$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

## 6.10 Esercizi

**Esercizio 6.1** *Dire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ con le seguenti operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero reale è uno spazio vettoriale:*

$$(x,y) + (x_1,y_1) = (x + x_1, y + y_1), \qquad k(x, y) = (kx, y).$$

Risposta. No. perché $0 \cdot (x,y) = (0,y) \neq \underline{0}$ se $y \neq 0$

**Esercizio 6.2** *Dire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ con l'usuale operazione di addizione e con l'operazione di moltiplicazione per un numero razionale è uno spazio vettoriale (sul campo dei numeri razionali):*

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1), \qquad k(x, y) = (kx, ky).$$

Risposta. È uno spazio vettoriale. su $\mathbb{Q}$

**Esercizio 6.3** *Verificare che l'insieme $\mathbb{P}_2$ dei polinomi a coefficienti razionali e di grado minore o uguale a 2 nella variabile x, con le usuali operazioni di addizione fra polinomi e con l'operazione di moltiplicazione di un polinomio per un numero razionale, è uno spazio vettoriale (sul campo dei numeri razionali).*

**Esercizio 6.4** *Dire se l'insieme dei polinomi a coefficienti reali e di grado uguale a 2 nella variabile x, con le usuali operazioni di addizione fra polinomi e con l'operazione di moltiplicazione di un polinomio per un numero reale è uno spazio vettoriale.*

Risposta. No. perché $\underline{0} \notin$ all'insieme sopradetto

**Esercizio 6.5** *Verificare che $M_2$ con le seguenti operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero reale*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_1 & y + y_1 \\ z + z_1 & t + t_1 \end{pmatrix}, \qquad k\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & ky \\ z & t \end{pmatrix}$$

*non è uno spazio vettoriale.* (come es. 6.1)

**Esercizio 6.6** *Verificare che $M_2$ con le seguenti operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero razionale*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_1 & y+y_1 \\ z+z_1 & t+t_1 \end{pmatrix}, \qquad k\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx & ky \\ kz & kt \end{pmatrix}$$

*è uno spazio vettoriale (sul campo dei numeri razionali).*

**Esercizio 6.7** *Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$: $\underline{v} = (2, 1, -1)$, $\underline{w} = (1, 3, 1)$, $\underline{u} = (4, 1, -2)$, determinare la seguente combinazione lineare $3\underline{v} + 4\underline{w} - 3\underline{u}$.*

Risposta. $(-2, 12, 7)$.

**Esercizio 6.8** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

*determinare la seguente combinazione lineare $A - 3B + 2C - \frac{1}{2}D$.*

Risposta. $\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -17 & -13 \end{pmatrix}$.

**Esercizio 6.9** *Dimostrare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti:*

$$\underline{v} = (-3, 4), \quad \underline{w} = (3, 2). \qquad \det\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -18 \neq 0$$

**Esercizio 6.10** *Dimostrare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti:*

$$\underline{v} = (3, -4, 5), \quad \underline{w} = (-2, 2, 4). \qquad rk\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

**Esercizio 6.11** *Dimostrare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti:*

$$\underline{v} = (3, 4, -2), \quad \underline{u} = (0, 14, -13), \quad \underline{w} = (2, -2, 3). \qquad \det\begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix} = 0$$

**Esercizio 6.12** *Dimostrare che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti:*

$$\underline{v} = (3, 2, -1, -1), \quad \underline{u} = (8, 0, 1, 5), \quad \underline{w} = (-2, 4, -3, 2). \qquad rk\begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix} = 3$$

**Esercizio 6.13** *Dimostrare che i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente indipendenti:*

$$\underline{v} = (3, -4, 6), \quad \underline{u} = (7, -4, 1), \quad \underline{w} = (2, 0, 3).$$

**Esercizio 6.14** *Dopo aver dimostrato che i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti*

$$\underline{v} = (1, 4, -3), \quad \underline{u} = (-2, -8, 6), \quad \underline{w} = (3, 4, -5),$$

*esprimere uno di questi come combinazione lineare degli altri due.*

Risposta. $\underline{u} = -2\underline{v} + 0\underline{w}$.

**Esercizio 6.15** *Dimostrare che i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$ *sono linearmente dipendenti:*

$$\underline{v} = (-1, -2, 3, -1), \quad \underline{w} = (3, -4, 5, -2), \quad \underline{u} = (-9, 2, -1, 1).$$

$rk\begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} < 3$

**Esercizio 6.16** *Dimostrare che i seguenti polinomi, appartenenti allo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 con coefficienti reali, sono linearmente dipendenti:*

$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 12 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 2, \quad q(x) = 2x^2 - 2x + 1, \quad r(x) = -2x^2 + 12x.$$

**Esercizio 6.17** *Dimostrare che i seguenti polinomi, appartenenti allo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 con coefficienti reali, sono linearmente indipendenti:*

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -7 & 6 & 21 \end{pmatrix} \neq 0$

$$p(x) = x^2 + 2x - 2, \quad q(x) = 4x^2 - 2x + 3, \quad r(x) = -7x^2 + 6x + 21.$$

**Esercizio 6.18** *Dimostrare che le seguenti matrici sono linearmente indipendenti:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.19** *Dimostrare che le seguenti matrici sono linearmente dipendenti:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$