z) &= \frac{\partial \varphi_x(z)}{\partial z} & \text{Curvature} \\
\hat{\gamma}_{zx}(z) &= -\varphi_y(z) + \frac{\partial u_0(z)}{\partial z} & \text{Scorrimento angolare dovuto al taglio} \\
\hat{\gamma}_{zy}(z) &= \varphi_x(z) + \frac{\partial v_0(z)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{10}$$

ed indicando con un apice la derivata prima di una funzione rispetto a z , le (9) possono essere scritte in maniera più compatta come segue:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= 0 & \varepsilon_z &= \varepsilon_0(z) + \chi_x(z)y - \chi_y(z)x \\
\varepsilon_y &= 0 & \gamma_{zx} &= \hat{\gamma}_{zx} - \theta'(z)y \\
\gamma_{xy} &= 0 & \gamma_{zy} &= \hat{\gamma}_{zy} + \theta'(z)x
\end{aligned} \tag{11}$$



2.b misure di deformazione congruenti con gli spostamenti

Si osservi che le deformazioni definite nelle (11) sono congruenti con gli spostamenti (5). Esse sono delle misure "locali" di deformazione, ossia misurano la deformazione presente in un particolare punto materiale del solido.

Vogliamo adesso definire delle misure "globali" di deformazione, "energeticamente duali" alle caratteristiche della sollecitazione, ossia tali che il lavoro virtuale interno possa essere determinato come integrale del prodotto tra le caratteristiche della sollecitazione per tali misure di deformazione.



2.b misure di deformazione congruenti con gli spostamenti

Siano dati, su una trave, un sistema di carichi-tensioni equilibrato ed un sistema di spostamenti-deformazioni congruente come indicato in figura, anche indipendenti tra loro

Azioni

carichi distribuiti: $n^{(f)}(z) \quad q^{(f)}(z)$
 forze concentrate: $F_z^{(f)} \quad F_y^{(f)}$
 coppie concentrate: $\mathcal{M}^{(f)} \quad \mathcal{W}^{(f)}$

Spostamenti

$u^{(s)} \quad v^{(s)} \quad w^{(s)}$

equilibrio

congruenza

Tensioni

$\sigma_x^{(f)} \quad \sigma_y^{(f)} \quad \sigma_z^{(f)} \quad \tau_{zx}^{(f)} \quad \tau_{zy}^{(f)} \quad \tau_{xy}^{(f)}$

Deformazioni

$\varepsilon_x^{(s)} \quad \varepsilon_y^{(s)} \quad \varepsilon_z^{(s)} \quad \gamma_{zx}^{(s)} \quad \gamma_{zy}^{(s)} \quad \gamma_{xy}^{(s)}$

Essi allora soddisfano l'equazione dei lavori virtuali

$$Lvi = Lve \quad \int_B tr(\underline{\sigma}^{(f)} \cdot \underline{\varepsilon}^{(s)}) dv = \int_B \mathbf{b}^{(f)} \cdot \mathbf{u}^{(s)} dv + \int_{\partial B_f} \mathbf{p}^{(f)} \cdot \mathbf{u}^{(s)} ds + \int_{\partial B_u} \mathbf{r}^{(f)} \cdot \bar{\mathbf{u}} ds$$



2.b misure di deformazione congruenti con gli spostamenti

Particolarizziamo l'espressione del lavoro virtuale interno ai sistemi strutturali che stiamo considerando (travi). Esplicitamente esso si scrive come segue:

$$Lvi = \int_B \sigma_x^{(f)} \varepsilon_x^{(s)} + \sigma_y^{(f)} \varepsilon_y^{(s)} + \sigma_z^{(f)} \varepsilon_z^{(s)} + \tau_{xy}^{(f)} \gamma_{xy}^{(s)} + \tau_{zx}^{(f)} \gamma_{zx}^{(s)} + \tau_{zy}^{(f)} \gamma_{zy}^{(s)} dv$$

Sostituendo le (11) nella precedente espressione ed esplicitando l'integrale di volume si ottiene

$$Lvi = \int_0^L \left(\int_A \sigma_z^{(f)} (\varepsilon_0^{(s)}(z) + \chi_x^{(s)}(z)y - \chi_y^{(s)}(z)x) + \tau_{zx}^{(f)} \hat{\gamma}_{zx}^{(s)}(z) + \tau_{zy}^{(f)} \hat{\gamma}_{zy}^{(s)}(z) + (\tau_{zy}^{(f)}x - \tau_{zx}^{(f)}y) \theta'^{(s)}(z) dA \right) dz$$

Esplicitando l'integrale sulla sezione trasversale ed utilizzando le (6) e (7) si ha

$$\begin{aligned} Lvi &= \int_0^L \left(\varepsilon_0^{(s)}(z) \int_A \sigma_z^{(f)} dA + \chi_x^{(s)}(z) \int_A \sigma_z^{(f)} y dA - \chi_y^{(s)}(z) \int_A \sigma_z^{(f)} x dA + \hat{\gamma}_{zx}^{(s)}(z) \int_A \tau_{zx}^{(f)} dA + \hat{\gamma}_{zy}^{(s)}(z) \int_A \tau_{zy}^{(f)} dA + \theta'^{(s)}(z) \int_A (\tau_{zy}^{(f)}x - \tau_{zx}^{(f)}y) dA \right) dz = \\ &= \int_0^L N^{(f)}(z) \cdot \varepsilon_0^{(s)}(z) + M_x^{(f)}(z) \cdot \chi_x^{(s)}(z) + T_y^{(s)}(z) \cdot \hat{\gamma}_{zy}^{(s)}(z) + M_t^{(f)}(z) \cdot \theta'^{(s)}(z) dz \quad (\text{N.B. per ip. } T_x=0, M_y=0) \quad (12) \end{aligned}$$

La precedente rappresenta l'espressione del lavoro virtuale interno per le travi (o sistemi di travi) caricate su un piano. Si vede che le deformazioni (10) e la curvatura torsionale sono energeticamente duali alle caratteristiche della sollecitazione.



2.b misure di deformazione congruenti con gli spostamenti

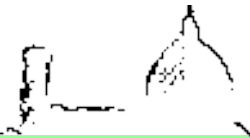
Si dimostra che per i sistemi strutturali in esame, in accordo con le equazioni di equilibrio (8), il lavoro virtuale esterno può essere calcolato come segue:

$$Lve = \int_0^L \left(n^{(f)}(z) \cdot w_0^{(s)}(z) + q^{(f)}(z) \cdot v_0^{(s)}(z) \right) dz + \sum_i F_z^{(f)} \cdot w_0^{(s)} + \sum_j F_y^{(f)} \cdot v_0^{(s)} + \sum_h M^{(f)} \cdot \phi_x^{(s)} + \sum_k W^{(f)} \cdot \theta^{(s)} \quad (13)$$

Pertanto esso è pari all'integrale, esteso all'asse della trave, dei carichi distribuiti moltiplicati per gli spostamenti baricentrici, più la sommatoria delle forze (momenti) concentrati per gli spostamenti (rotazioni) dei punti in cui sono applicate tali azioni. Tra le azioni concentrate si devono considerare sia quelle **attive** (carichi esterni) che quelle **reattive** (reazioni vincolari). Ovviamente, il contributo di queste ultime sarà nullo per sistemi a vincoli fissi.

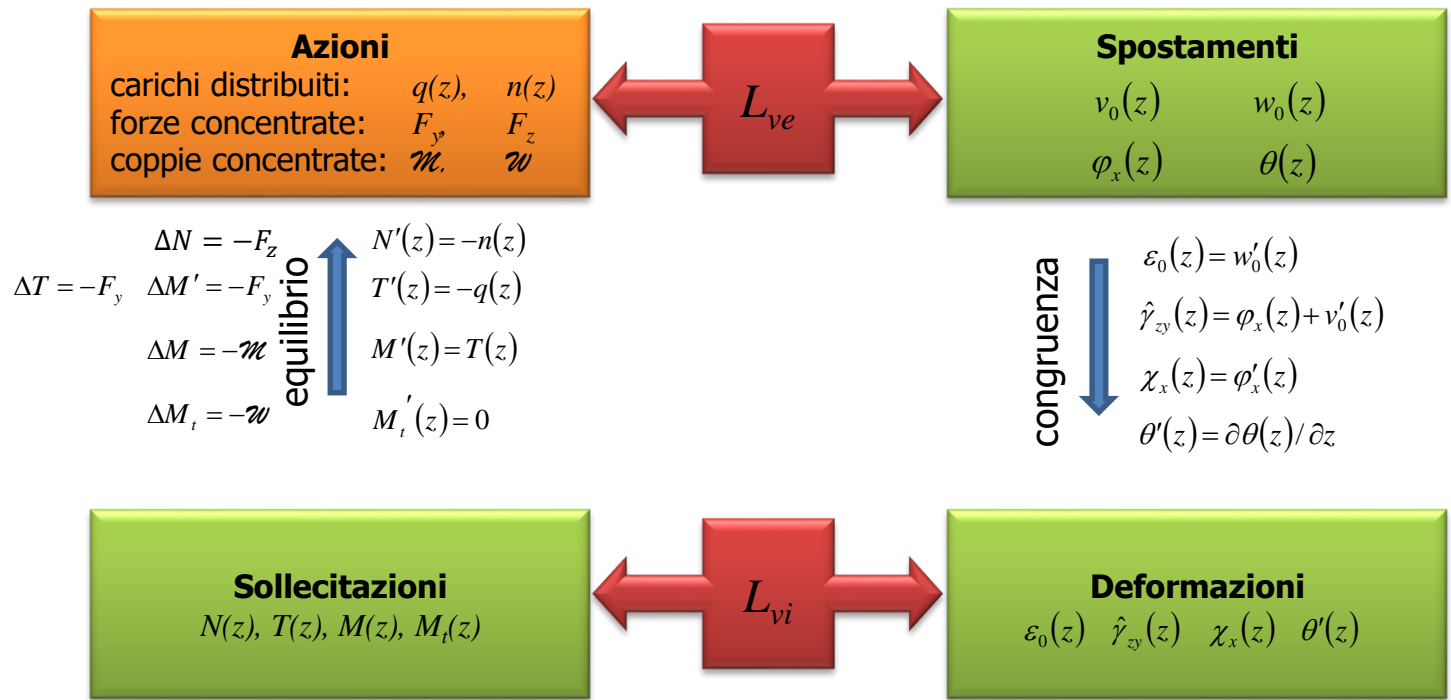
Per i sistemi strutturali formati da più travi, per le proprietà di additività degli integrali sul dominio di integrazione, i lavori virtuali interno ed esterno si determinano sommando quanto calcolato attraverso la (12) e la (13) per le singole travi che li compongono.

Dalla (13) si vede che i carichi esterni sono energeticamente duali agli spostamenti baricentrici. Pertanto il problema strutturale dei telai piani può essere espresso in funzione delle variabili (energeticamente duali) descritte nella prossima slide.



Le variabili del problema strutturale dei telai piani

- Dati
- Incognite





3.a legami costitutivi

Una delle due ipotesi cinematiche su cui si basa la teoria tecnica è che la sezione trasversale sia rigida nel suo piano.

Assumiamo adesso che in direzione assiale il materiale abbia un comportamento elastico lineare. In questo caso, se sottoponessimo una trave ad una prova di trazione (o compressione) assiale, questa si deformerebbe assialmente in accordo con la legge di Hooke. L'ipotesi cinematica di sezioni trasversali rigide nel loro piano implica però che, in condizioni di sollecitazioni assiali, non si ha strizione nella trave: di fatto, se il materiale fosse elastico lineare, è come se stessimo assumendo che il coefficiente di Poisson sia nullo. Dalle equazioni costitutive si calcola allora

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E(\varepsilon_z - \alpha \Delta t) \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\end{aligned}\tag{14}$$

Si osservi che, per il problema strutturale che stiamo analizzando, non è possibile calcolare le altre componenti di tensione attraverso i legami costitutivi in quanto, nelle altre direzioni, abbiamo ipotizzato che il materiale sia rigido.

Per quanto detto, assumiamo che il comportamento meccanico del materiale in esame sia schematizzabile attraverso le (14).



3.b equazioni di equilibrio

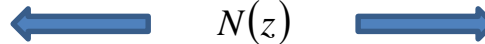
Imponendo le (6), assumendo che gli assi x ed y siano **principali d'inerzia** per la sezione trasversale, in assenza di azioni termiche ed ipotizzando che la trave sia in materiale omogeneo ed a sezione costante, attraverso semplici considerazioni (generalizzazione del solido di de Saint-Venant) si ottengono le seguenti espressioni per le tensioni presenti nelle sezioni trasversali e per le misure di deformazione "globale":

Tensioni

Sollecitazione

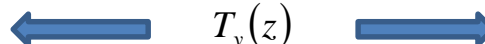
Deformazioni

$$\sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A}$$



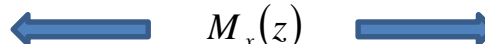
$$\varepsilon_0(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\bar{\tau}_{zs}(z) = \frac{T_y(z) \cdot S_x^{(A_2)}}{b \cdot I_x} = - \frac{T_y(z) \cdot S_x^{(A_1)}}{b \cdot I_x}$$



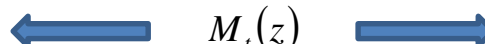
$$\hat{\gamma} = \frac{T_y}{k_y G A}$$

$$\sigma_z(z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y$$



$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} = \frac{1}{\rho_x(z)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} R; \quad \tau_{\max}(s) = \frac{M_z}{J} \delta(s); \quad \bar{v}(s) = \frac{M_z}{2\Omega \delta(s)}$$



$$\theta'(z) = \frac{M_z(z)}{GJ}$$

(15)

Le tensioni calcolate attraverso le precedenti relazioni possono essere utilizzate nei problemi di verifica (o progetto) per resistenza. Le relazioni tra sollecitazioni e deformazioni "globali" rappresentano i legami costitutivi.



3.b equazioni di equilibrio

Le precedenti relazioni differiscono da quelle determinate all'interno della teoria del solido di de Saint Venant solo in quanto le caratteristiche della sollecitazione a cui si riferiscono sono variabili lungo l'asse della trave con una legge qualunque.



Influenza degli effetti termici

In presenza di azioni termiche, le relazioni costitutive relative allo sforzo normale ed al momento flettente si modificano come segue:

- *Sforzo normale:*

sostituendo la prima delle (14) nella prima delle (6), utilizzando l'espressione delle deformazioni assiali ε_z definita nelle (11) ed ipotizzando che la trave sia in materiale omogeneo e che gli assi x ed y siano baricentrici e principali d'inerzia per la sezione trasversale, si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} N(z) &= \int_A \sigma_z dA = E \int_A (\varepsilon_z - \alpha \Delta t) dA = EA \varepsilon_0(z) - E\alpha \int_A \Delta t dA \\ \rightarrow \varepsilon_0(z) &= \frac{N(z)}{EA} + \frac{\alpha}{A} \int_A \Delta t dA = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_0^{(a)}(z) \end{aligned} \quad (16)$$

Pertanto la deformazione assiale totale è pari alla somma di una parte elastica, che dipende dallo sforzo normale attraverso il modulo elastico del materiale, e di una anelastica che dipende invece dalla particolare distribuzione di variazioni termiche presenti sulla sezione trasversale in esame.



Influenza degli effetti termici

- *Momento flettente:*

sostituendo la prima delle (14) nella terza delle (6), utilizzando l'espressione delle deformazioni assiali ε_z definita nelle (11) ed ipotizzando ancora che la trave sia in materiale omogeneo e che gli assi x ed y siano baricentrici e principali d'inerzia per la sezione trasversale, si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z y dA = E \int_A (\varepsilon_z - \alpha \Delta t) y dA = E I_x \chi_x(z) - E \alpha \int_A \Delta t y dA \\ \rightarrow \chi_x(z) &= \frac{M_x(z)}{E I_x} + \frac{\alpha}{I_x} \int_A \Delta t y dA = \frac{M_x(z)}{E I_x} + \chi_x^{(a)}(z) \end{aligned} \quad (17)$$

Pertanto anche $\chi_z(z)$ è pari alla somma di una parte elastica, dipendente dalla sollecitazione attraverso le proprietà elastiche del materiale, e di una anelastica che dipende dalla particolare distribuzione di variazioni termiche presenti sulla sezione trasversale in esame.

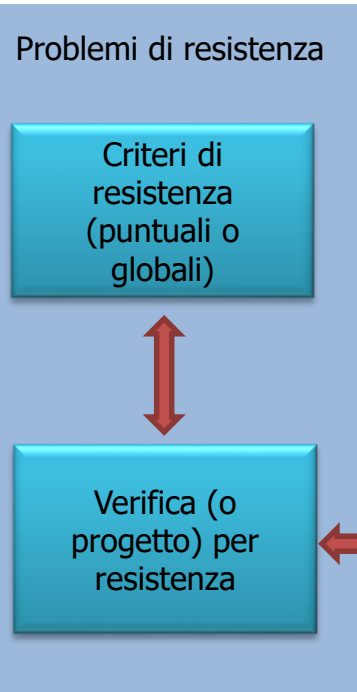
In questa maniera abbiamo completamente definito le variabili e le equazioni del problema strutturale in esame. Queste vengono schematizzate nella prossima slide.



Facoltà di Architettura

Teoria tecnica: definizione del problema strutturale

- Dati
- Incognite



Azioni

carichi distribuiti: $q(z), n(z)$
 forze concentrate: F_y, F_z
 coppie concentrate: \mathcal{M}, \mathcal{W}

$\Delta N = -F_z$
 $\Delta T = -F_y$
 $\Delta M = -\mathcal{M}$
 $\Delta M_t = -\mathcal{W}$

↑ equilibrio

$N'(z) = -n(z)$
 $T'(z) = -q(z)$
 $M'(z) = T(z)$
 $M_t'(z) = 0$

Sollecitazioni

$N(z), T_y(z), M_x(z), M_t(z)$

Problemi di rigidezza

Spostamenti

$v_0(z) \quad w_0(z)$
 $\varphi_x(z) \quad \theta(z)$

legami costitutivi

$\varepsilon_0(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_0^{(a)}(z)$
 $\theta'(z) = \frac{M_x(z)}{GJ}$
 $\hat{\gamma} = \frac{T_y}{k_y GA}$
 $\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$

↓ congruenza

$\varepsilon_0(z) = w_0'(z)$
 $\hat{\gamma}_{zy}(z) = \varphi_x(z) + v_0'(z)$
 $\chi_x(z) = \varphi_x'(z)$
 $\theta'(z) = \partial\theta(z)/\partial z$

Deformazioni

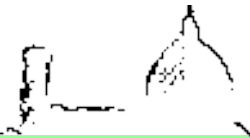
$\varepsilon_0(z) \quad \hat{\gamma}_{zy}(z) \quad \chi_x(z) \quad \theta'(z)$



Teoria tecnica: definizione del problema strutturale

Si osservi che:

- le equazioni che governano il problema assiale, così come quelle che governano il problema torsionale, sono disaccoppiate dalle altre equazioni del problema strutturale in esame;
- le equazioni che governano la parte flessionale sono accoppiate con quelle relative alla parte tagliante.



Teoria tecnica: definizione del problema strutturale

Pertanto il problema strutturale delle travi sollecitate nel piano può essere suddiviso nei seguenti sottoproblemi, tra loro disaccoppiati (e quindi risolvibili singolarmente):

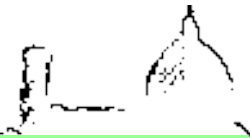
Equazioni		sotto-problema		
		Assiale	Flesso-tagliante	Torsionale
Equilibrio	Discontinuità	$\Delta N = -F_x$	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$	$\Delta M_t = -\mathcal{W}$
	Equazioni indefinite	$N'(z) = -n(z)$	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$	$M_t'(z) = 0$
Legame costitutivo		$\varepsilon_0(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_0^{(a)}(z)$	$\hat{\gamma} = \frac{T_y}{k_y G A}$ $\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$	$\theta'(z) = \frac{M_t(z)}{GJ}$
Congruenza		$\varepsilon_0(z) = w_0'(z)$	$\hat{\gamma}_{\varphi_y}(z) = \varphi_x(z) + v_0'(z)$ $\chi_x(z) = \varphi_x'(z)$	$\theta'(z) = \partial\theta(z)/\partial z$

(18)

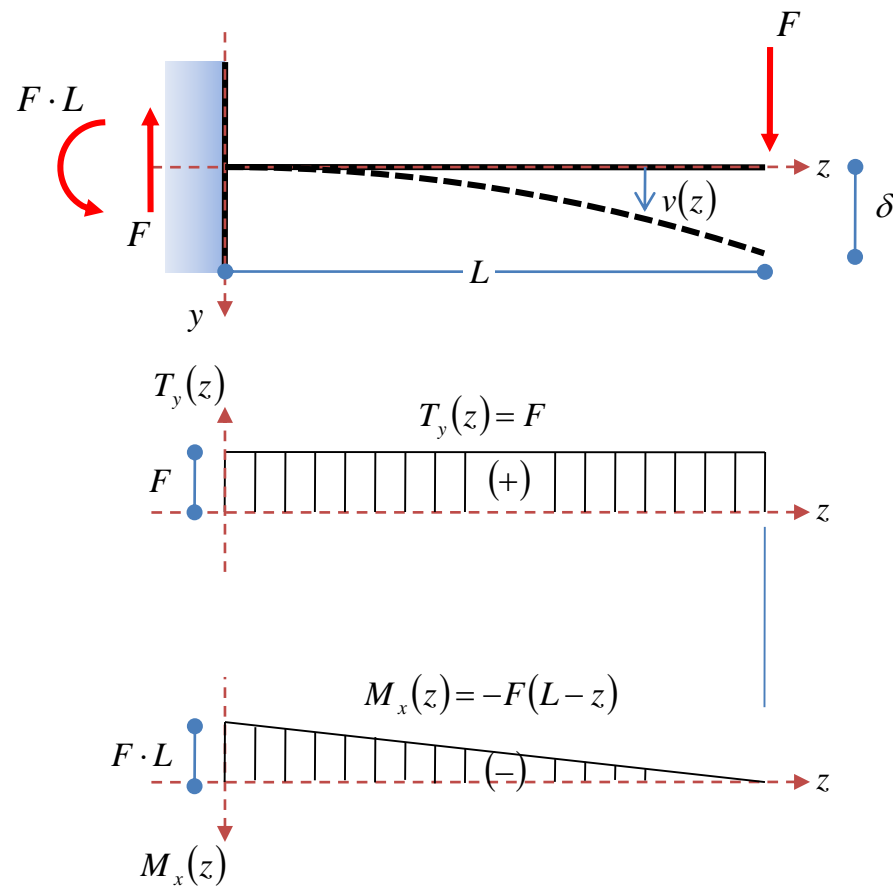


Teoria tecnica della trave

Travi “snelle”



Travi snelle



Con riferimento a una trave a mensola caricata in corrispondenza dell'estremo libero da una forza concentrata, si è visto che per travi "abbastanza" snelle (ossia aventi orientativamente luce maggiore di dieci volte la massima dimensione della sezione trasversale) sollecitate a flessione e taglio, il contributo della deformabilità a taglio è trascurabile rispetto a quello flessionale.

$$\frac{\delta^{(T)}}{\delta^{(M)}} = \frac{\frac{FL}{k_y G A}}{\frac{FL^3}{3EI_x}} = \frac{3E}{k_y G} \left(\frac{\rho_x}{L} \right)^2$$

$$\xi = \frac{L}{\rho_x} \qquad \frac{\delta^{(T)}}{\delta^{(M)}} = \frac{3E}{k_y G} \frac{1}{\xi^2}$$

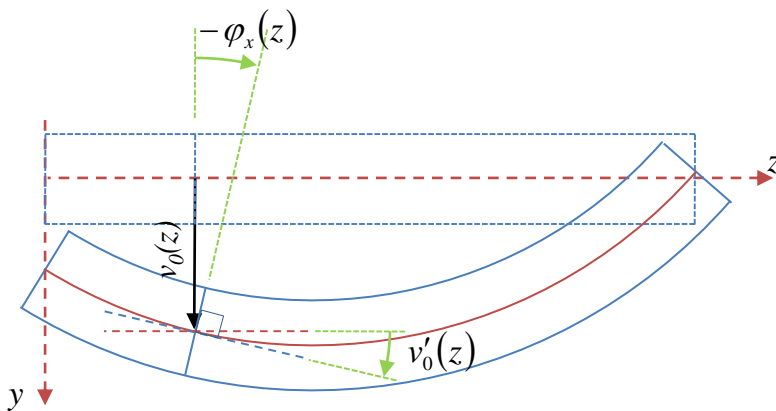


Travi snelle

Per tale motivo, di norma la deformabilità a taglio delle travi snelle è trascurata rispetto a quella flessionale. In pratica per questo tipo di travi si può porre la seguente condizione:

$$\hat{\gamma}_{zy}(z) \cong 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_x(z) \cong -v_0'(z) \quad (19)$$

la quale equivale ad ipotizzare che, nel processo deformativo, le sezioni trasversali non hanno scorrimenti rispetto all'asse della trave e quindi si mantengono sempre ortogonali ad esso come indicato in figura. In questo caso, e nell'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, la curvatura flessionale (riferita alla linea d'asse della trave) può essere calcolata come segue:



$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{v_0''(z)}{(1-v_0''(z))^{3/2}} \cong v_0''(z) = -\varphi_x'(z) = -\chi_x(z) \quad (20)$$

Pertanto, in questo caso $\chi_x(z) = \varphi_x'(z)$ è (circa) uguale (e opposto) alla curvatura dell'asse geometrico della trave.



Travi snelle

In questo caso, allora, le equazioni di congruenza del problema flesso-tagliante si modificano come indicato nella presente slide.

Equazioni		sotto-problema		
		Assiale	Flesso-tagliante	Torsionale
Equilibrio	Discontinuità	$\Delta N = -F_x$	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$	$\Delta M_t = -\mathcal{W}$
	Equazioni indefinite	$N'(z) = -n(z)$	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$	$M_t'(z) = 0$
Legame costitutivo		$\varepsilon_0(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_0^{(a)}(z)$	$\hat{\gamma} = \frac{T_y}{k_y G A}$ $\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$	$\theta'(z) = \frac{M_z(z)}{GJ}$
Congruenza		$\varepsilon_0(z) = w_0'(z)$	$\varphi_x(z) \cong -v_0'(z)$ $\chi_x(z) = \varphi_x'(z)$	$\theta'(z) = \partial\theta(z)/\partial z$

(21)



Travi snelle

Inoltre, per i telai piani formati da travi snelle, il termine dipendente dal taglio nell'espressione del lavoro virtuale interno (12) può essere trascurato in quanto, seppur presente la sollecitazione tagliante, la deformazione a taglio è assunta nulla.

N.B. Nel seguito ci riferiremo a travi snelle, per le quali valgono le (21)



Teoria tecnica della trave

Deformazioni dovute a particolari variazioni termiche



Influenza degli effetti termici

Sono state determinate le seguenti relazioni

$$\varepsilon_0(z) = \varepsilon_0^{(e)}(z) + \varepsilon_0^{(a)}(z) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_0^{(e)}(z) = \frac{N(z)}{EA} \\ \varepsilon_0^{(a)}(z) = \frac{\alpha}{A} \int_A \Delta t \, dA \end{cases} \quad (16)$$

$$\chi_x(z) = \chi_x^{(e)}(z) + \chi_x^{(a)}(z) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \chi_x^{(e)}(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} \\ \chi_x^{(a)}(z) = \frac{\alpha}{I_x} \int_A \Delta t \, y \, dA \end{cases} \quad (17)$$

Di seguito verrà determinata l'espressione esplicita delle componenti di deformazione anelastica per particolari distribuzioni di variazioni termiche.

N.B. anticipiamo che, per



Particolari distribuzioni di variazioni termiche

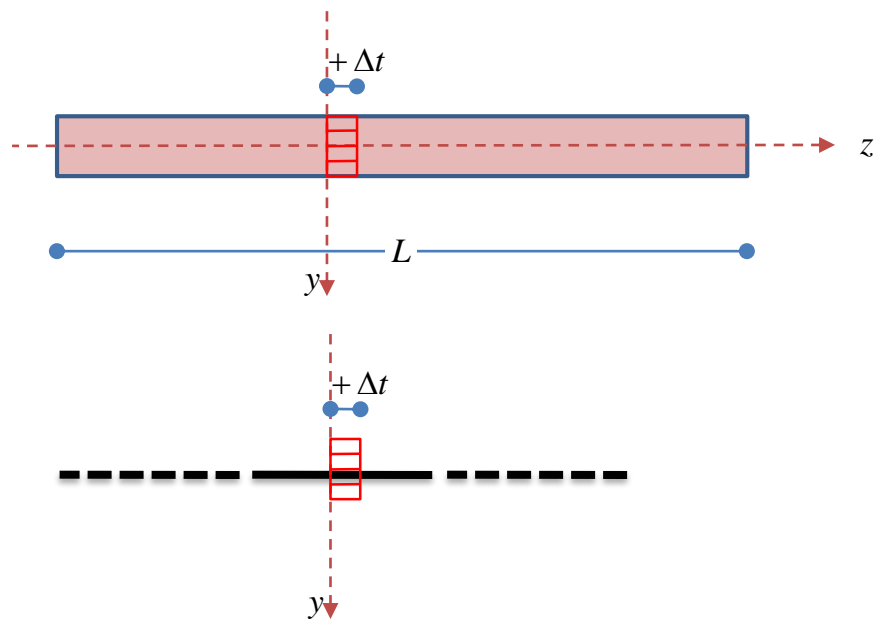
In molti problemi pratici, le variazioni termiche presenti in una generica sezione trasversale di una trave possono essere approssimate come combinazione (per il principio di sovrapposizione degli effetti) dei seguenti tipi:

- variazione termica uniforme su tutta la sezione trasversale;
- variazione termica variabile linearmente lungo l'altezza della trave, nulla in corrispondenza della fibra baricentrica;

Le precedenti variazioni termiche sono quelle che verranno considerate nel seguito.

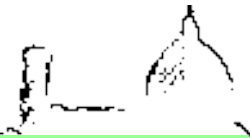


1. Variazione termica uniforme sulla sezione

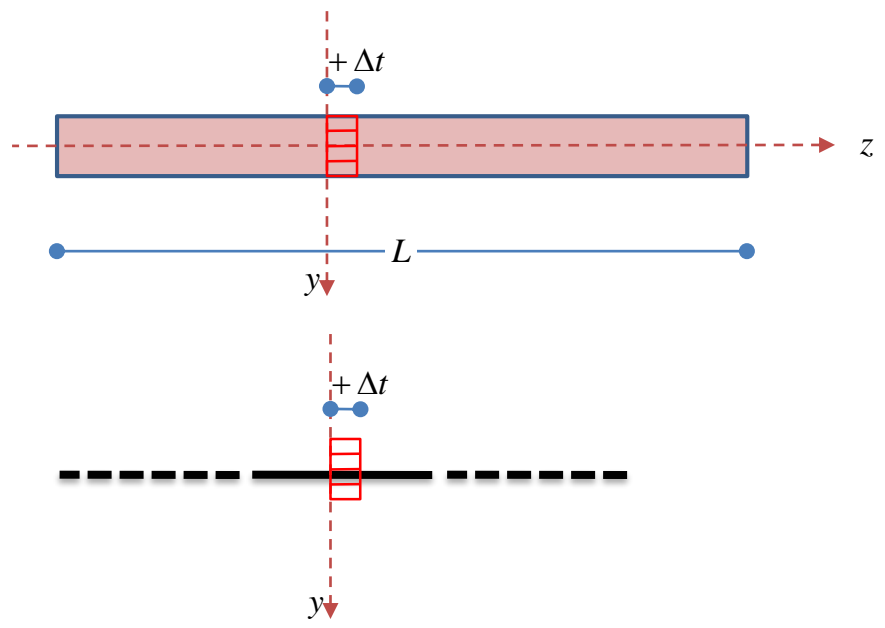


Si calcolino i termini anelastici presenti nella (16) e nella (17) corrispondenti ad una variazione termica uniforme su una sezione trasversale.

Per ipotesi, gli assi x ed y del sistema di riferimento indicato in figura sono baricentrici e principali d'inerzia per le sezioni trasversali della trave.



1. Variazione termica uniforme sulla sezione



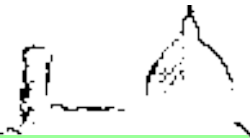
Soluzione:

$$\varepsilon_0^{(a)}(z) = \frac{\alpha}{A} \int_A \Delta t \, dA = \frac{\alpha \Delta t}{A} \int_A dA = \alpha \Delta t \tag{22}$$

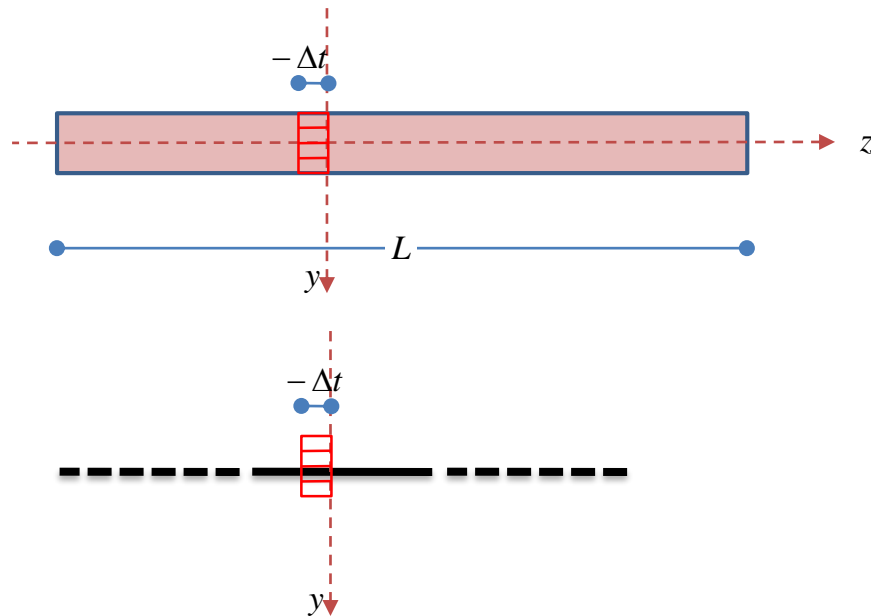
$$\chi_x^{(a)}(z) = \frac{\alpha}{I_x} \int_A \Delta t \, y \, dA = \frac{\alpha \Delta t}{I_x} \int_A y \, dA = 0$$

Una variazione termica uniforme positiva (riscaldamento) presente su tutta la trave ne produce allora solo un allungamento e non ha effetti sulla curvatura. L'allungamento totale di una trave libera e sottoposta ad una variazione di temperatura uniforme è pari a

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon_0^{(a)}(z) \, dz = \alpha \Delta t L$$



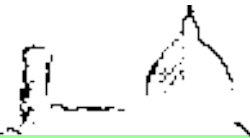
1. Variazione termica uniforme sulla sezione



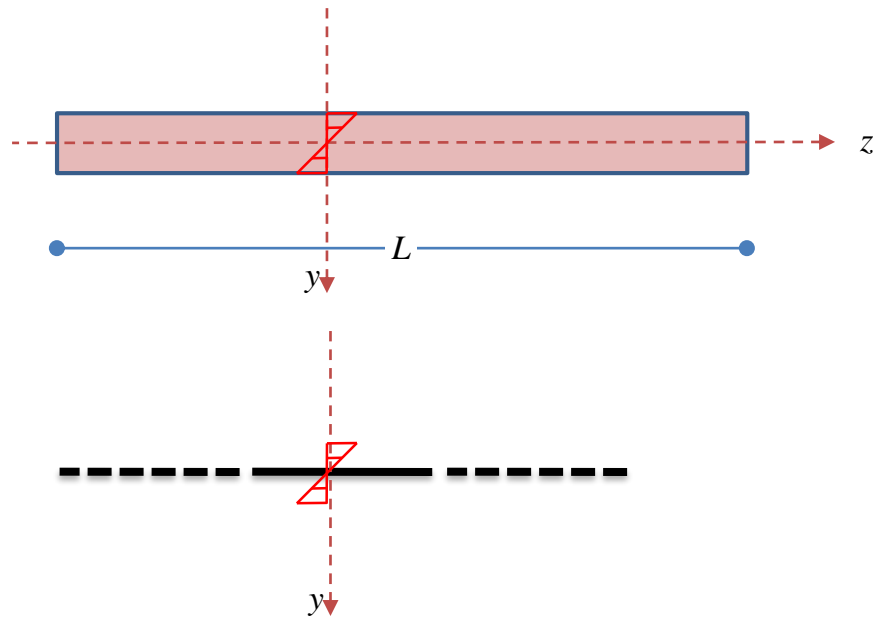
Si osservi che, per variazioni termiche negative (raffreddamento), le precedenti relazioni si scrivono semplicemente come segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(a)}(z) &= \frac{\alpha}{A} \int_A -\Delta t \, dA = -\frac{\alpha \Delta t}{A} \int_A dA = -\alpha \Delta t \\ \chi_x^{(a)}(z) &= -\frac{\alpha}{I_x} \int_A \Delta t \, y \, dA = -\frac{\alpha \Delta t}{I_x} \int_A y \, dA = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Pertanto in questo caso si ha un accorciamento della trave.



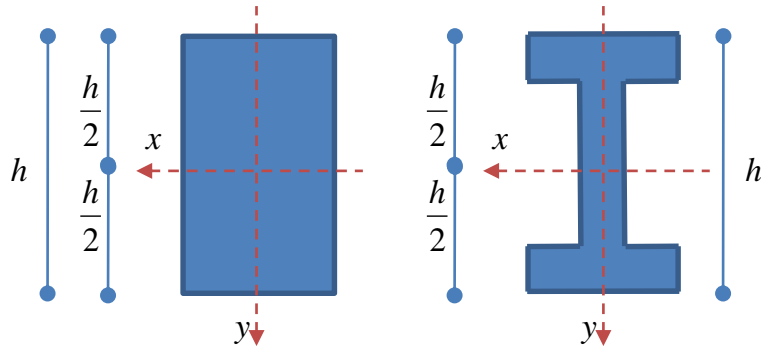
2. Variazione termica lineare sulla sezione



Si calcolino i termini anelastici presenti nella (16) e nella (17) corrispondenti ad una variazione termica variabile linearmente rispetto all'asse y , nulla in corrispondenza della fibra baricentrica avente $y=0$.



2. Variazione termica lineare sulla sezione



Indichiamo con y_{max} ed y_{min} rispettivamente le ordinate massime e minime dei punti della sezione trasversale e con h la sua altezza. Per chiarezza di esposizione è conveniente distinguere due tipi di sezione trasversale:

1. sezioni trasversali per le quali si ha

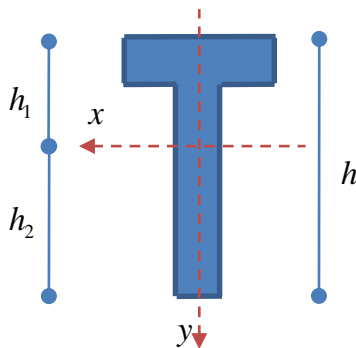
$$|y_{max}| = |y_{min}| = \frac{h}{2}$$

come ad esempio per le sezioni trasversali rettangolari, scatolari, a "doppio T", circolari ed a corona circolare;

2. sezioni trasversali per le quali si ha

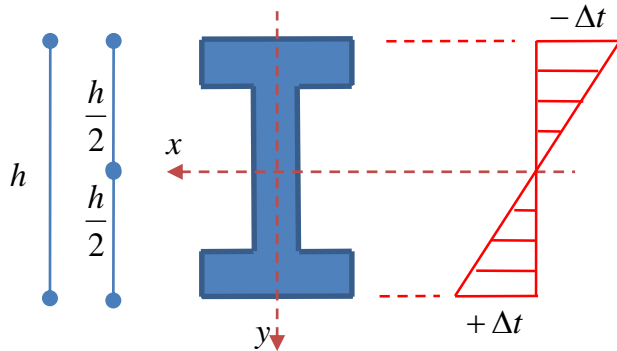
$$|y_{max}| \neq |y_{min}|$$

come ad esempio per la sezione a "T".





2. Variazione termica lineare sulla sezione



Consideriamo inizialmente una sezione per la quale si ha:

$$|y_{\max}| = |y_{\min}| = \frac{h}{2}$$

In questo caso una variazione termica lineare rispetto ad y e nulla in corrispondenza del baricentro è tale che il suo valore massimo sia uguale, in valore assoluto, a quello minimo come indicato in

figura. La legge di tale variazione termica è allora la seguente:

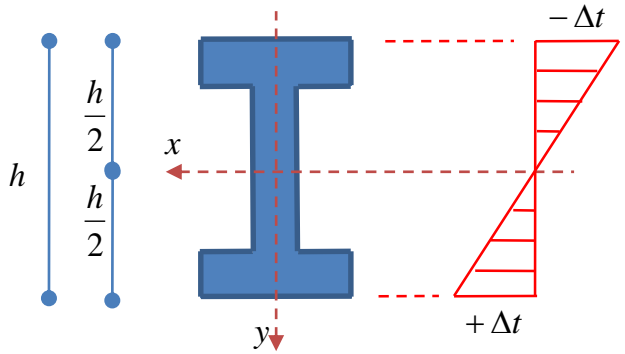
$$\Delta t(y) = \frac{2\Delta t}{h} y$$

alla quale corrispondono le seguenti deformazioni anelastiche (si ricordi che gli assi x ed y sono baricentrici e principali d'inerzia per la sezione)

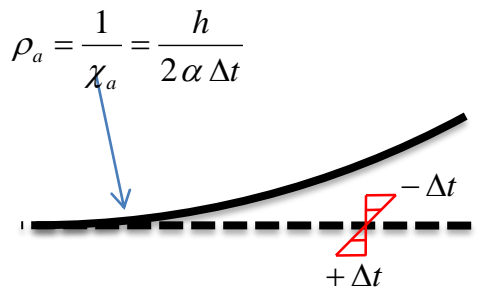
$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(a)}(z) &= \frac{\alpha}{A} \int_A \Delta t(y) dA = \frac{2\alpha \Delta t}{h} \frac{1}{A} \int_A y dA = 0 \\ \chi_x^{(a)}(z) &= \frac{\alpha}{I_x} \int_A \Delta t(y) y dA = \frac{2\alpha \Delta t}{h} \frac{1}{I_x} \int_A y^2 dA = \frac{2\alpha \Delta t}{h} \end{aligned} \quad (24)$$



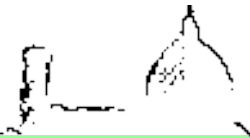
2. Variazione termica lineare sulla sezione



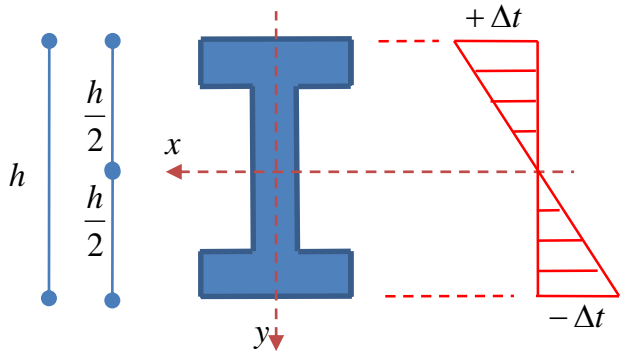
In questo caso allora l'asse della trave non subisce allungamenti, ma si incurva (anelasticamente). La deformata (a meno di moti rigidi) di una trave (non vincolata) sottoposta per tutta la sua lunghezza ad una variazione termica del tipo descritto nella precedente slide è tale che si abbia allungamento delle fibre longitudinali aventi y positivo (allungamento delle fibre "inferiori") ed accorciamento delle fibre longitudinali aventi y negativa (le fibre "superiori" si accorciano) come indicato in figura.



Se tale variazione termica è costante rispetto a z , la trave si inflette con un raggio di curvatura costante come indicato in figura (l'asse si deforma secondo un arco di circonferenza).

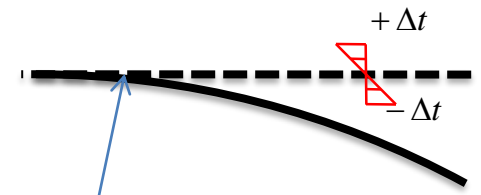


2. Variazione termica lineare sulla sezione



Nelle precedenti slide abbiamo considerato una distribuzione termica tale che si abbia un riscaldamento delle fibre inferiori ed un raffreddamento delle fibre superiori. Se, al contrario, tale distribuzione fosse tale che si abbia raffreddamento delle fibre inferiori e riscaldamento delle fibre superiori, la (24) si modificherebbero come segue

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(a)}(z) &= \frac{\alpha}{A} \int_A \Delta t(y) dA = -\frac{2\alpha \Delta t}{h} \frac{1}{A} \int y dA = 0 \\ \chi_x^{(a)}(z) &= \frac{\alpha}{I_x} \int_A \Delta t(y) y dA = -\frac{2\alpha \Delta t}{h} \frac{1}{I_x} \int y^2 dA = -\frac{2\alpha \Delta t}{h} \end{aligned} \quad (25)$$

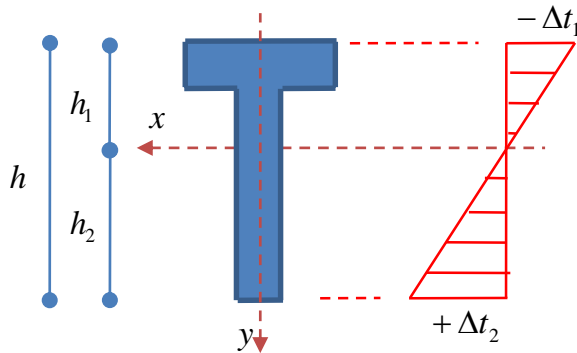


e la deformata della linea d'asse della trave sarebbe del tipo indicato in figura.

$$\rho_a = \frac{1}{\chi_a} = \frac{h}{2\alpha \Delta t}$$



2. Variazione termica lineare sulla sezione



Consideriamo adesso una sezione per la quale si abbia:

$$|y_{\max}| \neq |y_{\min}|$$

In questo caso una variazione termica lineare rispetto ad y e nulla in corrispondenza del baricentro è tale che

$$\frac{\Delta t_1}{h_1} = \frac{\Delta t_2}{h_2} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{h}$$

La legge di tale variazione termica è in questo caso la seguente:

$$\Delta t(y) = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{h} y$$

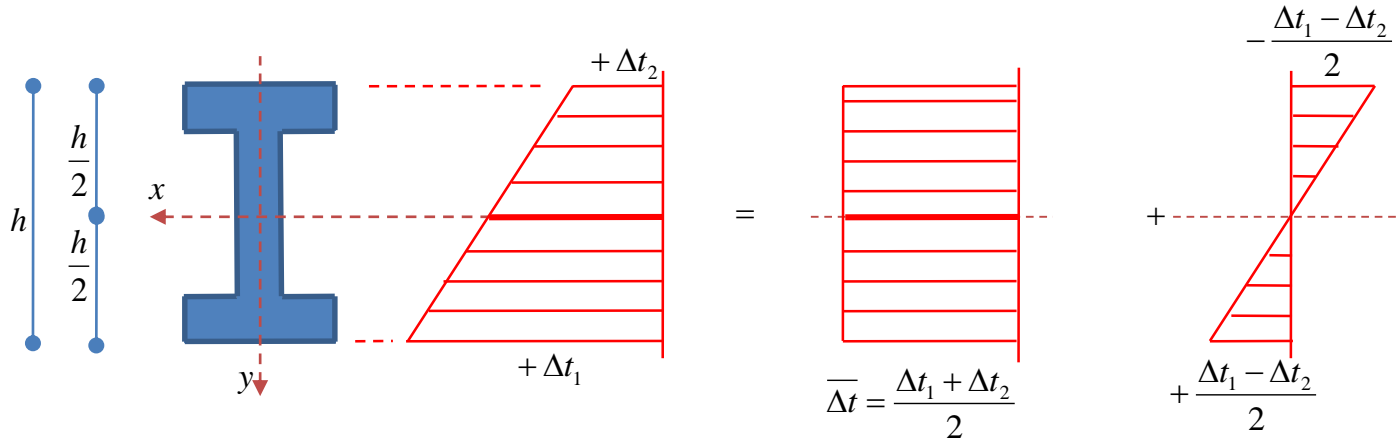
alla quale corrispondono le seguenti deformazioni anelastiche (si ricordi che gli assi x ed y sono baricentrici e principali d'inerzia per la sezione)

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(a)}(z) &= \frac{\alpha}{A} \int_A \Delta t(y) dA = \frac{\alpha (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{h} \frac{1}{A} \int_A y dA = 0 \\ \chi_x^{(a)}(z) &= \frac{\alpha}{I_x} \int_A \Delta t(y) y dA = \frac{\alpha (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{h} \frac{1}{I_x} \int_A y^2 dA = \frac{\alpha (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{h} \end{aligned} \quad (26)$$

Anche in questo caso allora l'asse della trave non subisce allungamenti e si incurva in maniera analoga a quanto descritto nelle precedenti slide.



Variazioni termiche lineari generiche



Si osservi che una variazione termica lineare generica è equivalente alla somma di una costante ed una lineare nulla in corrispondenza del baricentro come indicato in figura. Tali componenti di variazione termica producono singolarmente gli effetti indicati nelle precedenti slide che si sommano per il principio di sovrapposizione degli effetti.