

1.- COSTRUIRE CON RIGA E COMPASSO

1.1 - Prime definizioni.

Sia \mathcal{I} un insieme di punti e di curve ⁽¹⁾ del piano al quale appartengono almeno due punti distinti \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 . Un punto del piano [una retta del piano, una circonferenza del piano] si dice *costruibile con riga e compasso a partire da \mathcal{I}* se è l'ultimo elemento di una sequenza finita

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k$$

di punti e curve del piano ogni elemento della quale

- è un elemento di \mathcal{I}

oppure

- è la retta passante per due punti \mathbf{P} , \mathbf{Q} che la precedono nella sequenza

oppure

– è la circonferenza di centro \mathbf{P} passante per \mathbf{Q} , con \mathbf{P} , \mathbf{Q} punti che la precedono nella sequenza

oppure

- è l'intersezione di due curve che la precedono nella sequenza.

La sequenza sopra descritta si dice una *costruzione con riga e compasso a partire da \mathcal{I}* del punto [della retta, della circonferenza]; il numero naturale k si dice *lunghezza* di tale costruzione.

¹ Non è questo il luogo dove discutere che cosa si debba intendere per “curva”. Ai fini di quel che segue, “curva” può essere qualsiasi insieme di punti del piano; all’atto pratico, specificheremo volta per volta quali punti (oltre a \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1) e quali insiemi di punti appartengono a \mathcal{I} e quindi non rischiamo ambiguità. Casi particolari di “curve” saranno comunque tutte le rette e tutte le circonferenze del piano, che (coerentemente con quanto appena detto) penseremo sempre come insiemi di punti.

È immediato notare che

- ogni elemento di \mathcal{I} è costruibile con riga e compasso a partire da \mathcal{I} (mediante una costruzione di lunghezza 1)
- se un punto [una retta, una circonferenza] è costruibile con riga e compasso a partire da \mathcal{I} , anche ogni elemento che compare in qualsiasi sua costruzione è costruibile con riga e compasso a partire da \mathcal{I} .
- se un punto [una retta, una circonferenza] ω è costruibile con riga e compasso a partire da \mathcal{I} , esistono in generale più costruzioni di ω , di lunghezze anche diverse fra loro; la lunghezza di una costruzione con riga e compasso di ω a partire da \mathcal{I} che abbia lunghezza minima si dice *complessità* della costruzione di ω con riga e compasso a partire da \mathcal{I} .

Di solito, ed è quel che faremo costantemente nel seguito, la precisazione “con riga e compasso” si trascurava; si parla dunque semplicemente di punti, rette e circonferenze *costruibili a partire da \mathcal{I}* .

Se all’insieme \mathcal{I} appartengono soltanto i due punti \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 , si trascurava anche la precisazione “a partire da \mathcal{I} ”. Dunque, ad esempio, “costruibile” significa “costruibile con riga e compasso a partire dall’insieme $\mathcal{I} = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\}$ ”.

Nel seguito, assumeremo il segmento di estremi \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 come unità di misura per le distanze.

1.2 - Primi risultati.

Lemma 1.2.1

La retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ è costruibile.

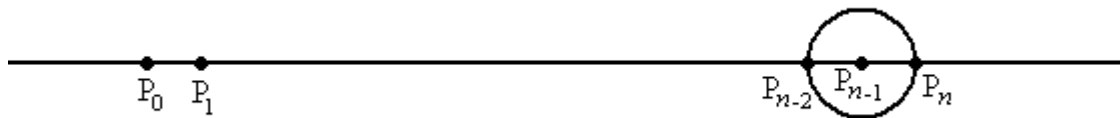
Dimostrazione — Ovvio, perché \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 sono costruibili in quanto per ipotesi appartengono a \mathcal{I} .

Lemma 1.2.2

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, è costruibile un punto \mathbf{P}_n sulla semiretta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ (di origine \mathbf{P}_0 passante per \mathbf{P}_1) tale che $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_n) = n$.

Dimostrazione — Poiché \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 verificano le condizioni richieste, possiamo procedere per induzione su n supponendo che sia $n \geq 2$ e che siano costruibili sulla semiretta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ due punti \mathbf{P}_{n-2} e \mathbf{P}_{n-1} tali che $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-2}) = n - 2$ e $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-1}) = n - 1$.

È costruibile la circonferenza di centro \mathbf{P}_{n-1} passante per \mathbf{P}_{n-2} , e dunque sono costruibili i due punti in cui essa incontra la retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ (che è costruibile per il lemma 1.2.1): uno di essi è \mathbf{P}_{n-2} ; indichiamo l'altro con \mathbf{P}_n .



Poiché i punti \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_{n-2} , \mathbf{P}_{n-1} e \mathbf{P}_n sono allineati (infatti appartengono tutti alla retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$) e poiché per costruzione \mathbf{P}_{n-1} sta fra \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_n mentre \mathbf{P}_{n-2} sta fra \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_{n-1} (essendo per l'ipotesi di induzione $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-2}) = n - 2$ e $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-1}) = n - 1$) si ha

$$\begin{aligned} d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_n) &= d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-1}) + d(\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n) = d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-1}) + d(\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_{n-2}) = \\ &= d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-1}) + (d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-1}) - d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-2})) = (n - 1) + ((n - 1) - (n - 2)) = n \end{aligned}$$

come si voleva.

Lemma 1.2.3

Su ogni retta costruibile c'è almeno un punto costruibile.

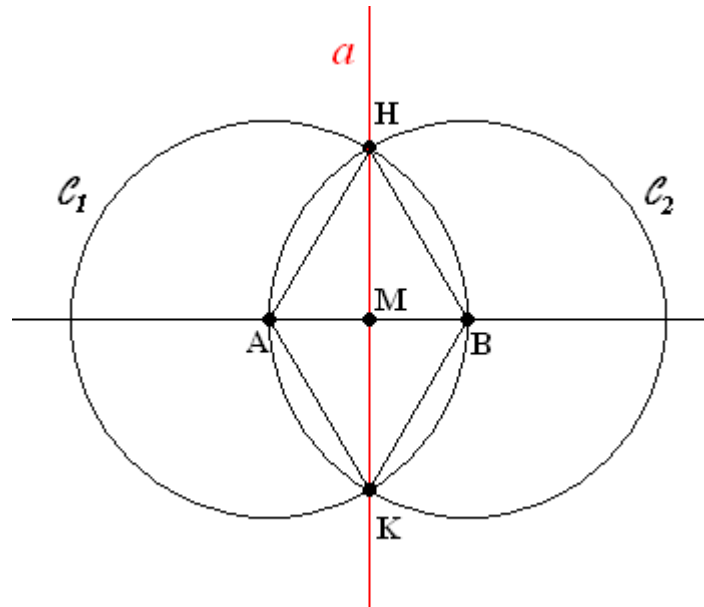
Dimostrazione — Sia r una retta costruibile, e sia r_0 la retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Se r non è parallela a r_0 , il punto in cui si incontrano r e r_0 è un punto costruibile di r . Se invece r è parallela a r_0 , sia δ la distanza fra r e r_0 , sia n un numero naturale maggiore di δ e sia \mathbf{P}_n un punto sulla retta r_0 tale che $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_n) = n$ (un tale punto \mathbf{P}_n è costruibile per il lemma 1.2.2). La circonferenza di centro \mathbf{P}_0 passante per \mathbf{P}_n è costruibile e incontra la retta r in due punti che quindi sono punti costruibili della retta r .

Teorema 1.2.4

Siano \mathbf{A} , \mathbf{B} due punti costruibili. Sono costruibili il punto medio \mathbf{M} del segmento \mathbf{AB} e l'asse del segmento \mathbf{AB} .

Dimostrazione — Per semplificare la notazione, indichiamo con ρ la distanza fra \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Sono costruibili la retta \mathbf{AB} , la circonferenza \mathcal{C}_1 di centro \mathbf{A} passante per \mathbf{B} e la circonferenza \mathcal{C}_2 di centro \mathbf{B} passante per \mathbf{A} . Queste due circonferenze sono secanti, perché la distanza fra i loro centri è ρ , mentre la somma delle misure dei loro raggi è 2ρ .



Siano H e K le intersezioni fra C_1 e C_2 di centro B passante per A . Queste intersezioni sono costruibili, e dunque è costruibile la retta a passante per essi; è costruibile anche l'intersezione M fra a e la retta AB . Vogliamo dimostrare che M è il punto medio del segmento AB e che la retta a è ortogonale alla retta AB (e quindi, poiché passa per M , è l'asse del segmento AB).

In effetti, basta osservare che il quadrilatero $AKBH$ è un rombo (perché tutti i lati hanno misura ρ) e quindi le sue diagonali AB e HK sono fra loro perpendicolari e si incontrano nei loro punti medi.

Teorema 1.2.5

Siano P un punto costruibile e r una retta costruibile. La retta passante per P ortogonale a r è costruibile.

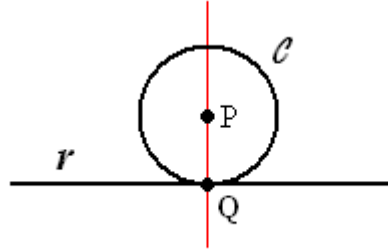
Dimostrazione — Distinguiamo il caso in cui P è un punto di r da quello in cui P non è un punto di r .

caso in cui P non è un punto di r

Sia Q un punto costruibile di r (che esiste per il lemma 1.2.3) e sia \mathcal{C} la circonferenza con centro in P passante per Q . Distinguiamo ulteriormente due sottocasi:

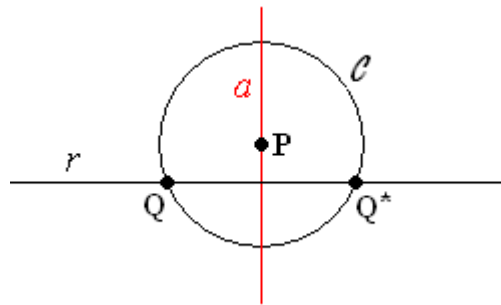
\mathcal{C} incontra r nel solo punto Q

In questo caso r è tangente a \mathcal{C} nel punto Q ; poiché PQ è un raggio di \mathcal{C} , PQ è ortogonale a r e dunque la retta PQ (che è costruibile perché P e Q sono due punti costruibili) è la retta passante per P ortogonale a r .



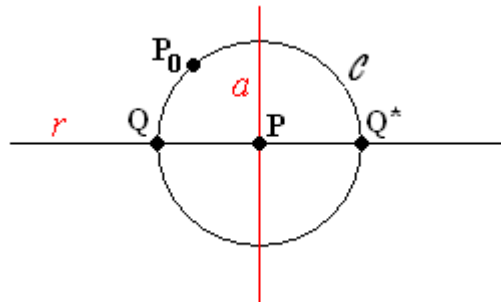
\mathcal{C} incontra r nel punto Q e in un altro punto Q^*

In questo caso, per il teorema 1.2.4 è costruibile l'asse a del segmento QQ^* . La retta a è ortogonale al segmento QQ^* (e quindi alla retta r) e passa per P (perché è l'insieme dei punti del piano equidistanti da Q e Q^* , e per costruzione di Q e Q^* il punto P è equidistante da Q e Q^*).



caso in cui P è un punto di r

Sia \mathcal{C} la circonferenza con centro P passante per P_0 (oppure per P_1 , nell'eventualità che sia $P_0 = P$) e siano Q e Q^* le due intersezioni di \mathcal{C} con r .

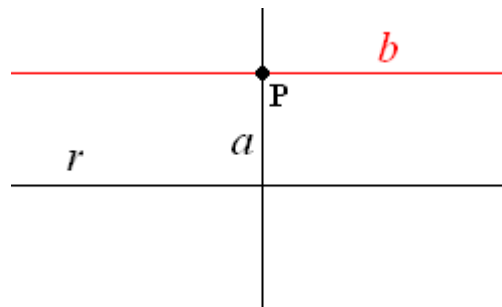


Per il teorema 1.2.4 è costruibile l'asse a del segmento QQ^* . La retta a è ortogonale al segmento QQ^* (e quindi alla retta r) e passa per P (perché per costruzione di Q e Q^* P è il punto medio del segmento QQ^*).

Teorema 1.2.6

Siano \mathbf{P} un punto costruibile e r una retta costruibile. La retta passante per \mathbf{P} parallela a r è costruibile.

Dimostrazione — Se \mathbf{P} è un punto di r , la parallela cercata è la stessa retta r ; dunque possiamo supporre che \mathbf{P} non appartenga a r . Per il teorema 1.2.4, sono costruibili la retta a passante per \mathbf{P} ortogonale a r e la retta b passante per \mathbf{P} ortogonale alla retta a . La retta b è parallela alla retta r : se infatti b e r avessero in comune un punto \mathbf{Q} , per \mathbf{Q} passerebbero due perpendicolari alla retta a (distinte, perché \mathbf{P} appartiene ad a ma non a r).



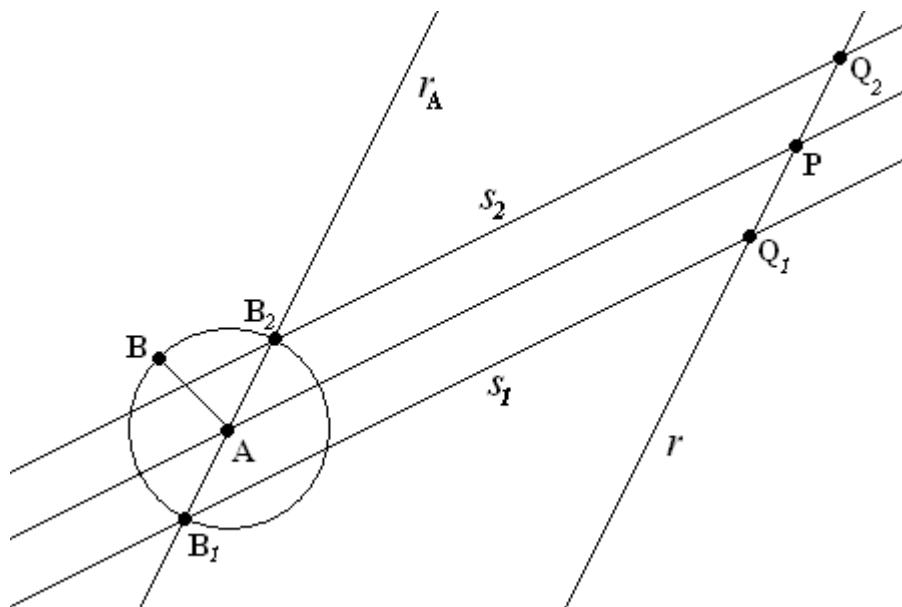
Teorema 1.2.7

Siano r una retta costruibile e \mathbf{P} un punto costruibile di r . Siano \mathbf{A} , \mathbf{B} punti costruibili.

Sono costruibili due punti \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 sulla retta r tali che

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1) = d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}_2) = d(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Dimostrazione — Supponiamo in primo luogo che il punto \mathbf{A} non appartenga alla retta r . È costruibile la circonferenza \mathcal{C} di centro \mathbf{A} passante per \mathbf{B} , ed è costruibile la retta r_A passante per \mathbf{A} e parallela a r ; pertanto sono costruibili i due punti \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 in cui \mathcal{C} incontra r_A .



È costruibile la retta s passante per \mathbf{A} e per \mathbf{P} , e sono costruibili le rette s_1 e s_2 passanti rispettivamente per \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 e parallele a s . Siano rispettivamente \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 i punti in cui s_1 e s_2 incontrano la retta r . I quadrilateri $\mathbf{APQ}_1\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{APQ}_2\mathbf{B}_2$ sono parallelogrammi per costruzione; in particolare,

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1) = d(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1) = d(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2) = d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}_2)$$

come si voleva dimostrare.

Esercizio 1.2.8

Siano \mathbf{C} , \mathbf{A} due punti costruibili, e sia \mathcal{C} la circonferenza con centro \mathbf{C} passante per \mathbf{A} . Sia \mathbf{P} un punto costruibile esterno a \mathcal{C} (tale cioè che $d(\mathbf{P}, \mathbf{C}) > d(\mathbf{C}, \mathbf{A})$).

Si dimostri che sono costruibili entrambe le tangenti a \mathcal{C} passanti per \mathbf{P} descrivendone esplicitamente la costruzione.

Esercizio 1.2.9

Siano \mathbf{C}_1 , \mathbf{A}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{A}_2 quattro punti costruibili, e siano rispettivamente \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 la circonferenza con centro \mathbf{C}_1 passante per \mathbf{A}_1 e la circonferenza con centro \mathbf{C}_2 passante per \mathbf{A}_2 . Supponiamo che le circonferenze \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 siano esterne una all'altra, cioè che sia

$$d(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) > d(\mathbf{C}_1, \mathbf{A}_1) + d(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_2).$$

Si dimostri che sono costruibili le quattro tangenti comuni a \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 descrivendone esplicitamente la costruzione.

1.3 - Numeri pitagorici.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dice che α è *pitagorico* se esistono due punti \mathbf{P} , \mathbf{Q} del piano costruibili (con riga e compasso a partire da \mathcal{I}) tali che

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = |\alpha|.$$

Teorema 1.3.1

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se α e β sono pitagorici, anche $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ sono pitagorici.

Dimostrazione — Poiché $|-x| = |x|$ e $|y - x| = |x - y|$ comunque presi $x, y \in \mathbb{R}$, senza perdere in generalità possiamo supporre che sia $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq \beta$. Siano $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}$ punti del piano costruibili tali che

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = |\alpha| \quad \text{e} \quad d(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) = |\beta|.$$

Per il teorema 1.2.7, sono costruibili due punti $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ sulla retta \mathbf{PQ} tali che

$$d(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1) = d(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_2) = d(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) = |\beta|.$$



Uno di essi (ad esempio \mathbf{Q}_1) appartiene alla semiretta di origine \mathbf{Q} a cui appartiene \mathbf{P} , l'altro (ad esempio \mathbf{Q}_2) appartiene alla semiretta di origine \mathbf{Q} a cui non appartiene \mathbf{P} . Poiché

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1) = |\alpha - \beta| \quad \text{e} \quad d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}_2) = |\alpha + \beta|$$

si è così provato che $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ sono pitagorici.

Lemma 1.3.2

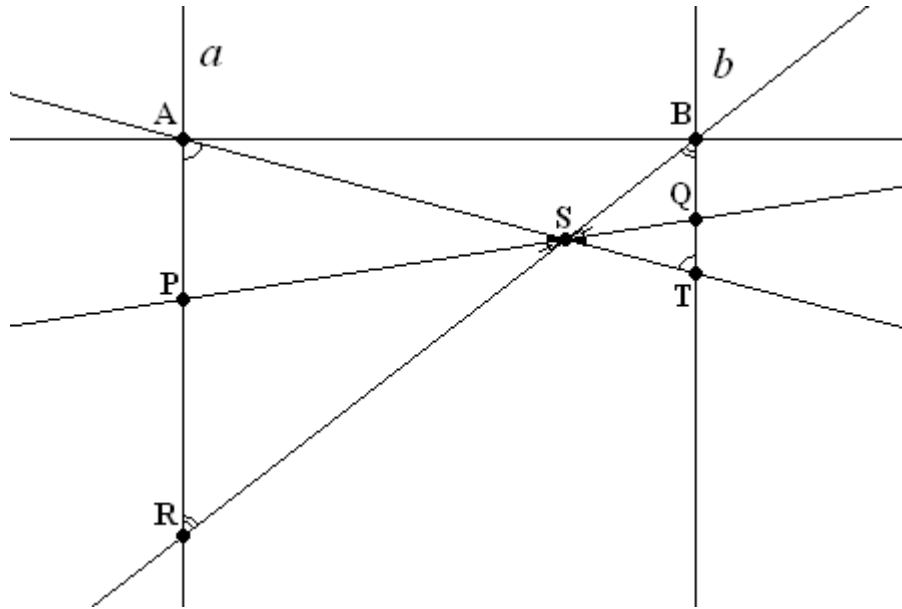
Siano \mathbf{A}, \mathbf{B} due punti del piano, e siano rispettivamente a, b le rette passanti per \mathbf{A} e \mathbf{B} ortogonali alla retta \mathbf{AB} . In uno stesso semipiano (fra i due individuati dalla retta \mathbf{AB}), siano \mathbf{P} un punto sulla retta a e \mathbf{Q} un punto sulla retta b ; sia \mathbf{R} un punto sulla semiretta individuata da \mathbf{P} su a alla quale non appartiene \mathbf{A} .

Sia \mathbf{S} l'intersezione fra le rette \mathbf{PQ} e \mathbf{RB} , e sia \mathbf{T} l'intersezione fra le rette \mathbf{AS} e b . Si ha

$$\frac{d(\mathbf{A}, \mathbf{P})}{d(\mathbf{P}, \mathbf{R})} = \frac{d(\mathbf{Q}, \mathbf{T})}{d(\mathbf{B}, \mathbf{Q})}.$$

Dimostrazione — I triangoli \mathbf{ASP} e \mathbf{QST} sono simili perché gli angoli in \mathbf{S} sono opposti al vertice mentre gli angoli \mathbf{SAP} e \mathbf{QTS} sono alterni interni rispetto alle rette parallele a e b tagliate dalla trasversale \mathbf{AT} . Dunque

$$\frac{d(\mathbf{A}, \mathbf{P})}{d(\mathbf{Q}, \mathbf{T})} = \frac{d(\mathbf{P}, \mathbf{S})}{d(\mathbf{S}, \mathbf{Q})}.$$



I triangoli **PSR** e **BSQ** sono simili perché gli angoli in **S** sono opposti al vertice mentre gli angoli **PRS** e **SBQ** sono alterni interni rispetto alle rette parallele a e b tagliate dalla trasversale **RB**. Dunque

$$\frac{d(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{d(\mathbf{B}, \mathbf{Q})} = \frac{d(\mathbf{P}, \mathbf{S})}{d(\mathbf{S}, \mathbf{Q})}.$$

Si può allora concludere che

$$\frac{d(\mathbf{A}, \mathbf{P})}{d(\mathbf{Q}, \mathbf{T})} = \frac{d(\mathbf{P}, \mathbf{R})}{d(\mathbf{B}, \mathbf{Q})}$$

ovvero (moltiplicando ambo i membri per $\frac{d(\mathbf{Q}, \mathbf{T})}{d(\mathbf{P}, \mathbf{R})}$) che

$$\frac{d(\mathbf{A}, \mathbf{P})}{d(\mathbf{P}, \mathbf{R})} = \frac{d(\mathbf{Q}, \mathbf{T})}{d(\mathbf{B}, \mathbf{Q})}$$

proprio come si voleva.

Lemma 1.3.3

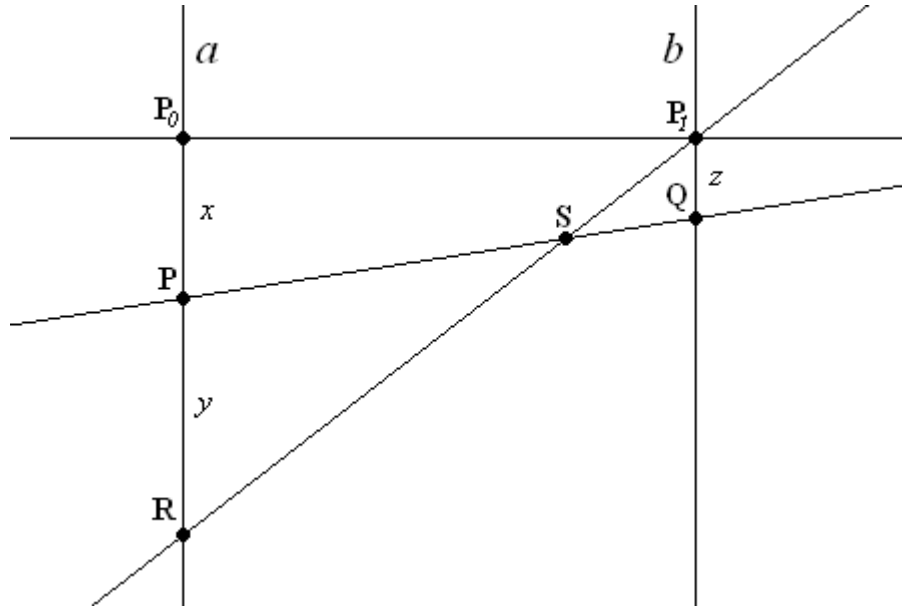
Se x, y, z sono numeri reali pitagorici, anche $\frac{x}{y}z$ è pitagorico.

Dimostrazione — Per il teorema 1.2.5 (tenendo conto del lemma 1.2.1) sono costruibili le rette a, b ortogonali alla retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ e passanti rispettivamente per \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 . Ripetute applicazioni del teorema 1.2.7 ci permettono di costruire due punti **P** e **R** sulla retta a e un punto **Q** sulla retta b (tutti in uno stesso dei due semipiani individuati dalla retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$) tali che

$$d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}) = |x|, \quad d(\mathbf{P}, \mathbf{R}) = |y| \quad \text{e} \quad d(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}) = |z|.$$

Avremo inoltre cura di scegliere **R** in modo che appartenga alla semiretta di origine **P** alla quale non appartiene \mathbf{P}_0 .

Sono costruibili la retta \mathbf{RP}_1 , la retta \mathbf{PQ} e il punto **S** loro intersezione.



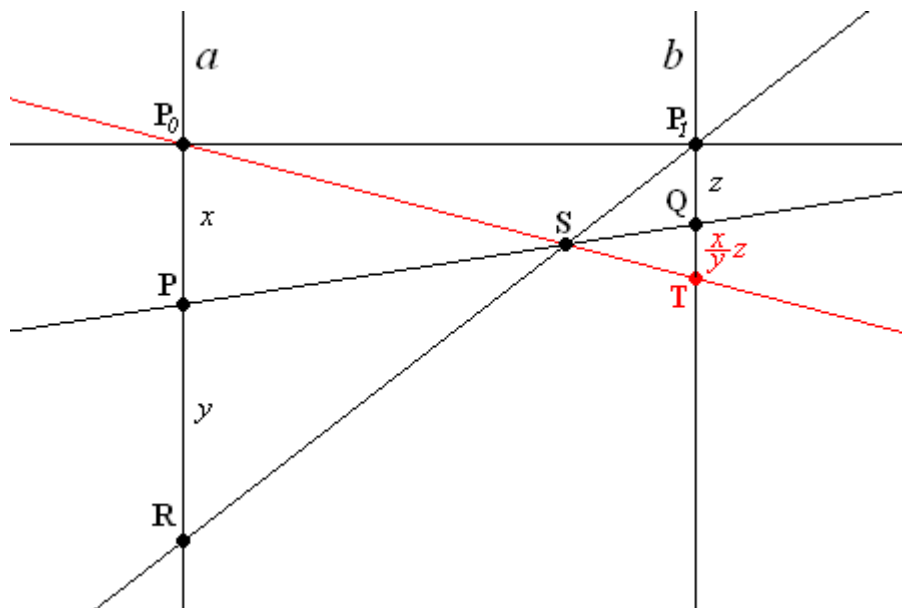
Per il lemma 1.3.2 (con $\mathbf{A} := \mathbf{P}_0$ e $\mathbf{B} := \mathbf{P}_1$) la retta $\mathbf{P}_0\mathbf{S}$ (che è costruibile perché \mathbf{P}_0 e \mathbf{S} sono punti costruibili) incontra la retta b in un punto \mathbf{T} tale che

$$\frac{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P})}{d(\mathbf{P}, \mathbf{R})} = \frac{d(\mathbf{Q}, \mathbf{T})}{d(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q})}$$

e dunque

$$d(\mathbf{Q}, \mathbf{T}) = \frac{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P})}{d(\mathbf{P}, \mathbf{R})} d(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}) = \frac{|x|}{|y|} |z| = \left| \frac{x}{y} z \right|.$$

Poiché \mathbf{Q} e \mathbf{T} sono punti costruibili, ciò prova l'asserto.



Teorema 1.3.4

L'insieme dei numeri reali pitagorici è un sottocampo di \mathbb{R} .

Dimostrazione — L'insieme dei numeri reali pitagorici è chiuso rispetto alla somma e all'opposto per il teorema 1.3.1, è chiuso rispetto al prodotto per il teorema 1.3.3 (con $y := 1$) ed è chiuso rispetto al reciproco ancora per il teorema 1.3.3 (con $x := 1$ e $z := 1$), dunque è un sottocampo di \mathbb{R} .

Corollario 1.3.5

L'insieme dei numeri reali pitagorici è un campo che contiene \mathbb{Q} .

Dimostrazione — L'asserto segue subito dal teorema 1.3.4 poiché \mathbb{Q} è contenuto in ogni sottocampo di \mathbb{R} .

Nel seguito indicheremo con \mathbb{Q}^{Pit} il campo dei numeri reali pitagorici.

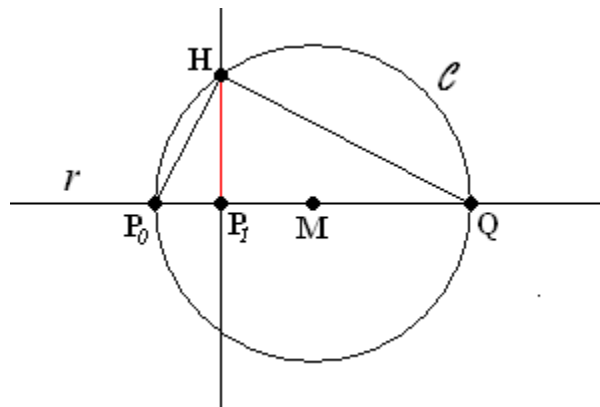
Teorema 1.3.6

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha^2 \in \mathbb{Q}^{Pit}$, è anche $\alpha \in \mathbb{Q}^{Pit}$.

Dimostrazione — Sia r la retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Per il teorema 1.2.7 e per la definizione di \mathbb{Q}^{Pit} è costruibile un punto \mathbf{Q} sulla semiretta individuata da \mathbf{P}_1 su r non contenente \mathbf{P}_0 tale che $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}) = \alpha^2$.

Per il teorema 1.2.4 è costruibile il punto medio \mathbf{M} del segmento $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ e quindi è costruibile la circonferenza \mathcal{C} che ha centro in \mathbf{M} e passa per \mathbf{P}_0 (e per \mathbf{Q}). Per il teorema 1.2.5 è costruibile la retta per \mathbf{P}_1 ortogonale a r e quindi è costruibile il punto \mathbf{H} in cui tale retta incontra \mathcal{C} .



Il triangolo $\mathbf{P}_0\mathbf{QH}$ è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza; per il secondo teorema di Euclide, $d(\mathbf{H}, \mathbf{P}_1)$ è media proporzionale fra $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$ e $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q})$, cioè

$$(d(\mathbf{H}, \mathbf{P}_1))^2 = \alpha^2 \quad \text{e quindi} \quad |\alpha| = d(\mathbf{H}, \mathbf{P}_1)$$

cosicché $\alpha \in \mathbb{Q}^{Pit}$ come si voleva dimostrare.

Il contenuto del teorema 1.3.6 si può esprimere dicendo che il campo \mathbb{Q}^{Pit} è *chiuso rispetto agli ampliamenti quadratici*.

Nella prossima sezione vedremo come la conoscenza del campo \mathbb{Q}^{Pit} ci permette di caratterizzare i punti, le rette e le circonferenze costruibili; nella sezione successiva daremo una semplice caratterizzazione puramente algebrica di \mathbb{Q}^{Pit} .

1.4 - Numeri pitagorici e punti costruibili.

In questa e nelle prossime sezioni supporremo fissato il sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $\mathbf{P}_0\mathbf{xy}$ che ha origine in \mathbf{P}_0 , ha come asse delle ascisse la retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, e ha come punto unità sull'asse delle ascisse il punto \mathbf{P}_1 . Caratterizzeremo i punti costruibili mediante le loro coordinate; caratterizzeremo le rette e le circonferenze costruibili mediante le loro equazioni.

Teorema 1.4.1

Sia \mathbf{P} un punto del piano, e siano x_0 la sua ascissa e y_0 la sua ordinata. Sono fatti equivalenti:

- (i) \mathbf{P} è costruibile
- (ii) $x_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$ e $y_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$.

Dimostrazione — Se \mathbf{P} è costruibile, sono costruibili le perpendicolari condotte da \mathbf{P} all'asse \mathbf{x} e all'asse \mathbf{y} , e quindi anche i punti \mathbf{P}_x e \mathbf{P}_y in cui esse li incontrano. Poiché

$$|x_0| = d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_x) \quad \text{e} \quad |y_0| = d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_y)$$

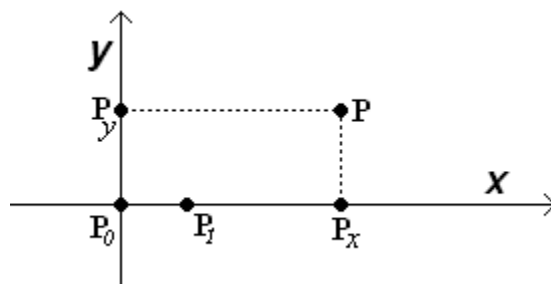
si ha la (ii).

Viceversa, supponiamo che sia $x_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$ e $y_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$. Sia, per fissare le idee, $x_0 \geq 0$ e $y_0 \geq 0$. Per il teorema 1.2.7, sono costruibili un punto \mathbf{P}_x sul semiasse positivo delle ascisse e un punto \mathbf{P}_y sul semiasse positivo delle ordinate tali che

$$d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_x) = |x_0| \quad \text{e} \quad d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_y) = |y_0|$$

e quindi sono costruibili le rette passanti per \mathbf{P}_x e \mathbf{P}_y ortogonali rispettivamente all'asse \mathbf{x} e all'asse \mathbf{y} . Esse si incontrano proprio nel punto \mathbf{P} che dunque è costruibile.

Se $x_0 < 0$ e/o $y_0 < 0$, si ripete questo ragionamento scegliendo \mathbf{P}_x sul semiasse negativo delle ascisse e/o \mathbf{P}_y sul semiasse negativo delle ordinate.



Teorema 1.4.2

Per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$, la retta di equazione $x = x_0$ e la retta di equazione $y = y_0$ sono rette costruibili.

Dimostrazione — Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$. Per il teorema 1.4.1 il punto \mathbf{P} di coordinate (x_0, y_0) è costruibile; dunque per i teoremi 1.2.5 e 1.2.6 sono costruibili la retta di equazione $x = x_0$ e la retta di equazione $y = y_0$ che sono rispettivamente la retta ortogonale e la parallela condotte da \mathbf{P} alla retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Teorema 1.4.3

Sia r una retta del piano. Sono fatti equivalenti:

- (i) r è costruibile
- (ii) r ha equazione $y = px + q$ con $p, q \in \mathbb{Q}^{Pit}$ (oppure $x = x_0$ con $x_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$)
- (iii) esiste una equazione di r della forma $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}^{Pit}$.

Dimostrazione —

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Se r è parallela all'asse delle ordinate, essa ha equazione $x = x_0$ dove x_0 è l'ascissa del punto \mathbf{P}_x in cui r incontra l'asse delle ascisse. Poiché r e l'asse delle ascisse sono due rette costruibili, \mathbf{P}_x è un punto costruibile e quindi $x_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$ per il teorema 1.4.1.

Se r invece non è parallela all'asse delle ordinate, essa incontra tale asse in un punto \mathbf{P}_y le cui coordinate sono della forma $(0, q)$ con $q \in \mathbb{R}$. Poiché r e l'asse delle ordinate sono due rette costruibili (cfr. teorema 1.4.2), \mathbf{P}_y è un punto costruibile e dunque $q \in \mathbb{Q}^{Pit}$ per il teorema 1.4.1. Se r è parallela all'asse delle ascisse, essa ha equazione $y = q$ e quindi si ha la (ii) (con $p = 0$). Se infine r non è parallela nemmeno all'asse delle ascisse, lo incontra in un punto \mathbf{P}_x le cui coordinate sono della forma $(x_0, 0)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ e dunque ha equazione

$$y = -\frac{q}{x_0}x + q.$$

Poiché r e l'asse delle ascisse sono due rette costruibili, \mathbf{P}_x è un punto costruibile e dunque $x_0 \in \mathbb{Q}^{Pit}$ per il teorema 1.4.1. Poiché \mathbb{Q}^{Pit} è un campo, $-\frac{q}{x_0} \in \mathbb{Q}^{Pit}$ e quindi anche in questo caso vale la (ii) (con $p = -\frac{q}{x_0}$).

$$(ii) \Rightarrow (iii)$$

Se vale la (ii) r ha equazione $px + (-1)y + q = 0$ oppure $x + 0y + (-x_0) = 0$ e quindi vale la (iii).

$$(iii) \Rightarrow (i)$$

Se r è parallela all'asse delle ordinate (cioè $b = 0$), essa incontra l'asse delle ascisse nel punto \mathbf{P}_x di coordinate $(-\frac{c}{a}, 0)$ (che è costruibile per il teorema 1.4.1 perché per ipotesi $a, c \in \mathbb{Q}^{Pit}$ e \mathbb{Q}^{Pit} è un campo). Poiché l'asse delle ordinate è costruibile (cfr. teorema 1.4.2) e \mathbf{P}_x è costruibile, r è costruibile per il teorema 1.2.6.

Se r è parallela all'asse delle ascisse (cioè $a = 0$), essa incontra l'asse delle ordinate nel punto \mathbf{P}_y di coordinate $(0, -\frac{c}{b})$ (che è costruibile per il teorema 1.4.1 perché per ipotesi $b, c \in \mathbb{Q}^{Pit}$ e \mathbb{Q}^{Pit} è un campo). Poiché l'asse delle ascisse è costruibile e \mathbf{P}_y è costruibile, r è costruibile per il teorema 1.2.6.

Se r non è parallela né all'asse delle ascisse né all'asse delle ordinate (cioè $a \neq 0$ e $b \neq 0$), essa incontra l'asse delle ascisse nel punto \mathbf{P}_x di coordinate $(-\frac{c}{a}, 0)$ e l'asse delle ordinate nel punto \mathbf{P}_y di coordinate $(0, -\frac{c}{b})$. Questi due punti sono costruibili per il teorema 1.4.1 perché per ipotesi $a, b, c \in \mathbb{Q}^{Pit}$ e \mathbb{Q}^{Pit} è un campo; dunque r è costruibile.

Teorema 1.4.4

Sia \mathcal{C} una circonferenza del piano. Se \mathcal{C} è costruibile, sono costruibili il centro di \mathcal{C} e un punto di \mathcal{C} .

Dimostrazione — Siano $\mathbf{P}, \bar{\mathbf{P}}$ due punti distinti di \mathcal{C} , e supponiamo per fissare le idee che le loro ascisse x_*, \bar{x}_* siano diverse (altrimenti possiamo ragionare sulle ordinate). Esistono infiniti numeri razionali compresi fra x_* e \bar{x}_* ; siano x_1, x_2 due di essi. Allora $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ e poiché $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}^{Pit}$ le rette di equazione $x = x_1, x = x_2$ sono costruibili per il teorema 1.4.2. Esse incontrano \mathcal{C} in quattro punti costruibili; a noi ne bastano tre, perché per il teorema 1.2.4 sono costruibili gli assi dei segmenti che li hanno come estremi e tali assi si incontrano nel centro di \mathcal{C} che quindi è costruibile.

Osservazione 1.4.5

La dimostrazione del teorema 1.4.4 non è pienamente soddisfacente: infatti non fornisce un *algoritmo* per costruire i quattro punti su \mathcal{C} . D'altro lato, nella situazione classica (cioè quella che stiamo studiando) lo stesso teorema è superfluo, perché una circonferenza può essere costruibile soltanto se compare in una sequenza di elementi costruibili preceduta dal suo centro e da un suo punto.

Il valore del teorema 1.4.4 è quindi solo (e un po' vagamente) teorico: esso può servire soltanto nel caso in cui la circonferenza \mathcal{C} appartiene all'insieme \mathcal{I} di partenza (cfr. sez. 1.1). La situazione è del tutto analoga a quella del lemma 1.2.3.

Teorema 1.4.6

Sia \mathcal{C} una circonferenza del piano. Sono fatti equivalenti:

- (i) \mathcal{C} è costruibile
- (ii) \mathcal{C} ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}^{Pit}$.

Dimostrazione —

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Se \mathcal{C} è costruibile, per il teorema 1.4.4 sono costruibili il suo centro $\mathbf{C}_0 \equiv (x_0, y_0)$ e un suo punto $\bar{\mathbf{P}} \equiv (\bar{x}, \bar{y})$, e per il teorema 1.4.1 si ha $x_0, y_0, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Q}^{Pit}$. La circonferenza \mathcal{C} ha equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2$$

ossia

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + 2x_0\bar{x} + 2y_0\bar{y} - \bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 0$$

cioè la (ii) con

$$a := -2x_0, \quad b := -2y_0, \quad c := 2x_0\bar{x} + 2y_0\bar{y} - \bar{x}^2 - \bar{y}^2.$$

Poiché \mathbb{Q}^{Pit} è un campo che contiene \mathbb{Q} (cfr. corollario 1.3.5), ciò prova la (ii).

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

Se \mathcal{C} ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, posto

$$x_0 := -\frac{a}{2}, \quad y_0 := -\frac{b}{2}, \quad r := \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$$

è un facile calcolo verificare che \mathcal{C} è la circonferenza che ha centro in $\mathbf{C}_0 \equiv (x_0, y_0)$ e passa per il punto $\mathbf{P} \equiv (x_0 + r, y_0)$. Poiché \mathbf{C}_0 e \mathbf{P} sono punti costruibili (per i teoremi 1.3.4, 1.3.6 e 1.4.1), \mathcal{C} è costruibile.

1.5 - Una caratterizzazione algebrica dei numeri pitagorici.

Teorema 1.5.1

Se un punto del piano [una retta del piano, una circonferenza del piano] è costruibile, esiste una sequenza finita $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ di sottocampi di \mathbb{R} tale che

- (a) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$;
- (b) \mathbb{F}_{i+1} è l'ampliamento di \mathbb{F}_i mediante un $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$;
- (c) il punto ha coordinate (\bar{x}, \bar{y}) con $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_k$;

[la retta ha equazione $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{F}_k$]

[la circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{F}_k$]

Dimostrazione — Dimostriamo le tre affermazioni (relative ai punti, alle rette e alle circonferenze) contemporaneamente, procedendo per induzione sulla lunghezza della costruzione del punto [della retta, della circonferenza] (cfr. sez. 1.1).

Se la lunghezza della costruzione è 1, abbiamo a che fare con uno dei due punti \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 e l'asserto è ovvio. Supponiamo allora che il teorema sia vero per tutti i punti, le rette e le circonferenze costruibili la cui costruzione ha lunghezza $\leq n$.

Sia

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n+1}$$

la costruzione (di lunghezza $n + 1$) di una retta r ; allora esistono $s, t \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\omega_s = \mathbf{P}_s \equiv (x_s, y_s)$ e $\omega_t = \mathbf{P}_t \equiv (x_t, y_t)$ sono due punti costruibili e r è la retta passante per \mathbf{P}_s e \mathbf{P}_t . Per l'ipotesi di induzione, esiste una sequenza finita $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ di sottocampi di \mathbb{R} tale che

- (a) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$;
- (b) \mathbb{F}_{i+1} è l'ampliamento di \mathbb{F}_i mediante un $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$;
- (c) $x_s, y_s, x_t, y_t \in \mathbb{F}_k$.

La retta r ha equazione

$$(y_t - y_s)(x - x_s) - (x_t - x_s)(y - y_s) = 0$$

da cui l'asserto, ricordando che \mathbb{F}_k è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

Analogamente, sia

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n+1}$$

la costruzione (di lunghezza $n + 1$) di una circonferenza \mathcal{C} ; allora esistono $s, t \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\omega_s = \mathbf{P}_s \equiv (x_s, y_s)$ e $\omega_t = \mathbf{P}_t \equiv (x_t, y_t)$ sono due punti costruibili e \mathcal{C} è la circonferenza di centro \mathbf{P}_s passante per \mathbf{P}_t . Per l'ipotesi di induzione, esiste una sequenza finita $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ di sottocampi di \mathbb{R} tale che

- (a) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$;
- (b) \mathbb{F}_{i+1} è l'ampliamento di \mathbb{F}_i mediante un $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$;
- (c) $x_s, y_s, x_t, y_t \in \mathbb{F}_k$.

La circonferenza \mathcal{C} ha equazione

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 - (x_t - x_s)^2 - (y_t - y_s)^2 = 0$$

da cui l'asserto, ricordando che \mathbb{F}_k è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

Sia infine

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n+1}$$

la costruzione (di lunghezza $n + 1$) di un punto \mathbf{P} ; possono verificarsi tre casi.

Potrebbero esistere $s, t \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\omega_s = r_s$ e $\omega_t = r_t$ sono due rette costruibili e \mathbf{P} è la loro intersezione. Per l'ipotesi di induzione, esiste una sequenza finita $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ di sottocampi di \mathbb{R} tale che

- (a) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$;
- (b) \mathbb{F}_{i+1} è l'ampliamento di \mathbb{F}_i mediante un $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$;
- (c) r_s ha equazione $a_s x + b_s y + c_s = 0$ e r_t ha equazione $a_t x + b_t y + c_t = 0$ con $a_s, b_s, c_s, a_t, b_t, c_t \in \mathbb{F}_k$.

In questo caso, le coordinate del punto \mathbf{P} sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} a_s x + b_s y + c_s = 0 \\ a_t x + b_t y + c_t = 0 \end{cases}$$

e dunque appartengono a \mathbb{F}_k .

Oppure potrebbero esistere $s, t \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\omega_s = r_s$ e $\omega_t = \mathcal{C}_t$ sono rispettivamente una retta costruibile e una circonferenza costruibile e \mathbf{P} è una delle loro intersezioni. Per l'ipotesi di induzione, esiste una sequenza finita $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ di sottocampi di \mathbb{R} tale che

(a) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$;

(b) \mathbb{F}_{i+1} è l'ampliamento di \mathbb{F}_i mediante un $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$;

(c) r_s ha equazione $a_s x + b_s y + c_s = 0$ e \mathcal{C}_t ha equazione $x^2 + y^2 + a_t x + b_t y + c_t = 0$ con $a_s, b_s, c_s, a_t, b_t, c_t \in \mathbb{F}_k$.

In questo caso, le coordinate del punto \mathbf{P} sono la soluzione del sistema di secondo grado

$$\begin{cases} a_s x + b_s y + c_s = 0 \\ x^2 + y^2 + a_t x + b_t y + c_t = 0 \end{cases}$$

e dunque appartengono all'ampliamento di \mathbb{F}_k mediante un $x_k \in \mathbb{R}$ tale che $x_k^2 \in \mathbb{F}_k$. L'asserto resta dunque vero, eventualmente con una più lunga sequenza di campi.

Infine potrebbero esistere $s, t \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\omega_s = \mathcal{C}_s$ e $\omega_t = \mathcal{C}_t$ sono due circonferenze costruibili e \mathbf{P} è una delle loro intersezioni. Per l'ipotesi di induzione, esiste una sequenza finita $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ di sottocampi di \mathbb{R} tale che

(a) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$;

(b) \mathbb{F}_{i+1} è l'ampliamento di \mathbb{F}_i mediante un $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$;

(c) \mathcal{C}_s ha equazione

$$x^2 + y^2 + a_s x + b_s y + c_s = 0$$

e \mathcal{C}_t ha equazione

$$x^2 + y^2 + a_t x + b_t y + c_t = 0$$

con $a_s, b_s, c_s, a_t, b_t, c_t \in \mathbb{F}_k$.

In quest'ultimo caso, le coordinate del punto \mathbf{P} sono la soluzione del sistema di secondo grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_s x + b_s y + c_s = 0 \\ x^2 + y^2 + a_t x + b_t y + c_t = 0 \end{cases}$$

che però come è noto è equivalente al sistema di secondo grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_s x + b_s y + c_s = 0 \\ (a_s - a_t)x + (b_s - b_t)y = 0 \end{cases}$$

e dunque appartengono comunque all'ampliamento di \mathbb{F}_k mediante un $x_k \in \mathbb{R}$ tale che $x_k^2 \in \mathbb{F}_k$. L'asserto resta dunque vero, eventualmente con una più lunga sequenza di campi.

Teorema 1.5.2

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Sono fatti equivalenti:

- (i) $\bar{x} \in \mathbb{Q}^{Pit}$;
- (ii) esiste una sequenza finita $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$ di sottocampi di \mathbb{R} tale che
 - (a) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$;
 - (b) \mathbb{F}_{i+1} è l'ampliamento di \mathbb{F}_i mediante un $x_i \in \mathbb{R}$ tale che $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$;
 - (c) $\bar{x} \in \mathbb{F}_k$;

Dimostrazione — Per il corollario 1.3.5 e il teorema 1.3.6 è immediato che (ii) \Rightarrow (i) .

Viceversa, sia $\bar{x} \in \mathbb{Q}^{Pit}$; per il teorema 1.2.7 è costruibile il punto $\bar{\mathbf{P}} \equiv (\bar{x}, 0)$ e dunque vale la (ii) per il teorema 1.5.1 .

Corollario 1.5.3

Se $\bar{x} \in \mathbb{Q}^{Pit}$, \bar{x} appartiene a un ampliamento di \mathbb{Q} di grado 2^k con $k \in \mathbb{N}$.

2.- I PROBLEMI CLASSICI

Le pagine che seguono sono tratte da:

Michel Artin — ALGEBRA — Bollati Boringhieri, 1991 (pagine 590-595)

Siamo ora in grado di dimostrare l'impossibilità di talune costruzioni geometriche. Il nostro metodo consisterà nel far vedere che se fosse possibile una certa costruzione, sarebbe anche possibile costruire un numero algebrico il cui grado su \mathbb{Q} non è una potenza di 2, in contraddizione col corollario (4.10).

Come primo esempio, trattiamo il problema della trisezione dell'angolo. Dobbiamo fare attenzione a porre correttamente il problema, poiché è possibile trisecare molti angoli particolari, ad esempio un angolo di 45° . Di solito, il problema si enuncia richiedendo un unico metodo di costruzione che valga per *un angolo assegnato qualsiasi*.

Per essere precisi il più possibile, diciamo che un angolo θ è *costruibile* se il suo coseno $\cos \theta$ è costruibile. È possibile dare altre definizioni equivalenti. Per esempio, θ è costruibile se e solo se la retta che passa per l'origine e forma un angolo θ con l'asse x è costruibile. Oppure, θ è costruibile se e solo se è possibile costruire due rette qualsiasi formanti tra loro un angolo θ .

Ora, basta assegnare un angolo θ (ad esempio riportando il suo coseno sull'asse x) per disporre di una nuova informazione utilizzabile in un'eventuale trisezione. Per analizzare le implicazioni di questa nuova informazione, dovremmo cominciare a determinare tutte le costruzioni che potrebbero essere effettuate quando, oltre a due punti, venisse assegnata all'inizio un'altra lunghezza ($= \cos \theta$). Preferiremmo non perdere troppo tempo, e per fortuna c'è una via di uscita. Esibiremo un angolo θ particolare, con le seguenti proprietà:

- (4.11) (i) θ è costruibile,
 (ii) $\frac{1}{3}\theta$ non è costruibile.

La prima condizione ci dice che l'assegnazione dell'angolo θ non ci dà alcuna nuova informazione, nel senso che, se l'angolo θ , una volta assegnato, può essere trisecato, esso può essere trisecato anche senza esser stato assegnato. La seconda condizione ci dice che non esiste un metodo generale di trisezione, poiché non è possibile trisecare θ .

L'angolo $\theta = 60^\circ$ risolve il problema. Un angolo di 60° è costruibile, poiché $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. D'altra parte, è impossibile costruire un angolo di 20° . Per dimostrarlo faremo vedere che $\cos 20^\circ$ è un numero algebrico di grado 3 su \mathbb{Q} . Ne seguirà, in virtù del corollario (4.10), che $\cos 20^\circ$ non è costruibile e quindi che l'angolo di 60° non può essere trisecato.

Le formule di addizione per il seno e il coseno possono essere usate per dimostrare l'identità:

$$(4.12) \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Ponendo $\theta = 20^\circ$ e $\alpha = \cos 20^\circ$, si ottiene la relazione: $\frac{1}{2} = 4\alpha^3 - 3\alpha$, ossia, $8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$.

(4.13) LEMMA *Il polinomio $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ è irriducibile su \mathbb{Q} .*

Dimostrazione. È sufficiente cercare fattori lineari $ax + b$, con a, b interi tali che a divida 8, e b sia uguale a ± 1 . Un altro modo per dimostrare l'irriducibilità è quello di verificare che f non ha radici modulo 5. ■

Questo lemma ci dice che α ha grado 3 su \mathbb{Q} , e quindi non può essere costruito.

Come secondo esempio, dimostriamo che è impossibile costruire con riga e compasso il poligono regolare di 7 lati. (Questo problema è simile al precedente, poiché la costruzione dell'angolo di 20° è equivalente alla costruzione del poligono regolare di 18 lati.) Denotiamo con θ l'angolo $2\pi/7$ e poniamo $\zeta = \cos \theta + i \sin \theta$. Allora ζ è una radice del polinomio $x^6 + x^5 + \dots + 1$, che è irriducibile [cap. 11 (4.6)]. Pertanto ζ ha grado 6 su \mathbb{Q} . Se l'ettagono regolare fosse costruibile, allora $\cos \theta$ e $\sin \theta$ sarebbero numeri costruibili, e quindi appartenerebbero a un'estensione reale di grado 2^n su \mathbb{Q} , in virtù del teorema (4.9). Chiamiamo K tale campo e consideriamo l'estensione $K(i)$. Essa ha grado 2, e pertanto $[K(i) : \mathbb{Q}] = 2^{n+1}$. Ma $\zeta = \cos \theta + i \sin \theta \in K(i)$. Ciò contraddice il fatto che il grado di ζ è 6 [cfr. (3.6)].

Convieni notare che la precedente argomentazione non vale soltanto per il numero 7: essa è applicabile a un numero primo p qualsiasi, con l'unica condizione che $p-1$, ossia il grado del polinomio irriducibile $x^{p-1} + \dots + x + 1$, non sia una potenza di 2.

(4.14) COROLLARIO *Sia p un numero primo. Se il poligono regolare di p lati può essere costruito con riga e compasso, allora $p = 2^r + 1$, essendo r un intero opportuno. ■*

Gauss ha dimostrato il viceversa, ossia che, se un numero primo p ha la forma $2^r + 1$, è possibile costruire il poligono regolare di p lati. Per esempio, il poligono regolare di 17 lati può essere costruito con riga e compasso.

3.- COSTRUIRE CON RIGA GRADUATA E COMPASSO

3.1 - Definizione.

Alcune costruzioni impossibili con riga e compasso si possono però effettuare se la riga di cui disponiamo è contrassegnata in modo da evidenziare un segmento di lunghezza unitaria (si parla in tal caso di *riga graduata*). Formalizziamo la disponibilità di una riga graduata modificando come segue la definizione della sezione 1.1 .

Sia \mathcal{I} un insieme di punti e di curve del piano al quale appartengono almeno due punti distinti \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 . Un punto del piano [una retta del piano, una circonferenza del piano] si dice *costruibile con riga graduata e compasso a partire da \mathcal{I}* se è l'ultimo elemento di una sequenza finita

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k$$

di punti e curve del piano ogni elemento della quale

- è un elemento di \mathcal{I}

oppure

- è la retta passante per due punti \mathbf{P}, \mathbf{Q} che la precedono nella sequenza

oppure

- è la circonferenza di centro \mathbf{P} passante per \mathbf{Q} , con \mathbf{P}, \mathbf{Q} punti che la precedono nella sequenza

oppure

- è l'intersezione di due curve che la precedono nella sequenza

oppure

- è una retta che interseca due curve che la precedono nella sequenza in due punti \mathbf{H}, \mathbf{K} tali che $d(\mathbf{H}, \mathbf{K}) = 1$.

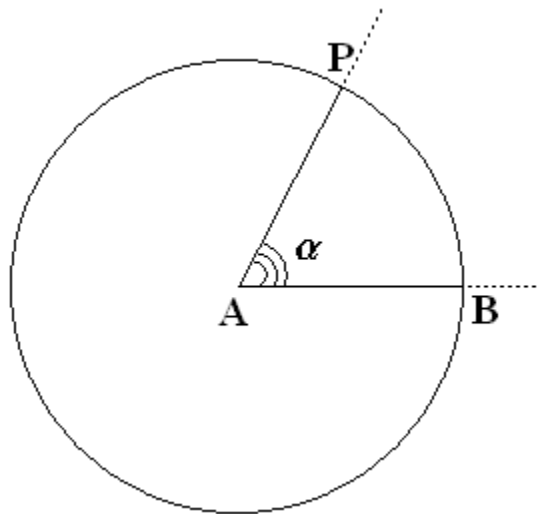
La sequenza sopra descritta si dice una *costruzione con riga graduata e compasso a partire da \mathcal{I}* del punto [della retta, della circonferenza].

3.2 - La trisezione dell'angolo con *riga graduata e compasso*.

Mostriamo come si può trisecare il generico angolo acuto con riga graduata e compasso. Vale la pena di osservare che che il requisito che l'angolo sia acuto non costituisce una effettiva limitazione, perché ogni angolo ottuso è il doppio di un angolo acuto (e ogni angolo concavo è il doppio di un angolo ottuso), e sono ben noti gli algoritmi per bisecare e raddoppiare un angolo con riga e compasso.

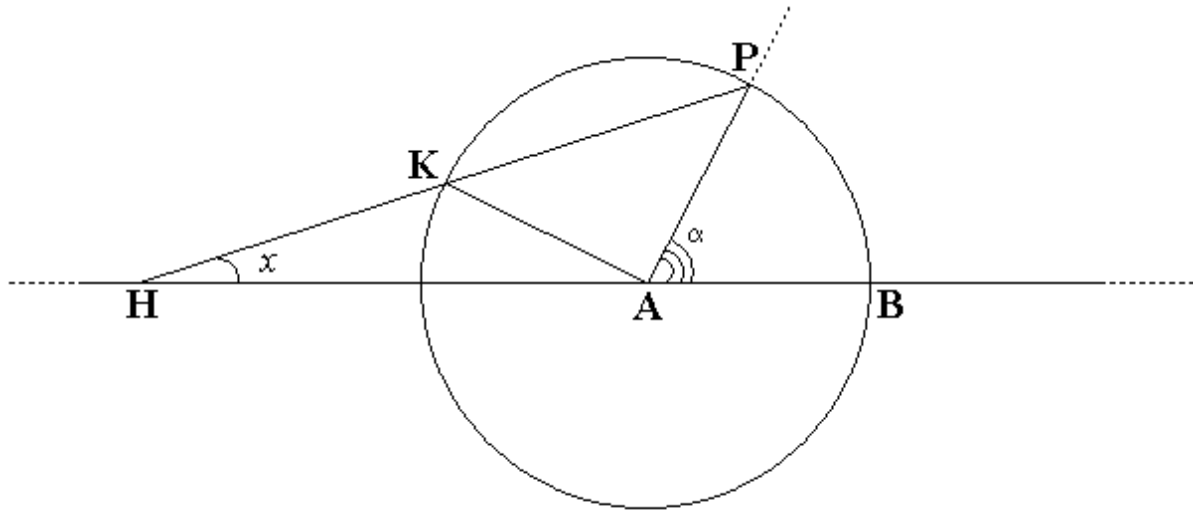
Supponiamo dunque che all'insieme \mathcal{I} appartengano due semirette che hanno la stessa origine **A** e individuano un angolo α , e mostriamo come si possono costruire con riga graduata e compasso due semirette che individuano un angolo il cui triplo è α .

Sappiamo che è possibile costruire un punto **B** sul primo lato dell'angolo in modo che il segmento **AB** abbia lunghezza 1. Costruiamo la circonferenza \mathcal{C} di centro **A** passante per **B**, e costruiamo il punto **P** in cui tale circonferenza incontra il secondo lato dell'angolo:



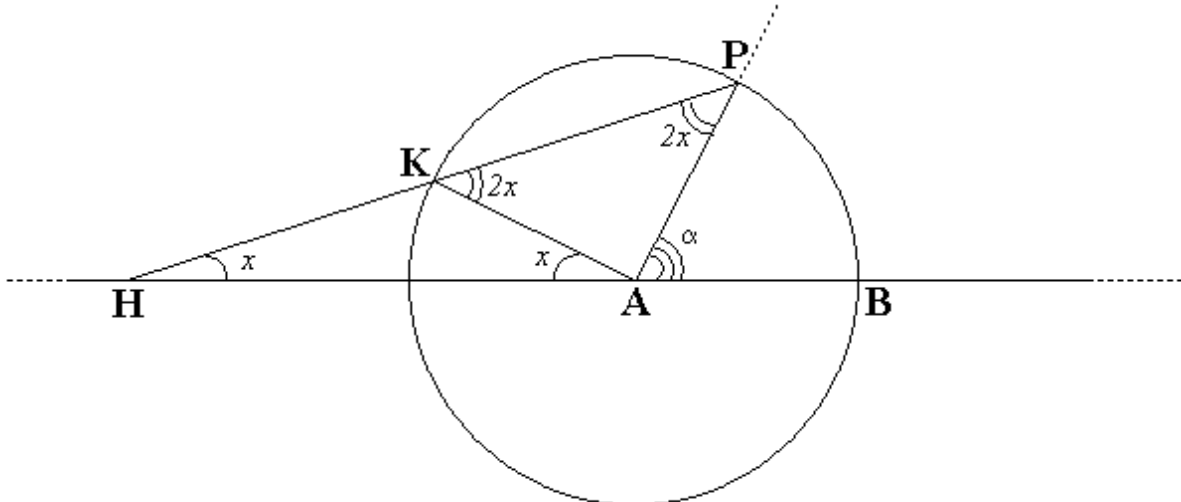
Costruiamo ora una retta che passi per **P** e incontri la retta **AB** in un punto **H** e la circonferenza \mathcal{C} in un punto **K** tali che sia $d(\mathbf{H}, \mathbf{K}) = 1$. Naturalmente, escludiamo il diametro passante per **P** (che verifica banalmente le condizioni poste).

Supponiamo che **H** appartenga alla semiretta della retta **AB** di origine **A** non contenente **B** e che sia esterno alla circonferenza \mathcal{C} .



Per ipotesi, $d(H, K) = d(A, K) = d(A, P) = 1$. Proviamo che l'angolo AHK è un terzo dell'angolo α .

Se indichiamo con x la misura dell'angolo AHK , poiché il triangolo HAK è isoscele con base HA deve essere anche $HAK = x$. L'angolo esterno PKA , allora, è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti e quindi misura $2x$.



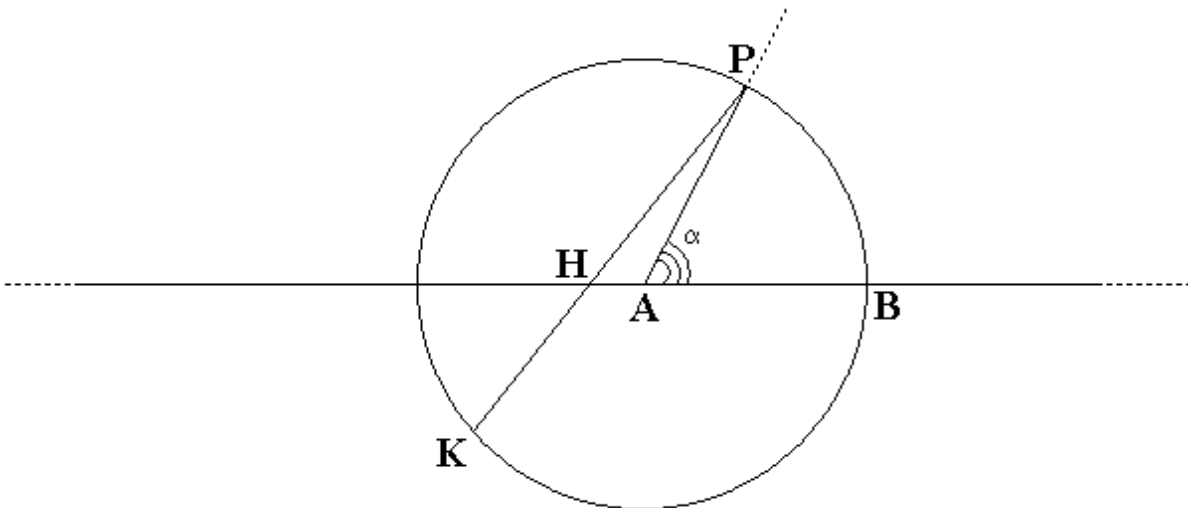
Anche il triangolo KAP è isoscele, con base KP (infatti AK e AP sono raggi della circonferenza). Dunque l'angolo APK ha la stessa misura dell'angolo PKA , cioè $2x$. Poiché α è angolo esterno del triangolo HAP , esso è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti, ossia

$$\alpha = x + 2x = 3x$$

e quindi $x = \frac{1}{3}\alpha$, come si voleva dimostrare.

Ma si noti che non c'è alcun motivo perché si debba supporre che **H** appartenga alla semiretta della retta **AB** di origine **A** non contenente **B**, e nemmeno che sia esterno alla circonferenza C .

Certamente, se **H** appartiene alla semiretta della retta **AB** di origine **A** non contenente **B** allora **H** deve essere esterno alla circonferenza C : infatti per ipotesi l'angolo **PAH** è ottuso, quindi nel triangolo **PAH** il lato **PH** è il maggiore dei tre, da cui $d(P, H) > d(P, A) = 1$.



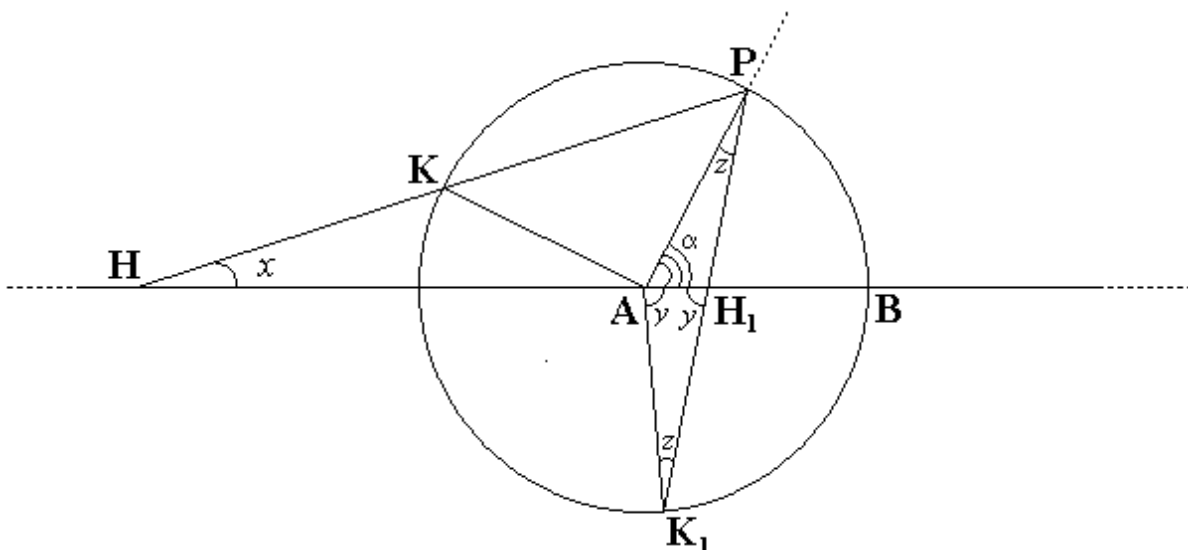
Ma allora se fosse $d(H, K) = 1$ si avrebbe che

$$d(P, K) = d(P, H) + d(H, K) > 1 + 1 = 2$$

cioè la corda **PK** sarebbe maggiore del diametro.

Si devono in effetti considerare altre due possibilità.

La prima è che **K** appartenga al segmento **AB**



e in questo caso si considerano i triangoli isosceli (perché due lati sono uguali al raggio) $\mathbf{AK}_1\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{AK}_1\mathbf{P}$; dal primo si ricava che $z = 180^\circ - 2y$, dal secondo che

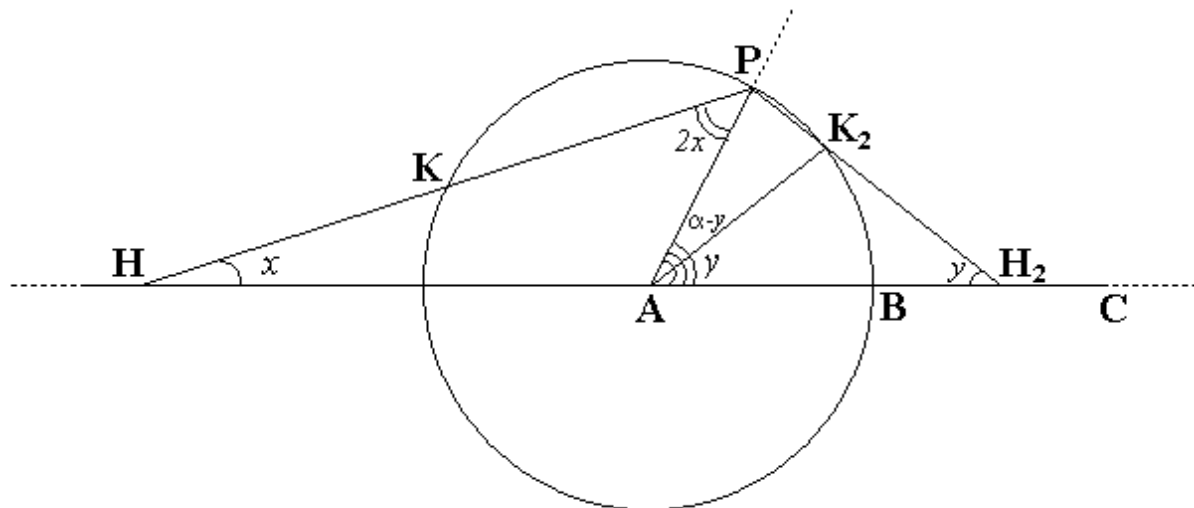
$$180^\circ = 2z + y + 3x = (360^\circ - 4y) + y + 3x = 360^\circ - 3y + 3x$$

ossia che

$$y = x + 60^\circ$$

cosicché la misura dell'angolo concavo $\mathbf{BH}_1\mathbf{K}_1$ è $x + 240^\circ$, e quindi in effetti il triplo di questo angolo è $3x + 720^\circ$ ossia α .

La seconda possibilità è che \mathbf{K} appartenga alla semiretta della retta \mathbf{AB} di origine \mathbf{B} non contenente \mathbf{A} . Il problema ha infatti tre soluzioni, come è ragionevole attendersi dato che analiticamente si traduce in un'equazione di terzo grado.



In quest'ultimo caso si considerano i triangoli isosceli (perché due lati sono uguali al raggio) $\mathbf{AK}_2\mathbf{H}_2$ e $\mathbf{AK}_2\mathbf{P}$; l'angolo \mathbf{APK}_2 ha la stessa misura dell'angolo $\mathbf{AK}_2\mathbf{P}$ che è angolo esterno del triangolo $\mathbf{AK}_2\mathbf{H}_2$ e quindi misura $2y$. Poiché la somma degli angoli interni del triangolo \mathbf{HPK}_2 deve essere 180° , si ricava che

$$180^\circ = x + 2x + 2y + y = 3x + 3y$$

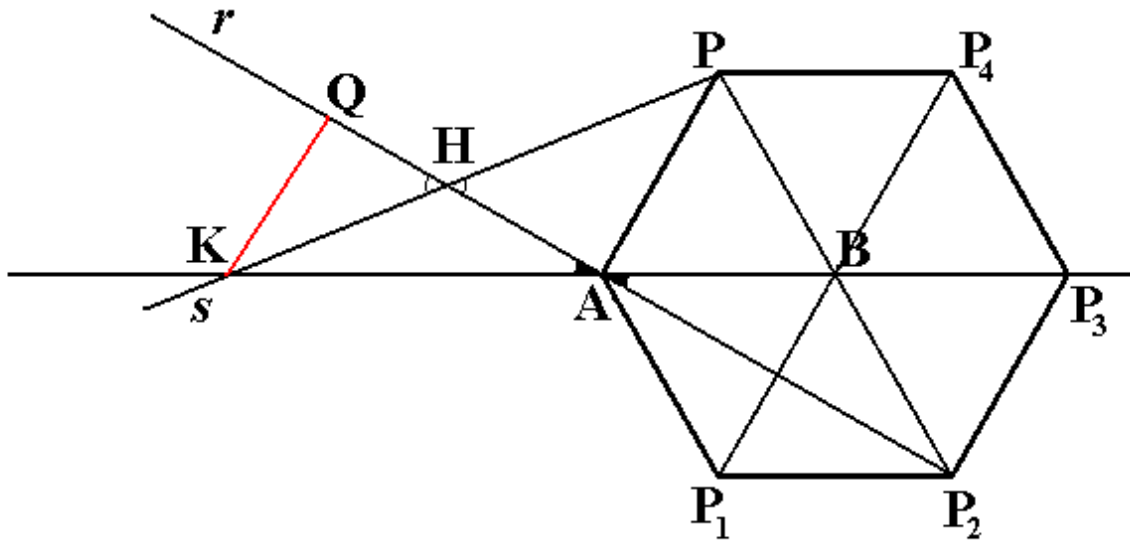
ossia che

$$y = 60^\circ - x$$

cosicché la misura dell'angolo ottuso $\mathbf{CH}_2\mathbf{K}_2$ è $x + 120^\circ$, e quindi in effetti il triplo di questo angolo è $3x + 360^\circ$ ossia α .

3.3 - La costruzione di $\sqrt[3]{2}$ con riga *graduata* e compasso.

Siano A, B due punti costruiti di distanza 1. Dopo aver costruito la circonferenza C di centro B passante per A , costruiamo l'esagono regolare \mathcal{E} inscritto in C che ha un vertice in A ⁽²⁾. Siano P_1, P_2, P_3 e P_4 gli altri cinque vertici di \mathcal{E} , che si susseguono dopo A percorrendo C nel verso positivo (“antiorario”).



Costruiamo la retta r individuata da A e P_2 .

Costruiamo la retta s che passa per P e incontra la retta r in un punto H e la retta AB in un punto K tali che sia $d(H, K) = 1$. Ci sono in effetti due rette con tale proprietà; ma noi scegliamo quella per la quale K non appartiene alla stessa semiretta individuata da A a cui appartiene B .

Vogliamo dimostrare che $d(H, P) = \sqrt[3]{2}$.

Sia Q il piede della proiezione ortogonale di K su r , cosicché il triangolo HKQ è rettangolo (con angolo retto in Q). Anche il triangolo PAH è rettangolo (con angolo retto in A) perché l'angolo BAP misura $\frac{\pi}{3}$ (per costruzione) e l'angolo HAK misura $\frac{\pi}{6}$ (essendo angolo opposto al vertice di P_2AP_1).

Poiché gli angoli QHK e PHA sono opposti al vertice, i triangoli rettangoli HQK e PAH sono simili, e si ha

$$(1) \quad d(Q, K) : d(H, K) = d(A, P) : d(H, P)$$

e

$$(2) \quad d(A, H) : d(H, P) = d(Q, H) : d(H, K).$$

²Come è noto, tutti i lati di \mathcal{E} sono congruenti al raggio di C e quindi hanno lunghezza 1.

Poniamo $x := d(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ e $y := d(\mathbf{Q}, \mathbf{H})$. Dalla (1) si ricava che

$$d(\mathbf{Q}, \mathbf{K}): 1 = 1 : x \quad (\text{cioè } d(\mathbf{Q}, \mathbf{K}) = \frac{1}{x})$$

e dalla (2) si ricava che

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{H}): x = y : 1 \quad (\text{cioè } d(\mathbf{A}, \mathbf{H}) = xy).$$

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo \mathbf{PAH} si ha che

$$(*) \quad x^2 = 1 + x^2 y^2.$$

D'altro lato, il triangolo \mathbf{AQK} (rettangolo in \mathbf{Q} per costruzione) ha un angolo (quello in \mathbf{A}) che misura $\frac{\pi}{6}$, dunque (è la metà di un triangolo equilatero di altezza \mathbf{AQ} e)

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{Q}) = d(\mathbf{K}, \mathbf{Q})\sqrt{3}$$

cioè (poiché $\mathbf{AQ} = \mathbf{AH} + \mathbf{HQ}$ e quindi $d(\mathbf{A}, \mathbf{Q}) = d(\mathbf{A}, \mathbf{H}) + d(\mathbf{H}, \mathbf{Q})$)

$$xy + y = \frac{1}{x} \sqrt{3}$$

da cui

$$y = \frac{\sqrt{3}}{x(x+1)} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{3}{x^2(x+1)^2}.$$

Sostituendo nella (*) si trova che

$$x^2 = 1 + x^2 \frac{3}{x^2(x+1)^2} = 1 + \frac{3}{(x+1)^2}$$

ossia

$$x^2(x+1)^2 = (x+1)^2 + 3$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + 2x + 1 + 3$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

$$x^3(x+2) - 2(x+2) = 0$$

$$(x^3 - 2)(x+2) = 0.$$

Poiché x deve essere un numero positivo, non può che essere $x = \sqrt[3]{2}$.

4.- LE CONICHE CON RIGA E COMPASSO

4.1 - Ovvietà sulla parabola.

Scelti nel piano un punto \mathbf{F} e una retta d , si dice *parabola* di fuoco \mathbf{F} e direttrice d l'insieme dei punti \mathbf{P} del piano per i quali si ha

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{F}) = d(\mathbf{P}, d).$$

Sia \mathbf{F}_0 la proiezione ortogonale di \mathbf{F} su d , e sia \mathbf{O} il punto medio del segmento \mathbf{FF}_0 . Conviene studiare la parabola di fuoco \mathbf{F} e direttrice d scrivendone l'equazione in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico che abbia l'origine in \mathbf{O} e l'asse delle ascisse parallelo alla retta d : se scegliamo come unità di misura per le distanze il doppio della distanza di \mathbf{F} da d , l'equazione della parabola è

$$y = x^2.$$

Dunque, a meno di similitudini, esiste una sola parabola. Inoltre, la retta \mathbf{FF}_0 (che per costruzione è la retta passante per il fuoco ortogonale alla direttrice, e nel nostro sistema di riferimento ha equazione $x = 0$) è asse di simmetria per la parabola: essa si dice brevemente *asse* della parabola.

Teorema 4.1.1

- (i) Ogni retta parallela all'asse incontra la parabola in un solo punto;
- (ii) se \mathbf{P} è un punto della parabola, esistono esattamente due rette passanti per \mathbf{P} che incontrano la parabola nel solo punto \mathbf{P} .

Dimostrazione — Ogni retta parallela all'asse della parabola ha equazione della forma $x = x_0$ e quindi incontra la parabola nel solo punto $\mathbf{P} \equiv (x_0, x_0^2)$.

Viceversa, sia $\mathbf{P} \equiv (x_0, x_0^2)$ un punto della parabola e sia r una retta non parallela all'asse della parabola; allora r ha equazione

$$y = px + q$$

e passa per \mathbf{P} se e soltanto se

$$x_0^2 = px_0 + q$$

ossia se e soltanto se

$$q = x_0^2 - px_0.$$

Cerchiamo le intersezioni fra r e la parabola per imporre che l'unica di esse sia il punto \mathbf{P} . Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = px + x_0^2 - px_0 \end{cases}$$

che ci conduce all'equazione nella x

$$x^2 - px - (x_0^2 - px_0) = 0.$$

Poiché sappiamo che x_0 è soluzione, possiamo abbassare di grado dividendo il primo membro per $x - x_0$. L'equazione diventa

$$(x - x_0)(x + x_0 - p) = 0$$

cosicché la retta r incontra la parabola nel solo punto \mathbf{P} se e soltanto se

$$p - x_0 = x_0$$

ossia se e soltanto se

$$p = 2x_0.$$

Sia \mathcal{P} una parabola, e sia \mathbf{T} un punto di \mathcal{P} . L'unica retta passante per \mathbf{T} non parallela all'asse di \mathcal{P} che incontra \mathcal{P} nel solo punto \mathbf{T} si dice *tangente* a \mathcal{P} nel punto \mathbf{T} .

Utilizzando il metodo delle coordinate come nella dimostrazione del teorema 4.1.1 non è difficile vedere che per ogni punto \mathbf{P} del piano non appartenente alla parabola

- se la distanza di \mathbf{P} dal fuoco è minore della distanza di \mathbf{P} dalla direttrice, per \mathbf{P} non passa nessuna retta tangente alla parabola;
- se la distanza di \mathbf{P} dal fuoco è maggiore della distanza di \mathbf{P} dalla direttrice, per \mathbf{P} passano esattamente due rette tangenti alla parabola.

4.2 - Costruzione con riga e compasso di punti della parabola e delle tangenti alla parabola.

In questa sezione, \mathbf{F} sarà un fissato punto del piano, d sarà una fissata retta del piano e \mathcal{P} sarà la parabola di fuoco \mathbf{F} e direttrice d .

Teorema 4.2.1

Per ogni punto \mathbf{P} della direttrice d , sia $r_{\mathbf{P}}$ la retta per \mathbf{P} ortogonale a d (e quindi parallela all'asse della parabola) e sia \mathbf{T} l'unico punto (cfr. teorema 4.1.1 (i)) in cui $r_{\mathbf{P}}$ incontra \mathcal{P} .

L'asse del segmento \mathbf{FP} è la retta tangente alla parabola \mathcal{P} nel punto \mathbf{T} .

Dimostrazione — Poiché \mathbf{T} appartiene alla parabola \mathcal{P} , per definizione di parabola è

$$d(\mathbf{T}, \mathbf{F}) = d(\mathbf{T}, d)$$

ma per come è stato costruito \mathbf{T} è

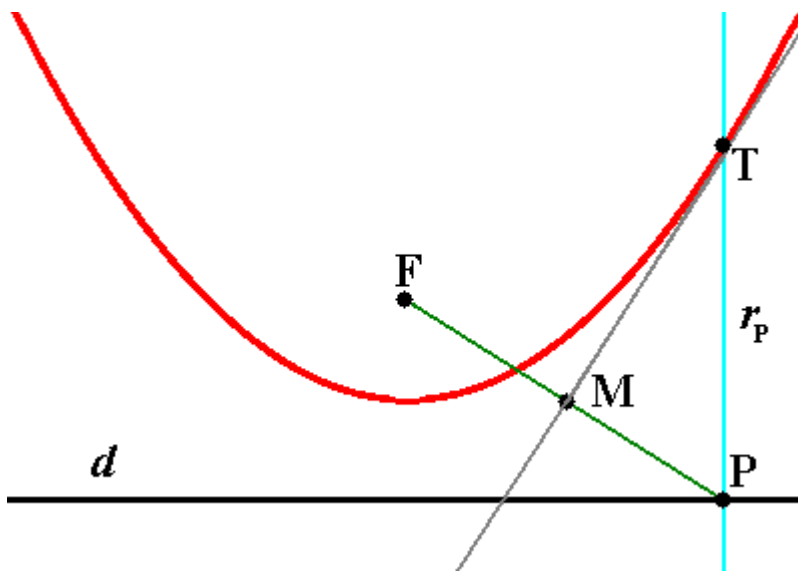
$$d(\mathbf{T}, d) = d(\mathbf{T}, \mathbf{P})$$

(infatti \mathbf{P} è la proiezione ortogonale di \mathbf{T} su d). Dunque \mathbf{T} appartiene all'asse del segmento \mathbf{FP} .

Se l'asse del segmento \mathbf{FP} incontrasse la parabola \mathcal{P} in un altro punto $\bar{\mathbf{T}}$, dovrebbe essere

$$d(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{P}) = d(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{F}) = d(\bar{\mathbf{T}}, d)$$

(la prima uguaglianza perché $\bar{\mathbf{T}}$ appartiene all'asse del segmento \mathbf{FP} ; la seconda perché $\bar{\mathbf{T}}$ appartiene alla parabola \mathcal{P}) cioè la proiezione ortogonale di $\bar{\mathbf{T}}$ su d dovrebbe essere \mathbf{P} ; ma allora $\bar{\mathbf{T}}$ apparterrebbe alla retta $r_{\mathbf{P}}$, che però incontra la parabola \mathcal{P} soltanto nel punto \mathbf{T} .



Corollario 4.2.2

Sia \mathbf{F} costruibile con riga e compasso, sia d costruibile con riga e compasso, e sia \mathcal{P} la parabola di fuoco \mathbf{F} e direttrice d .

Se \mathbf{T} è un punto di \mathcal{P} costruibile con riga e compasso, è costruibile con riga e compasso la retta tangente in \mathbf{T} a \mathcal{P} .

Dimostrazione — Con riga e compasso è possibile

- (i) costruire la retta r passante per \mathbf{T} e ortogonale a d ;
- (ii) costruire l'intersezione \mathbf{P} tra la retta r e la retta d ;
- (iii) costruire l'asse del segmento \mathbf{FP} .

Per il teorema 4.2.1, l'asse del segmento \mathbf{FP} è la retta tangente in \mathbf{T} a \mathcal{P} .

Corollario 4.2.3

Sia \mathbf{F} costruibile con riga e compasso, sia d costruibile con riga e compasso, e sia \mathcal{P} la parabola di fuoco \mathbf{F} e direttrice d .

Per ogni punto \mathbf{Q} del piano costruibile con riga e compasso, è costruibile con riga e compasso ogni retta tangente a \mathcal{P} passante per \mathbf{Q} .

Dimostrazione — Con riga e compasso è possibile

- (i) costruire la circonferenza \mathcal{C} di centro \mathbf{Q} passante per \mathbf{F} ;
- (ii) costruire ogni punto \mathbf{P} di intersezione fra d e \mathcal{C} ;
- (iii) costruire l'asse t del segmento \mathbf{FP} .

Per il teorema 4.2.1, la retta t è tangente a \mathcal{P} . Ma, per come è stato trovato \mathbf{P} , il punto \mathbf{Q} appartiene a t , dunque t è una retta tangente a \mathcal{P} passante per \mathbf{Q} . Non è poi difficile verificare che con questo procedimento si ottengono tutte le rette tangenti a \mathcal{P} passanti per \mathbf{Q} .

Corollario 4.2.4

Sia t una retta tangente alla parabola \mathcal{P} di fuoco \mathbf{F} e direttrice d .

La simmetria assiale di asse t porta \mathbf{F} su d .

Dimostrazione — Sia \mathbf{T} l'unica intersezione fra t e \mathcal{P} , e sia \mathbf{P} la proiezione ortogonale di \mathbf{T} su d . Per il teorema 4.2.1, l'asse del segmento \mathbf{FP} è tangente alla parabola in \mathbf{T} , dunque coincide con t (perché la tangente a una parabola in un suo punto è unica!). Pertanto, la simmetria assiale di asse t scambia \mathbf{F} con \mathbf{P} (e in particolare porta \mathbf{F} su d).

Corollario 4.2.5

Sia t l'asse di una simmetria assiale che porta il punto \mathbf{F} sulla retta d . Allora t è tangente alla parabola \mathcal{P} di fuoco \mathbf{F} e direttrice d .

Dimostrazione — Sia \mathbf{P} ($\in d$) l'immagine di \mathbf{F} nella simmetria assiale di asse t , sia $r_{\mathbf{P}}$ la retta per \mathbf{P} ortogonale a d e sia \mathbf{T} il punto in cui $r_{\mathbf{P}}$ incontra la parabola \mathcal{P} . Poiché t è l'asse del segmento \mathbf{FP} , per il teorema 4.2.1 t è tangente alla parabola \mathcal{P} nel punto \mathbf{T} .

Teorema 4.2.6

Sia \mathbf{F} costruibile con riga e compasso, sia d costruibile con riga e compasso, e sia \mathcal{P} la parabola di fuoco \mathbf{F} e direttrice d .

Per ogni punto \mathbf{P} della direttrice d che sia costruibile con riga e compasso, è costruibile con riga e compasso il punto \mathbf{T} di \mathcal{P} tale che l'asse del segmento \mathbf{FP} è tangente a \mathcal{P} in \mathbf{T} .

Dimostrazione — Sia t l'asse del segmento \mathbf{FP} e sia $r_{\mathbf{P}}$ la retta per \mathbf{P} ortogonale a d ; sia t che $r_{\mathbf{P}}$ sono costruibili con riga e compasso; allora è costruibile con riga e compasso il punto \mathbf{T} intersezione fra t e $r_{\mathbf{P}}$; per il teorema 4.2.1, \mathbf{T} è il punto della parabola \mathcal{P} in cui la retta t è tangente a \mathcal{P} .

4.3 - Ovvietà su ellisse e iperbole.

Scelti nel piano due punti $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, sia $c := \frac{1}{2}d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$. Sia inoltre a un numero reale positivo; poniamo $e := \frac{c}{a}$.

Se $a > c$, si dice *ellisse di fuochi* \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 ed *eccentricità* e l'insieme dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 è uguale a $2a$; se invece $a < c$, si dice *iperbole di fuochi* \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 ed *eccentricità* e l'insieme dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze da \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 (considerati in entrambi gli ordini!) è uguale a $2a$.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nel quale l'asse delle ascisse è la retta $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ e l'origine è il punto medio del segmento $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ (cosicché $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$, è facile verificare che l'ellisse (o l'iperbole) di eccentricità e ha equazione

$$(*) \quad (a^2 - c^2)(a^2 - x^2) = a^2y^2.$$

Se si tratta di un'ellisse, e quindi $a > c$, si può porre $b^2 := a^2 - c^2$ e scrivere l'equazione (*) nella forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se si tratta invece di un'iperbole, e quindi $a < c$, si può porre $b^2 := c^2 - a^2$ e scrivere l'equazione (*) nella forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sia \mathcal{E} un'ellisse, e sia \mathbf{T} un punto di \mathcal{E} . Si dimostra che esiste esattamente una retta passante per \mathbf{T} che incontra \mathcal{E} nel solo punto \mathbf{T} ; tale retta si dice *tangente* a \mathcal{E} nel punto \mathbf{T} .

Inoltre si può verificare che per ogni punto \mathbf{P} del piano non appartenente all'ellisse di fuochi \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 (con $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 2c$) ed eccentricità $e = \frac{c}{a}$

- se $d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) + d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2) < 2a$, per \mathbf{P} non passa nessuna retta tangente alla parabola;
- se $d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) + d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2) > 2a$, per \mathbf{P} passano esattamente due rette tangenti alla parabola.

Il caso dell'iperbole è complicato dall'esistenza degli asintoti. Sia \mathcal{H} un'iperbole, e sia \mathbf{T} un punto di \mathcal{H} . Si dimostra che esistono esattamente tre rette passanti per \mathbf{T} che incontrano \mathcal{H} nel solo punto \mathbf{T} ; due di esse sono parallele a uno degli asintoti, la terza si dice *tangente* a \mathcal{H} nel punto \mathbf{T} .

Inoltre si può verificare che per ogni punto \mathbf{P} del piano non appartenente all'iperbole di fuochi \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 (con $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 2c$) ed eccentricità $e = \frac{c}{a}$

- se $|d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) - d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2)| < 2a$, per \mathbf{P} non passa nessuna retta tangente alla parabola;
- se $|d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) - d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2)| > 2a$, per \mathbf{P} passano esattamente due rette tangenti alla parabola.

4.4 - Costruzione con riga e compasso di punti dell'ellisse e delle tangenti all'ellisse.

Teorema 4.4.1

Siano \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 punti del piano, sia $2c$ la distanza fra \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 e sia a un numero reale positivo maggiore di c . Sia \mathcal{C} la circonferenza di centro \mathbf{F}_1 e raggio $2a$ e sia \mathcal{E} l'ellisse \mathcal{E} di fuochi \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 ed $\frac{c}{a}$.

Per ogni punto \mathbf{H} di \mathcal{C} , sia t l'asse del segmento \mathbf{HF}_2 e sia \mathbf{T} l'intersezione fra t e la retta \mathbf{HF}_1 . Allora t è tangente in \mathbf{T} all'ellisse \mathcal{E} .

Dimostrazione — Sia r la retta per \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 , e sia \mathbf{A} il punto di intersezione fra r e \mathcal{C} più vicino a \mathbf{F}_2 .

Osserviamo in primo luogo che t incontra effettivamente la retta \mathbf{HF}_1 in un punto \mathbf{T} : se così non fosse, le rette \mathbf{HF}_1 e \mathbf{HF}_2 sarebbero ortogonali, cioè l'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{H}\mathbf{F}_2$ sarebbe retto; ma è l'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{H}\mathbf{A}$ che è retto (perché inscritto nella semicirconferenza di diametro $\mathbf{F}_1\mathbf{A}$) mentre l'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{H}\mathbf{F}_2$ è strettamente minore dell'angolo $\mathbf{F}_1\mathbf{H}\mathbf{A}$. Inoltre, il punto \mathbf{T} è interno al segmento \mathbf{FH}_1 : se così non fosse, il punto \mathbf{T} apparterrebbe alla semiretta individuata da \mathbf{F}_1 su \mathbf{HF}_1 non contenente \mathbf{H} oppure alla semiretta individuata da \mathbf{H} su $\mathbf{F}_1\mathbf{H}$ non contenente \mathbf{F}_1 .

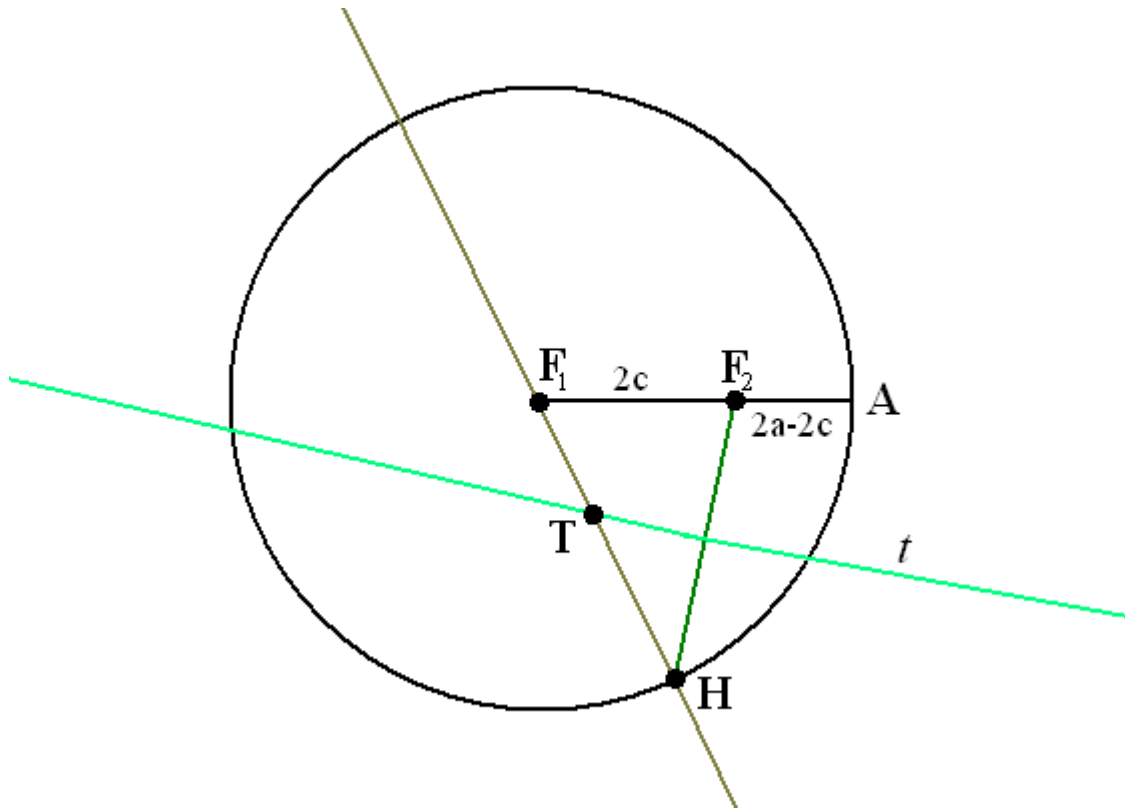
Nel primo caso sarebbe

$$d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) - d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_1) = d(\mathbf{T}, \mathbf{H}) - d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_1) = d(\mathbf{F}_1, \mathbf{H}) = 2a > 2c = d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$$

mentre nel secondo caso sarebbe

$$\begin{aligned} d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_1) - d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) &= d(\mathbf{T}, \mathbf{H}) + d(\mathbf{H}, \mathbf{F}_1) - d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) = \\ &= d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) + d(\mathbf{H}, \mathbf{F}_1) - d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) = d(\mathbf{H}, \mathbf{F}_1) = 2a > 2c = d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

e comunque nel triangolo $\mathbf{TF}_1\mathbf{F}_2$ il lato $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2$ sarebbe strettamente minore della differenza fra gli altri due.



È facile adesso concludere che il punto \mathbf{T} appartiene all'ellisse \mathcal{E} , dato che

$$d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_1) + d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) = d(\mathbf{T}, \mathbf{F}_1) + d(\mathbf{T}, \mathbf{H}) = d(\mathbf{F}_1, \mathbf{H}) = 2a.$$

Per ogni altro punto $\bar{\mathbf{T}}$ di t è

$$d(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{F}_1) + d(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{F}_2) = d(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{F}_1) + d(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{H}) > d(\mathbf{F}_1, \mathbf{H}) = 2a$$

perché nel triangolo $\bar{\mathbf{T}}\mathbf{F}_1\mathbf{H}$ il lato $\mathbf{F}_1\mathbf{H}$ deve essere strettamente minore della somma degli altri due. Dunque la retta t incontra \mathcal{E} nel solo punto \mathbf{T} , cioè è tangente in \mathbf{T} a \mathcal{E} , come si voleva dimostrare.

Corollario 4.4.2

Siano \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 punti del piano costruibili con riga e compasso, sia $2c$ la distanza fra \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 e sia a un numero reale positivo costruibile maggiore di c . Sia \mathcal{E} l'ellisse \mathcal{E} di fuochi \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 ed eccentricità $\frac{c}{a}$.

La circonferenza \mathcal{C} di centro \mathbf{F}_1 e raggio $2a$ è costruibile; per ogni punto costruibile \mathbf{H} di \mathcal{C} si può costruire un punto di \mathcal{E} come intersezione fra l'asse del segmento $\mathbf{H}\mathbf{F}_2$ e la retta $\mathbf{H}\mathbf{F}_1$; e, viceversa, ogni punto costruibile di \mathcal{E} si può ottenere in questo modo a partire da un punto costruibile di \mathcal{C} .

Dimostrazione — Sulla semiretta di origine F_2 non contenente F_1 della retta F_1F_2 si può costruire un punto A in modo che la distanza di A da F_2 sia $\frac{a-c}{2}$: la circonferenza C è la circonferenza di centro F_1 passante per A , dunque è costruibile. L'ultima parte dell'asserto segue facilmente dal teorema 4.4.1 ricordando che la retta individuata da due punti costruibili è costruibile.

Corollario 4.4.3

Siano F_1 ed F_2 punti del piano costruibili con riga e compasso, sia $2c$ la distanza fra F_1 ed F_2 e sia a un numero reale positivo costruibile maggiore di c . Sia \mathcal{E} l'ellisse \mathcal{E} di fuochi F_1 ed F_2 ed eccentricità $\frac{c}{a}$.

Per ogni punto costruibile P del piano, è costruibile ogni tangente a \mathcal{E} passante per P .

Dimostrazione — Come si è visto nel corollario 4.4.2, è costruibile la circonferenza C di centro F_1 e raggio $2a$.

Esistono rette tangenti a \mathcal{E} passanti per P se e soltanto se

$$(*) \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) \geq 2a$$

e in tal caso la circonferenza \bar{C} di centro P passante per F_2 incontra la circonferenza C : infatti la distanza fra i centri di C e \bar{C} è $d(P, F_1)$, e per la (*) si ha

$$d(P, F_1) \geq 2a - d(P, F_2)$$

mentre (considerando il triangolo PF_1F_2)

$$d(P, F_1) \leq d(P, F_2) + d(F_1, F_2) = d(P, F_2) + 2c < 2a.$$

La circonferenza \bar{C} è costruibile, e quindi è costruibile ogni intersezione H fra C e \bar{C} . Per il teorema 4.4.1, l'asse t del segmento HF_2 è tangente a \mathcal{E} ; ma, per come è stato trovato H , il punto P appartiene a t , dunque t è una retta tangente a \mathcal{E} passante per P . Non è poi difficile verificare che con questo procedimento si ottengono tutte le rette tangenti a \mathcal{E} passanti per P .

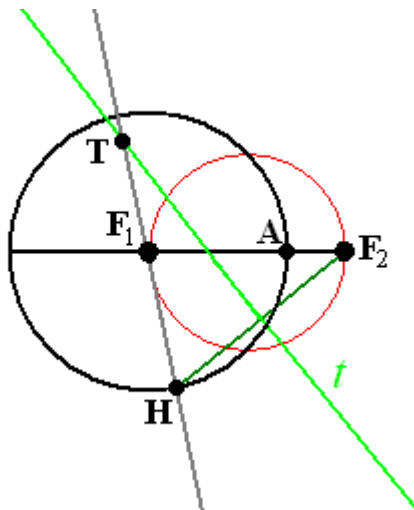
2.5 - Costruzione con riga e compasso di punti dell'iperbole e delle tangenti all'iperbole.

Teorema 2.5.1

Siano F_1 ed F_2 punti del piano, sia $2c$ la distanza fra F_1 ed F_2 e sia a un numero reale positivo minore di c . Sia C la circonferenza di centro F_1 e raggio $2a$ e sia \mathcal{H} l'iperbole di fuochi F_1 ed F_2 ed $\frac{c}{a}$.

Per ogni punto K di C , sia t l'asse del segmento KF_2 ; se K non appartiene alla circonferenza di diametro F_1F_2 , t incontra la retta KF_1 in un punto $T \in \mathcal{H}$ ed è tangente in T all'iperbole \mathcal{H} .

Dimostrazione — Si lascia per esercizio, ricordando che t non incontra la retta KF_1 se e soltanto se le rette KF_1 e KF_2 sono ortogonali, cioè se e soltanto se K non appartiene alla circonferenza di diametro F_1F_2 .



Esercizio 2.5.2

Si enuncino e si dimostrino gli analoghi per l'iperbole dei corollari 4.4.2 e 4.4.3.

5.- LE COSTRUZIONI COL PIEGAMENTO DELLA CARTA CHE NON SI POSSONO EFFETTUARE CON RIGA E COMPASSO

5.1 - Tangenti comuni a due parabole.

Osservazione 5.1.1

Siano $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ punti del piano, e siano d_1, d_2 rette del piano. Sia \mathcal{P}_1 la parabola di fuoco \mathbf{F}_1 e direttrice d_1 , e sia \mathcal{P}_2 la parabola di fuoco \mathbf{F}_2 e direttrice d_2 .

Sia t l'asse di una simmetria assiale che porta \mathbf{F}_1 su d_1 e \mathbf{F}_2 su d_2 ; allora t è tangente comune alle parabole \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 . Viceversa, ogni retta che sia tangente sia a \mathcal{P}_1 che a \mathcal{P}_2 è asse di una simmetria assiale che porta \mathbf{F}_1 su d_1 e \mathbf{F}_2 su d_2 .

Dimostrazione — Segue subito dai corollari 4.2.4 e 4.2.5.

Osservazione 5.1.2

In generale, non sono costruibili con riga e compasso le tangenti comuni a due parabole delle quali siano costruibili con riga e compasso fuochi e direttrici.

Dimostrazione — Basta mostrare un esempio di due parabole delle quali siano costruibili con riga e compasso fuochi e direttrici ma non è costruibile con riga e compasso alcuna tangente comune.

Riferiamo il piano al sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico positivamente orientato costruito come si è visto nel capitolo 1 a partire dai due punti dati per le costruzioni con riga e compasso; sappiamo che tutti i punti che in tale SdR hanno coordinate razionali e tutte le rette che ammettono di essere rappresentate con una equazione di primo grado a coefficienti razionali risultano costruibili con riga e compasso.

Sia \mathcal{P}_1 la parabola di fuoco $\mathbf{F}_1 \equiv (-4, 0)$ e direttrice $d_1 \equiv (x = 4)$ (parallela all'asse delle ordinate), e sia \mathcal{P}_2 la parabola di fuoco $\mathbf{F}_2 \equiv (-\frac{1}{2}, 0)$ e direttrice $d_2 \equiv (y = -\frac{1}{2})$ (parallela all'asse delle ascisse). Allora \mathcal{P}_1 ha equazione $x = -\frac{1}{16}y^2$ e \mathcal{P}_2 ha equazione $y = x^2$.

Sia $\mathbf{T} \equiv (x_0, x_0^2)$ un punto di \mathcal{P}_2 . La generica retta non parallela all'asse di \mathcal{P}_2 passante per \mathbf{T} ha equazione

$$y = p(x - x_0) + x_0^2$$

ed è tangente in \mathbf{T} a \mathcal{P}_2 se e soltanto se il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = p(x - x_0) + x_0^2 \end{cases}$$

ha la sola soluzione (x_0, x_0^2) .

Si deve considerare l'equazione di secondo grado nella incognita x

$$x^2 = p(x - x_0) + x_0^2$$

ossia

$$x^2 - px - x_0^2 + px_0 = 0$$

che deve avere x_0 come unica soluzione. Dividendo il primo membro per $x - x_0$ si ottiene come quoziente $x + (x_0 - p)$, quindi l'equazione si può scrivere

$$(x - x_0)(x + (x_0 - p)) = 0.$$

Deve dunque essere $x_0 = p - x_0$, ossia $p = 2x_0$. La retta tangente in \mathbf{T} alla parabola \mathcal{P}_2 ha dunque equazione

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Adesso dobbiamo imporre che essa sia tangente anche alla parabola \mathcal{P}_1 , cioè (che sia $x_0 \neq 0$, affinché non risulti parallela all'asse di \mathcal{P}_2 , e) che il sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{16}y^2 \\ y = 2x_0x - x_0^2 \end{cases}$$

abbia una sola soluzione.

Sostituendo nella seconda equazione il valore di x ricavato dalla prima si ottiene l'equazione nell'incognita y

$$y = 2x_0\left(-\frac{1}{16}y^2\right) - x_0^2$$

ossia

$$\frac{x_0}{8}y^2 + y + x_0^2 = 0$$

che deve avere una sola soluzione; deve cioè essere

$$0 = \Delta = 1 - \frac{x_0}{2}x_0^2 \quad \text{ovvero} \quad x_0^3 = 2.$$

Ciò significa che l'unica tangente comune a \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 ha equazione

$$y = 2\sqrt[3]{2}x - \sqrt[3]{4}$$

e quindi non è costruibile con riga e compasso (altrimenti sarebbe costruibile la sua intersezione con l'asse delle ordinate, quindi il numero reale $\sqrt[3]{4}$ e anche $\sqrt[3]{2}$ che ne è la radice quadrata).