0.1 Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrali generalizzati

In questo paragrafo estenderemo la nozione di integrabilità e di integrale a funzioni non limitate o definite su intervalli non limitati.
I) Integrale generalizzato su un intervallo limitato di funzioni non limitate in un numero finito di punti

Poniamo la seguente

Definizione 3. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione non limitata in un intorno del punto a. Diremo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ se*
i) per ogni $c \in]a, b[$, f è integrabile secondo Riemann in $[c, b]$,
ii) esiste finito il

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx, \tag{1}$$

in tale caso il limite (1) sarà chiamato **integrale generalizzato di f esteso all'intervallo** $[a, b]$ *e sarà indicato con*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

In modo analogo si pone la seguente

Definizione 4. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione non limitata in un intorno del punto b. Diremo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ se*
i) per ogni $c \in]a, b[$, f è integrabile secondo Riemann in $[a, c]$,
ii) esiste finito il

$$\lim_{c \to b^-} \int_c^b f(x)\, dx, \tag{2}$$

in tale caso il limite (1) sarà chiamato **integrale generalizzato di f esteso all'intervallo** $[a, b]$ *e sarà indicato con*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Osservazione 3. Si osservi il valore di un integrale generalizzato non dipende dal valore che f assume in a (nel caso in cui f non sia limitatata in un intorno di tale punto) e in b (nel caso in cui f non sia limitata in un intorno di tale punto). ♠

Osservazione 4. Si ricordi che dalla proposizione 12 segue immediatamente che se f è integrabile secondo Riemann nel'intervallo $[a, b]$ allora

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx,$$

dove tutti gli integrali, e in particolare $\int_a^b f(x)\,dx$, sono integrali secodo Riemann.♠

Esempio 1. Sia α un numero reale positivo e sia

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\ ,\ x \in \left]a, b\right].$$

f non è limitata in un intorno di a in quanto

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} = +\infty.$$

mostriamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ *se e solo se* $\alpha < 1$. (per l'Osservazione 3 f può essere definita in modo arbitrario in a).
Infatti, per ogni $c \in \left]a, b\right[$, f è integrabile secondo Riemann in $[c, b]$, poiché f è continua in tale intervallo. Ora, esaminiamo il

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx. \tag{3}$$

Se $\alpha \neq 1$ abbiamo

$$\int_c^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx = \left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^b = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(c-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Invece, se $\alpha = 1$ abbiamo

$$\int_c^b \frac{1}{x-a} dx = \left[\ln(x-a)\right]_c^b = \ln\frac{b-a}{c-a}.$$

Perciò

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx = \begin{cases} +\infty, \text{ se } \alpha \geq 1, \\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ se } \alpha < 1 \end{cases}$$

e ciò prova quanto asserito.♣

Esempio 2. In modo del tutto analogo si ha che la α un numero reale positivo e sia

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}\ ,\ x \in \left[a, b\right[.$$

Allora f non è limitata in un intorno di b e risulta integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ *se e solo se* $\alpha < 1$. (per l'Osservazione 3 f può essere definita in modo arbitrario in b).♣

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non è limitata in un intorno dei punti $x_1, x_2, ... x_n \in [a, b]$ con $x_1 < x_2 < ... < x_n$, la definizione di integrabilità in senso generalizzato può essere estesa nel modo seguente. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ mediante N intervalli $I_1, I_2, ..., I_N$, a due a due internamente disgiunti (cioè tali che $\overset{o}{I}_i \cap \overset{o}{I}_k =$

$\emptyset$ se $i \neq k$), tali che $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_N = [a,b]$ e tali che in ciascuno di questi intervalli f risulti non limitata al più in un intorno di uno degli estremi. Sia $I_i = [y_i, y_{i+1}]$, per $i = 1, 2, ..., N$. Diremo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ se f è integrabile in senso generalizzato o integrabile secondo Riemann in ciascuno degli intervalli $I_1, I_2, ..., I_N$ e porremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Si dimostra facilmente che l'integrabilità in senso generalizzato di f e il valore della somma nella (4) non dipendono dalla scelta della particolare suddivisione di $[a,b]$ mediane gli intervalli $I_1, I_2, ..., I_N$, pertanto la definizione è ben posta. Si osservi che nel caso particolare in cui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non è limitata sia in un intorno di a che di b (e soltanto in un intorno di tali punti), la definizione data sopra può essere riformulata come segue: f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ se considerato un arbitrario punto $d \in \,]a,b[$, f risulta integrabile in senso generalizzato in $[a,d]$ e in $[d,b]$ e in tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_d^b f(x)\,dx + \int_a^d f(x)\,dx.$$

Naturalmene anche in questo caso l'integrabiltà di f e il valore di $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sono indipendenti dalla scelta del punto d in $]a,b[$.

Esempio 3. Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\ ,\ x \in [0,2] \setminus \{1\}\,,$$

f definita in modo arbitrario nel punto 1. Mostriamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[0,2]$ e

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 0.$$

Infatti, come si deduce immediatamente dagli esempi 1 e 2, f risulta integrabile in senso generalizzato negli intervalli $[0,1]$ e $[1,2]$. Inoltre

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim_{c\to 1^-} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]_0^c$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{c\to 1^-}\left(\sqrt[3]{(c-1)^2} - 1\right) = -\frac{3}{2}$$

e, analogamente,

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \frac{3}{2}.$$

Quindi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.$$

♣

Esempio 4. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \ , \ x \in [-1,1] \setminus \{0\},$$

f definita in modo arbitrario nel punto 0. Mostriamo che f non è integrabile in senso generalizzato in $[-1,1]$

Infatti, come si deduce immediatamente dagli esempi 1 e 2, f risulta non integrabile in senso generalizzato negli intervalli $[-1,0]$ e $[0,1]$.♣

Esempio 5. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ x \in [-1,1] \setminus \{0\},$$

f definita in modo arbitrario nel punto 0. Mostriamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[-1,1]$ e

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \pi.$$

f risulta integrabile in senso generalizzato negli intervalli $[-1,0]$ e $[0,1]$ infatti

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\to -1^+} \int_c^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\lim_{c\to -1^+} \arcsin c = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\to 1^-} \arcsin c = \frac{\pi}{2},$$

quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

♣

Teorema 15 (criterio del confronto). *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni non limitate in un intorno del punto a e* **non negative** *in $[a,b]$. Supponiamo che*
i) per ogni $c \in \,]a,b[$, f sia integrabile secondo Riemann in $[c,b]$,
ii) $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in \,]a,b]$,
Allora se g è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ anche f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.

Dimostrazione. Poiché vale l'ipotesi i), per dimostrare che f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ basta dimostrare che il limite

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

esiste ed è finito. Riguardo all'esistenza del limite (5) basta osservare che, poiché f è non negativa in $[a,b]$, la funzione integrale

$$]a,b] \ni c \to \int_c^b f(x)\,dx \tag{6}$$

è decrescente. Per dimostrare che il limite (5) è finito, basta osservare che dalla ii) si ha

$$\int_c^b f(x)\,dx \le \int_c^b g(x)\,dx \text{ , per ogni } c \in\,]a,b]\,,$$

quindi

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx \le \lim_{c\to a^+}\int_c^b g(x)\,dx.$$

D'altra parte il $\lim_{c\to a^+}\int_c^b g(x)\,dx$ è finito perché g è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$. Quindi il limite (5) esiste ed è finito, perciò f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.■

In modo del tutto analogo si dimostra il

Teorema 15bis (criterio del confronto). *Siano $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni non limitate in un intorno del punto b e* **non negative** *in $[a,b]$. Supponiamo che*
i) per ogni $c\in [a,b[$, f sia integrabile secondo Riemann in $[a,c]$,
ii) $f(x)\le g(x)$ per ogni $x\in [a,b[$,
Allora se g è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ anche f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.

Osservazione 5. Si osservi che nelle ipotesi i) ii) del teorema 15 (teorema 15bis) se f non è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ allora g non è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.♠

Osservazione 6. Per quanto riguarda il teorema 15 (analoghe considerazioni valgono per il teorema 15bis) si osservi che esso continua a valere se si suppone che f e g siano non negative soltanto in un intorno di a e invece di ii) si suppone che
ii') esiste $c\in\,]a,b]$ tale che $f(x)\le g(x)$ per ogni $x\in\,]a,c]$.♠

Teorema 16 (criterio del confronto asintotico). *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione non limitata e non negativa in un intorno del punto a. Supponiamo che*

i) per ogni $c \in \left]a, b\right[$, f *sia integrabile secondo Riemann in* $[c, b]$,
ii) $\lim_{x \to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = L$, *con* $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $L \geq 0$.
Allora:
j) se $0 < L < +\infty$, f ***è*** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, b]$ *se e solo se* $\alpha < 1$,
jj) se $L = 0$ *e* $\alpha < 1$, f ***è*** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, b]$,
jjj) se $L = +\infty$ *e* $\alpha \geq 1$, f **non è** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, b]$.
Dimostrazione. Dimostriamo j). Poiché $0 < L < +\infty$ esiste $d \in \left]a, b\right]$ tale che

$$\frac{L}{2} \leq (x-a)^\alpha f(x) \leq \frac{3L}{2} \text{ , per ogni } x \in \left]a, d\right] ,$$

quindi

$$\frac{L}{2} (x-a)^{-\alpha} \leq f(x) \leq \frac{3L}{2} (x-a)^{-\alpha} \text{ , per ogni } x \in \left]a, d\right] .$$

Ora, se $\alpha < 1$ allora da

$$f(x) \leq \frac{3L}{2} (x-a)^{-\alpha} \text{ , per ogni } x \in \left]a, d\right] ,$$

dal teorema del confronto (cfr. osservazione 6) e dall'esempio 1 si ha che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$. Viceversa se f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ allora da

$$\frac{L}{2} (x-a)^{-\alpha} \leq f(x) \text{ , per ogni } x \in \left]a, d\right]$$

e utilizzando nuovamente il teorema del confronto (cfr. osservazione 6) e l'esempio 1 si ha che $\alpha < 1$.
Le dimostrazioni di jj) e di jjj) sono analoghe alla precedente e si lasciano al lettore.■

In modo analogo si dimostra il seguente

Teorema 16bis (criterio del confronto asintotico). *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione non limitata e non negativa in un intorno del punto* b*. Supponiamo che*
i) per ogni $c \in \left]a, b\right[$, f *sia integrabile secondo Riemann in* $[a, c]$,
ii) $\lim_{x \to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = L$, *con* $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $L \geq 0$.
Allora:
j) se $0 < L < +\infty$, f ***è*** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, b]$ *se e solo se* $\alpha < 1$,
jj) se $L = 0$ *e* $\alpha < 1$, f ***è*** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, b]$,
jjj) se $L = +\infty$ *e* $\alpha \geq 1$, f **non è** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, b]$.

Poniamo la seguente

Definizione 5. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione non limitata in un intorno di un numero finito di punti dell'intervallo* $[a, b]$*. Diremo* *che f è assolutamente integrabile in senso generalizzato (o semplicemente: assolutamente integrabile) in $[a,b]$ se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.*

Vale il seguente

Teorema 17. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione non limitata in un intorno del punto a. Supponiamo che*
i) per ogni $c\in\,]a,b[$, f sia integrabile secondo Riemann in $[c,b]$,
ii) f è assolutamente integrabile in $[a,b]$.
Allora f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.
Dimostrazione. Indichiamo con f_+ e f_- rispettivamente, le due funzioni

$$f_+(x)=\max\{f(x),0\}\ \ ,\ f_-(x)=-\min\{f(x),0\}\,. \tag{7}$$

Risulta

$$|f|=f_++\ f_-\ ,\ f=f_+-\ f_-. \tag{8}$$

Inoltre, da queste ultime si ha immediatamente

$$f_+=\frac{|f|+f}{2}\ ,\ f_-=\frac{|f|-f}{2}$$

e da ciò, ricordando il teorema 7, si ha che

$$\text{per ogni } c\in\,]a,b[\,,\ f_+ \text{ e } f_- \text{ sono integrabili secondo Riemann in } [c,b]\,. \tag{9}$$

Ora, da (7) si ha

$$0\le f_+\le|f|\ \ ,\ 0\le f_-\le|f|\,. \tag{10}$$

Per il teorema del confronto, da (10) e dalla (9), ricordando la ii), si ha che f_+ e f_- sono integrabili in senso generalizzato. Quindi esistono finiti i limiti

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f_+(x)\,dx\ ,\ \lim_{c\to a^+}\int_c^b f_-(x)\,dx.$$

Perciò, ricordando la seconda delle (8), abbiamo

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b (f_+(x)-f_-(x))\,dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f_+(x)\,dx-\lim_{c\to a^+}\int_c^b f_-(x)\,dx,$$

quindi il limite

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx,$$

esiste ed è finito e ciò prova che f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.■

In modo analogo si dimostra il seguente

Teorema 17bis. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione non limitata in un intorno di punto b. Supponiamo che*
i) per ogni $c\in\,]a,b[$, f sia integrabile secondo Riemann in $[a,c]$,

ii) f è assolutamente integrabile in $[a,b]$.
Allora f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$.

Osservazione 7. Si tenga presente che può accadere che f sia integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ e f non sia assolutamente integrabile in $[a,b]$. Infatti si può dimostrare che la funzione

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \ , \ x \in \left]0,1\right] ,$$

(f definita arbitrariamente in 0) è integrabile in $[0,1]$, ma non assolutamente in-egrabile in $[0,1]$. Omettiamo la dimostrzione di quanto asserito perché richiederebbe la teoria delle serie numeriche.♠

II) <u>Integrale generalizzato su un intervallo non limitato.</u>
Poniamo la seguente

Definizione 6. *Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$ se*
i) per ogni $b > a$, f è integrabile secondo Riemann o in senso generalizzato in $[a,b]$,
ii) esiste finito il

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx, \tag{11}$$

in tale caso il limite (11) sarà chiamato **integrale generalizzato di f esteso all'intervallo** $[a,+\infty[$ *e sarà indicato con*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

In modo analogo si pone la seguente

Definizione 7. *Siano $a \in \mathbb{R}$ e sia $f :]-\infty,a] \to \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile in senso generalizzato in $]-\infty,a]$ se*
i) per ogni $b < a$, f è integrabile secondo Riemann o in senso generalizzato in $[b,a]$,
ii) esiste finito il

$$\lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\, dx, \tag{12}$$

in tale caso il limite (11) sarà chiamato **integrale generalizzato di f esteso all'intervallo** $]-\infty,a]$ *e sarà indicato con*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx.$$

Esempio 6. Sia α un numero reale positivo, sia $a > 0$ e sia

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \ , \ x \in [a,+\infty[\, .$$

Mostriamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$ *se e solo se* $\alpha > 1$.
Infatti, per ogni $b \in [a,+\infty[$, f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, poiché f è continua in tale intervallo. Ora, esaminiamo il

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}dx. \tag{13}$$

Se $\alpha \neq 1$ abbiamo

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Invece, se $\alpha = 1$ abbiamo

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = [\ln x]_a^b = \ln\frac{b}{a}.$$

Perciò

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty, \text{ se } \alpha \leq 1, \\ \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \text{ se } \alpha > 1 \end{cases}$$

e ciò prova quanto asserito.♣

Esempio 7. In modo del tutto analogo si ha che la α un numero reale positivo, $a < 0$ e sia

$$f(x) = \frac{1}{(-x)^\alpha}\ ,\ x \in \left]-\infty, a\right].$$

Allora f risulta integrabile in senso generalizzato in $]-\infty,a]$ *se e solo se* $\alpha > 1$.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la definizione di integrabilità in senso generalizzato può essere estesa nel modo seguente. Diremo f è integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$ se considerato un numero reale a, f è integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$ e in $]-\infty,a]$ e porremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^a f(x)\,dx. \tag{14}$$

Si dimostra facilmente che il valore della somma nella (14) non dipende dalla scelta di a.

Esempio 8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[0,2]$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \pi.$$

Infatti
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{c\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^c$$
$$= \lim_{c\to+\infty}\arctan c = \frac{\pi}{2}$$
e, analogamente,
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}.$$
Quindi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

♣

I seguenti teoremi si dimostrano in modo analogo ai teoremi 15-17bis, pertanto ne omettiamo la dimostrazione.

Teorema 18 (criterio del confronto). *Siano* $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *e* $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *due funzioni* **non negative** *in* $[a,+\infty[$. *Supponiamo che*
i) per ogni $b \in [a,+\infty[$, f *sia integrabile secondo Riemann in* $[a,b]$,
ii) $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a,+\infty[$,
Allora se g *è integrabile in senso generalizzato in* $[a,+\infty[$ *anche* f *è integrabile in senso generalizzato in* $[a,+\infty[$.

Teorema 18bis (criterio del confronto). *Siano* $f :]-\infty,a] \to \mathbb{R}$ *e* $g :]-\infty,a] \to \mathbb{R}$ *due funzioni* **non negative** *in* $]-\infty,a]$. *Supponiamo che*
i) per ogni $b \in]-\infty,a]$, f *sia integrabile secondo Riemann in* $[b,a]$,
ii) $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in]-\infty,a]$,
Allora se g *è integrabile in senso generalizzato in* $]-\infty,a]$ *anche* f *è integrabile in senso generalizzato in* $]-\infty,a]$.

Osservazione 8. Si osservi che nelle ipotesi i) ii) del teorema 18 se f non è integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$ allora g non è integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$. Considerazioni analoghe valgono per il teorema 18bis.♠

Osservazione 9. Per quanto riguarda il teorema 18 (analoghe considerazioni valgono per il teorema 18bis) si osservi che esso continua a valere se si suppone che f e g siano non negative soltanto in un intorno di $+\infty$ e invece di ii) si suppone che
ii') esiste $b \in [a,+\infty[$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [b,+\infty[$.♠

Teorema 19 (criterio del confronto asintotico). *Sia* $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione non negativa in un intorno di* $+\infty$. *Supponiamo che*
i) per ogni $b \in [a,+\infty[$, f *sia integrabile secondo Riemann in* $[a,b]$,

ii) $\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = L$ *, con* $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$*,* $L \geq 0$*.*
Allora:
j) se $0 < L < +\infty$*,* f **è** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, +\infty[$ *se e solo se* $\alpha > 1$*,*
jj) se $L = 0$ *e* $\alpha > 1$*,* f **è** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, +\infty[$*,*
jjj) se $L = +\infty$ *e* $\alpha \leq 1$*,* f **non è** *integrabile in senso generalizzato in* $[a, +\infty[$*.*

Teorema 19bis (criterio del confronto asintotico). *Sia* $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *una funzione non negativa in un intorno di* $-\infty$*. Supponiamo che*
i) per ogni $b \in]-\infty, a]$*,* f *sia integrabile secondo Riemann in* $[b, a]$*,*
ii) $\lim_{x \to -\infty} (-x)^{\alpha} f(x) = L$ *, con* $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$*,* $L \geq 0$*.*
Allora:
j) se $0 < L < +\infty$*,* f **è** *integrabile in senso generalizzato in* $]-\infty, a]$ *se e solo se* $\alpha > 1$*,*
jj) se $L = 0$ *e* $\alpha > 1$*,* f **è** *integrabile in senso generalizzato in* $]-\infty, a]$*,*
jjj) se $L = +\infty$ *e* $\alpha \leq 1$*,* f **non è** *integrabile in senso generalizzato in* $]-\infty, a]$*.*

Esempio 9. Mostriamo che la funzione

$$f(x) = e^{-x^2} \ , \ x \in \mathbb{R},$$

è integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$. A questo scopo dimostriamo che f è integrabile in senso generalizzato sia in $[0, +\infty[$ che in $]-\infty, 0]$. Infatti, se $b \in [0, +\infty[$ allora f è integrabile secondo Riemann in $[0, b]$ poiché f è una funzione continua. Inoltre per ogni $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x^2} = 0,$$

quindi, per il teorema 18, f è integrabile in senso generalizzato sia in $[0, +\infty[$. In modo analogo (applicando il teorema 18bis) si dimostra che f è integrabile in senso generalizzato sia in $]-\infty, 0]$. Perciò f è integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$.
Con strumenti non trattati in queste note si può dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Poniamo la seguente

Definizione 8. *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *e sia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *(oppure* $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$*). Diremo che* f *è assolutamente integrabile in senso generalizzato, o semplicemente: assolutamente integrabile, in* $[a, +\infty[$ *(in* $]-\infty, a]$*) se* $|f|$ *è integrabile in senso generalizzato in* $[a, +\infty[$*.*

Vale il seguente
Teorema 20. *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *e sia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *(oppure* $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$*). Supponiamo che*

i) per ogni $b \in [a, +\infty[$ *(*$b \in]-\infty, a]$*)* f *sia integrabile secondo Riemann in* $[a, b]$ *(in* $[b, a]$*),*
ii) f *è assolutamente integrabile in* $[a, +\infty[$ *(in* $]-\infty, a]$*).*
Allora f *è integrabile in senso generalizzato in* $[a, +\infty[$ *(in* $]-\infty, a]$*).*

Osservazione 10. Si tenga presente che può accadere che f sia integrabile in $[a, +\infty[$ e f non sia assolutamente integrabile in $[a, +\infty[$. Infatti si può dimostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \ , \ x \in [1, +\infty[\, ,$$

è integrabile in $[1, +\infty[$, ma non assolutamente inegrabile in $[1, +\infty[$. Omettiamo la dimostrzione di quanto asserito perché richiederebbe la teoria delle serie numeriche.♠

ESERCIZI SVOLTI

Negli esercizi 1 e 2 che seguono, riformuliamo la **formula di integrazione per parti** e **di integrazione per sostituzione** relativamente agli integrali definiti.

ESERCIZIO 1

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua in $[a, b]$, allora

$$\int_a^b g f' dx = [fg]_a^b - \int_a^b g f' dx. \tag{15}$$

SOLUZIONE

Si ha

$$(fg)' = f'g + fg', \text{ in } [a, b].$$

Perciò, integrando ambo i membri e utilizzando la linearità dell'integrae di Riemann, abbiamo

$$\int_a^b (fg)' \, dx = \int_a^b f' g dx + \int_a^b f g' dx. \tag{16}$$

D'altra parte per il secondo teorema fondamentale del calcolo (teorema 14) abbiamo

$$\int_a^b (fg)' \, dx = [fg]_a^b.$$

Da quest'ultima e da (16) otteniamo la (15).

ESERCIZIO 2

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una funzioni derivabile con derivata continua in I rispettivamente. Supponiamo che $\varphi(I) \subset [a, b]$ e siano $c, d \in I$ tali che

$$\varphi(c) = a \text{ e } \varphi(d) = b.$$

Allora la funzione $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ è integrabile secondo Riemann nell'intervallo chiuso di estremi c e d e risulta

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx. \tag{17}$$

(Si noti che non è richiesto che $c < d$).

SOLUZIONE

La funzione $t \to f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ è integrabile secondo Riemann nell'intervallo chiuso di estremi c e d perché continua in tale intervallo. Per il primo teorema fondamentale del calcolo esiste una primitiva di f nell'intervallo $[a, b]$, sia essa F. Abbiamo

$$F'(x) = f(x), \text{ per ogni } x \in [a, b]. \tag{18}$$

Dal teorema di derivazione di una funzione composta abbiamo

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

che, insieme alla (18), fornisce

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))),. \tag{19}$$

Integrando ambo i membri della (19) abbiamo, per il secondo teorema fondamentale del calcolo e ricordando che $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a). \tag{20}$$

D'altra parte da (18) abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Infine da quest'ultima e da (20) otteniamo la (17).

ESERCIZIO 3

Sia $a > 0$ e $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora:
i) se f è dispari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

ii) se f è pari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

SOLUZIONE

Dall'additività dell'integrale di Riemann si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx. \tag{21}$$

Ora $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$, tale che $\varphi(t) = -t$. Si ha $\varphi([0, a]) = [-a, 0]$, $\varphi(a) = -a$ e $\varphi(0) = 0$. Quindi utilizzando la formula di integrazione per sostituzione dimostrata nell'esercizio 3 si ha

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = -\int_a^0 f(-t)\,dt.$$

Ora, se f è dispari si ha

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

e da (21) si ottiene i).
Se f è pari si ha

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

e, da (21) si ottiene ii)

$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}}$

Verificare che i seguenti insiemi sono trapezoidi e calcolarne l'area

1) $T_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$, con $a > 0$, $b > 0$;
2) $T_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 \leq y \leq h\right\}$, con $a > 0$, $h > 0$;
3) $T_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x \leq y \leq 1 - |x-1|\right\}$;

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

1) Risulta

$$T_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a,a]\,,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\},$$

quindi l'area di T_1 è uguale al valore del seguente integrale

$$\int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx.$$

Ora, utilizziamo la sostituzione $x = \varphi(t) = a\sin t$. Otteniamo $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -a$

$$\int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = 2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin t)^2}\,a\cos t dt$$

$$= 2ba\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\,dt = 2ba\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= ba\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = ba\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ba.$$

2) Risulta

$$T_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[-\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}, \left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}\right],\ ax^2 \leq y \leq h\right\}\ ,$$

quindi l'area di T_2 è uguale al valore del seguente integrale

$$\int_{-\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}}^{\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}} \left(h - ax^2\right) dx.$$

Quindi

$$\int_{-\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}}^{\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}} \left(h - ax^2\right) dx = 2\int_0^{\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}} \left(h - ax^2\right) dx$$

$$= \left[hx - \frac{1}{3}ax^3\right]_0^{\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2}} = h\left(\frac{h}{a}\right)^{1/2} - \frac{1}{3}a\left(\frac{h}{a}\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{h^3}{a}\right)^{1/2}.$$

3) Risulta

$$T_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[0, \sqrt{2}\right], x^2 - x \leq y \leq 1 - |x-1|\right\} ,$$

quindi l'area di T_2 è uguale al valore del seguente integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - |x-1| - \left(x^2 - x\right)\right) dx.$$

Per l'additivtà dell'integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - |x-1| - \left(x^2 - x\right)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - |x-1| - \left(x^2 - x\right)\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - |x-1| - \left(x^2 - x\right)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(2x - x^2\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{3}.$$

ESERCIZIO 5

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e siano

$$x_k = a + \frac{k\,(b-a)}{n} \ , \ k = 0, 1, ..., n.$$

Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,(x_k - x_{k-1})\,. \tag{22}$$

SOLUZIONE

Abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,dx,$$

quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\,dx. \tag{23}$$

Ora, poiché per il teorema di Heine-Cantor f è uniformemente continua abbiamo che fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$(x', x'' \in [a,b], |x' - x''| < \delta) \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ per ogni } n \geq n_0.$$

Perciò se $n \geq n_0$ allora

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_k)|\,dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon$$

da cui la (22).

ESERCIZIO 5

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $[a,b]$. Supponiamo che

$$|f'(x)| \leq M, \text{ per ogni } x \in [a,b] \tag{24}$$

e, siano

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \; k = 0, 1, ..., n.$$

Allora

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

SOLUZIONE

Ricordiamo la (23) dell'esercizio precedene

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\,dx.$$

Dal teorema di Lagrange, abbiamo che per ogni $k \in \{0, 1, ..., n\}$

$$|f(x) - f(x_k)| = |f'(\eta_k)(x - x_{k-1})| \leq M|x - x_{k-1}|.$$

Perciò

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} M(x - x_{k-1})\,dx$$

$$= \frac{M}{2}\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

Nel seguito, quando useremo l'espressione "stabilire il carattere di un integrale generalizzato" intenderemo che si stabilisca se la funzione integranda è o non è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo che ha come estremi gli estremi di integrazione dell'integrale assegnato.

ESERCIZIO 6

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire il carattere del seguente integrale generalizzato e eventualmente calcolarlo

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\ln x|^\alpha}\,dx. \tag{25}$$

SOLUZIONE

La funzione

$$\frac{1}{x|\ln x|^\alpha}\ ,\ x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \tag{26}$$

non è limitata in un intorno di 0. Infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x|\ln x|^\alpha} = +\infty.$$

Inoltre per ogni $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ la funzione $\frac{1}{x|\ln x|^\alpha}$ è integrabile secondo Riemann in $\left[c, \frac{1}{2}\right]$ perchè continua in tale intervallo. Quindi, per stabilire il carattere dell'integrale (25) bisogna esaminare il limite

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^{1/2} \frac{1}{x|\ln x|^\alpha}\,dx.$$

Ora

$$\int \frac{1}{x|\ln x|^\alpha}\,dx = -\int \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^\alpha} \frac{d}{dx}\left(\ln \frac{1}{x}\right)dx.$$

Quindi, se $\alpha \neq 1$ allora

$$\int \frac{1}{x\left|\ln x\right|^{\alpha}}dx = -\frac{1}{1-\alpha}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} + C,$$

con C costante arbitraria. Invece, se $\alpha = 1$ allora

$$\int \frac{1}{x\left|\ln x\right|}dx = -\int \frac{1}{\left(\ln\frac{1}{x}\right)}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx = -\ln\left|\ln\frac{1}{x}\right| + C$$

con C costante arbitraria.
Perciò se $\alpha \neq 1$ abbiamo

$$\int_c^{1/2} \frac{1}{x\left|\ln x\right|^{\alpha}}dx = -\frac{1}{1-\alpha}\left(\ln 2\right)^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\left(\ln\frac{1}{c}\right)^{1-\alpha},$$

e se $\alpha = 1$ abbiamo

$$\int_c^{1/2} \frac{1}{x\left|\ln x\right|}dx = -\ln\left(\ln 2\right) + \ln\left|\ln\frac{1}{c}\right|$$

quindi

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^{1/2} \frac{1}{x\left|\ln x\right|^{\alpha}}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\left(\ln 2\right)^{1-\alpha} & \text{, se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{, se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

In conclusione, la funzione (26) è integrabile in senso generalizzato se e solo se $\alpha > 1$ e per questi valori di α risulta

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x\left|\ln x\right|^{\alpha}}dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(\ln 2\right)^{1-\alpha}.$$

ESERCIZIO 7

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire il carattere del seguente integrale generalizzato e eventualmente calcolarlo

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}}dx. \tag{27}$$

SOLUZIONE

Per ogni $c \in]2, +\infty[$ la funzione $\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ è integrabile secondo Riemann in $[2, c]$ perchè continua in tale intervallo. Quindi, per stabilire il carattere dell'integrale (27) bisogna esaminare il limite

$$\lim_{c\to +\infty}\int_2^{c} \frac{1}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}}dx.$$

Ora

$$\int \frac{1}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}}dx = \int \frac{1}{\left(\ln x\right)^{\alpha}}\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)dx.$$

Quindi, se $\alpha \neq 1$ allora

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx = \frac{1}{1-\alpha} (\ln x)^{1-\alpha} + C,$$

con C costante arbitraria. Invece, se $\alpha = 1$ allora

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)\, dx = \ln (\ln x) + C$$

con C costante arbitraria.
Perciò se $\alpha \neq 1$ abbiamo

$$\int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx = \frac{1}{1-\alpha} (\ln c)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} (\ln 2)^{1-\alpha},$$

e se $\alpha = 1$ abbiamo

$$\int_2^c \frac{1}{x \ln x} dx = \ln (\ln c) - \ln (\ln 2)$$

quindi

$$\lim_{c \to +\infty} \int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} (\ln 2)^{1-\alpha} & \text{, se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{, se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

In conclusione, la funzione $\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$ e per questi valori di α risulta

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha - 1} (\ln 2)^{1-\alpha}.$$

ESERCIZIO 7

Sia p una funzione polinomiale e $\lambda > 0$. Dimostrare che la funzione

$$f(x) := p(x) e^{-\lambda x},\ x \in [a, +\infty[$$

è assolutamente integrabile e quindi integrabile in senso generalizzato per ogni $a > 0$.

SOLUZIONE

Sia

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Innanzitutto osserviamo che per ogni $c > a$, la funzione $p(x) e^{-\lambda x}$ è integrabile secodo Riemann $[a, c]$. Inoltre per ogni $\alpha > 1$ abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} |f(x)| = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha+n} e^{-\lambda x} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k x^{-k} \right| = 0.$$

Perciò, dal criterio di convergenza asintotica segue che $|f|$ è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$.

ESERCIZIO 8

Stabilire il carattere del seguente integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x^{3/2}} dx$$

SOLUZIONE

La funzione

$$\frac{\arcsin x}{x^{3/2}},\ x \in]0, 1[\,,$$

è positiva e non è limitata in un intorno di 0. Infatti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arcsin x}{x^{3/2}} = +\infty.$$

Inoltre, per ogni $c \in]0, 1[$ la funzione $\frac{\arcsin x}{x}$ è integrabile secondo Riemann in $[c, 1]$ perché ivicontinua.

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x^{3/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico si ha che la funzione $\frac{\arcsin x}{x^{3/2}}$ è integrabile in senso generalizzato in $[0, 1]$.

ESERCIZIO 9*

Dimostrare che la funzione

$$\frac{\sin x}{x}\ ,\ x \in [1, +\infty[$$

è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty[$.

SOLUZIONE

Per ogni $c \in [1, +\infty[$ la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile secondo Riemann in $[1, c]$ perché è continua in tale intervallo.

Ora esaminiamo il limite

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{\sin x}{x} dx. \tag{28}$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti si ha

$$\int_1^c \frac{\sin x}{x} dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^c - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

ora la funzione

$$\frac{\cos x}{x^2}\ ,\ x \in [1, +\infty[\,,$$

è assolutamente integrabile in $[1,+\infty[$, infatti

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}\ , \text{ per ogni } x \in [1,+\infty[\,.$$

Perciò il limite

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}dx,$$

esiste ed è finito. E, poiché

$$\lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^c = \cos 1,$$

si ha che il limite (28) esiste ed è finito

$\boxed{\text{ESERCIZIO 10}}$

Stabilire il carattere del seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}}dx.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$

La funzione

$$\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}},\ x\in\,]0,+\infty[\,,$$

è positiva, definita su un intervallo non limitato e non è limitata in un intorno di 0. Infatti

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{x^3\left(\sqrt{x}+o\left(\sqrt{x}\right)\right)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Ora, stabiliamo il carattere dei due seguenti integrali generalizzati

$$\int_0^1\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}}dx\ ,\ \int_1^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}}dx.$$

Si ha

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}} = \lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{x^3\left(\sqrt{x}+o\left(\sqrt{x}\right)\right)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to0^+}e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{6}.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico si ha che la funzione $\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}}$ è integrabile in senso generalizzato in $[0,1]$.

Per quanto riguarda il secondo integrale, abbiamo per ogni $\alpha>1$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}} = \lim_{x\to+\infty}x^{\alpha+\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{6}}\frac{\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{\sqrt{1-e^{-x}}}\left(1+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$$

Quindi, applicando nuovamente il criterio del confronto asintotico abbiamo che la funzione $\frac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}}$ è integrabile in senso generalizzato in $[1,+\infty]$.

In conclusione, la funzione $\dfrac{e^{\frac{x}{3}}\,(x-\sin x)\left(x^3+1\right)}{x^3\sqrt{e^x-1}}$ è integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty[$.