EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Le equazioni differenziali costituiscono un capitolo centrale dell'Analisi Matematica e della Matematica Applicata. Esse intervengono nello studio di un ampio spettro di fenomeni naturali (fisici, biologici ecc.) e di carattere sociale (economico, demografico ecc.). Le incognite delle equazioni differenziali sono funzioni che dipendono da una o più variabili. In quest'ultimo caso si chiamano equazioni differenziali alle derivate parziali, mentre nel primo caso si chiamano equazioni differenziali ordinarie (abbreviazione: **EDO**). Qui forniremo un'introduzione allo studio delle equazioni differenziali ordinarie.

Nella meccanica classica vale la legge di Newton:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = m\overrightarrow{\mathbf{a}} \tag{1}$$

dove $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ è l'accelerazione di un corpo, "puntiforme", di massa m e $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ è la forza che agisce su di essa. Se $\overrightarrow{\mathbf{x}}(t)$ rappresenta la posizione del corpo, nell'istante t, in un dato sistema di riferimento, allora la velocità $\overrightarrow{\mathbf{v}}(t)$ e l'accelerazione $\overrightarrow{\mathbf{a}}(t)$ sono date, rispettivamente, da

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{x}}(t)$$

e

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{v}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{\mathbf{x}}(t).$$

Poiché $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ in generale dipende dal tempo t, dalla posizione $\overrightarrow{\mathbf{x}}(t)$ e dalla velocità $\overrightarrow{\mathbf{v}}(t)$, dalla (1) abbiamo

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{m}\overrightarrow{\mathbf{F}}\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t), \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{x}}(t)\right), \tag{2}$$

che rappresenta un'equazione, più precisamente un sistema (dal momento che la posizione $\overrightarrow{\mathbf{x}}(t)$ ha tre componenti) di equazioni differenziali ordinarie. Ad esempio, nel caso della caduta dei gravi, indicando con $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ le coordinate della particella al tempo t e ricordando che $\overrightarrow{\mathbf{F}} = -m\,\overrightarrow{\mathbf{g}}$, la (2) si può scrivere

$$\begin{cases} x_1'' = 0 \\ x_2'' = 0 \\ x_3'' = -g \end{cases}.$$

Se, ad esempio, sappiamo, che nell'istante iniziale, $t = 0$, il corpo si trovi nel punto $(0, 0, h)$ ed abbia velocità iniziale $\overrightarrow{\mathbf{v}}(0)$ di componenti $(v_0, 0, 0)$ otteniamo le note formule

$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 t \\ x_2(t) = 0 \\ x_3(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases},$$

che ci indicano che il moto si svolge nel piano $x_2 = 0$ seguendo una traiettoria parabolica.

Un altro esempio si ha considerando una particella di massa m che si muove su una retta ed è soggetta ad una forza di richiamo elastica, proporzionale allo spostamento e a una resistenza viscosa, proporzionale alla velocità. L'unica componente della forza sarà del tipo

$$F = -\mu \frac{dx}{dt} - kx,$$

dove $x = x(t)$ è lo spostamento al tempo t dalla posizione di equilibrio, mentre k, μ sono parametri positivi che caratterizzano la forza elastica e la resistenza viscosa chiamati, rispettivamente, *costante elastica* e *costante di smorzamento*. In base alla legge (1) si ha

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{dx}{dt} - kx.$$

1 Primi esempi di equazioni differenziali ordinarie

1.1 Primitive di una funzione

Abbiamo già affrontato il problema della ricerca delle primitive di una funzione continua su un intervallo. Poiché esso rappresenta l'esempio più semplice di equazione differenziale, ne ricordiamo i punti cruciali.

Sia J un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f \in C^0(J)$. Il problema della ricerca delle primitive consiste nel determinare tutte le funzioni $u \in C^1(J)$ tali che

$$u'(x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in J \tag{3}$$

o, più brevemente,

$$u' = f, \quad \text{in } J.$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale risolve questo problema. Infatti, ricordiamo, se x_0 è un punto fissato di J, allora la funzione integrale

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in J$$

soddisfa la (3) poiché, per la continuità di f in J, si ha

$$D\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right) = f(x), \text{ per ogni } x \in J.$$

Abbiamo anche dimostrato che *tutte le soluzioni* del problema (3) sono date dall'integrale indefinito di f ovvero dalle funzioni

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C, \quad x \in J \tag{4}$$

con C costante arbitraria.

Il fatto che le soluzioni di (3) siano date dalla (4) e quindi siano determinate a meno di una costante arbitraria ci suggerisce che se richiediamo che una soluzione di (3) sia nota in un punto di J essa sia unica. Quanto affermato si verifica immediatamente. Infatti richiediamo che u soddisfi l'equazione (3) e assuma il valore η nel punto $x_0 \in J$. In altre parole, consideriamo il problema

$$\begin{cases} u' = f, \quad \text{in } J \\ u(x_0) = \eta \end{cases}, \tag{5}$$

allora da (4) abbiamo

$$\begin{cases} u(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C, \quad \text{in } J \\ u(x_0) = \eta \end{cases},$$

ma

$$\eta = u(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\, dt + C = C,$$

quindi abbiamo che $C = \eta$ e l'unica soluzione di (3) è data da

$$u(x) = \eta + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Il problema (5) è detto *problema di Cauchy per l'equazione differenziale* (3).

1.2 Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine

Siano a e f due funzioni continue nell'intervallo J. L'equazione nell'incognita $u \in C^1(J)$

$$u'(x) = a(x)\, u(x) + f(x), \quad \text{per ogni } x \in J \tag{6}$$

o, più brevemente,

$$u' = au + f, \quad \text{in } J,$$

è detta **equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine**. La funzione a è chiamata **coefficiente** dell'equazione (6), mentre la funzione f è detta **il termine noto** dell'equazione (6). Spieghiamo un po' la terminologia adoperata. il termine "ordinaria" è dovuto al fatto che l'incognita di (6) è una funzione di una sola variabile, il termine "primo ordine", perché l'ordine di derivazione più alto con il quale compare l'incognita è 1, infine il termine "lineare" sarà spiegato in seguito (cfr. paragrafo 1.3).

Occupiamoci prima del caso in cui f sia la funzione nulla. In questo caso l'equazione (6) si scrive

$$u' - au = 0, \quad \text{in } J. \tag{7}$$

L'equazione (7) è detta *l'equazione omogenea associata all'equazione* (6). Determiniamo tutte le soluzioni della (7). A tale scopo indichiamo con A una primitiva della funzione a. Sia, dunque, x_0 un punto fissato di J e sia

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt, \quad x \in J.$$

Si ricordi che, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $A \in C^1(J)$. Ora moltiplichiamo ambo i membri della (7) per $e^{-A(x)}$ e abbiamo

$$D\left(e^{-A}u\right) = e^{-A}\left(u' - A'u\right) = e^{-A}\left(u' - au\right) = 0, \quad \text{in } J.$$

Perciò una funzione $u \in C^1(J)$ è soluzione di (7) se e solo se

$$D\left(e^{-A}u\right) = 0, \quad \text{in } J$$

e ciò accade se e solo se $e^{-A}u$ è costante in J. Quindi tutte le soluzioni della (7) sono date da

$$u(x) = Ce^{A(x)}\ , \quad x \in J \tag{8}$$

dove C è una costante arbitraria. Nel seguito, con l'espressione *integrale generale* di un'equazione differenziale indicheremo l'insieme di tutte le soluzioni di tale equazione. Ad esempio, l'insieme $\left\{Ce^{A(x)} | C \in \mathbb{R}\right\}$ (o, semplicemente, $Ce^{A(x)}$ con C costante arbitraria) è l'integrale generale dell'equazione (7).

ESEMPIO 1

Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$u' + \frac{u}{x} = 0 \text{ in } (-\infty, 0). \tag{9}$$

In questo caso, $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $J = (-\infty, 0)$. Determiniamo $A(x)$. Abbiamo, per $x \in (-\infty, 0)$,

$$A(x) = \int_{-1}^{x} -\frac{1}{t} dt = -\log(-x) = \log\left(-\frac{1}{x}\right). \tag{10}$$

Quindi tutte le soluzioni di (9) sono date dalla formula (8) e pertanto da

$$u(x) = Ce^{\log\left(-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{C}{x}, \tag{11}$$

dove C è una costante arbitraria. Osserviamo che, per l'arbitrarietà della costante C, sarebbe ugualmente corretto scrivere che tutte le soluzioni di (9) sono date da

$$\frac{C}{x}, \quad x \in (-\infty, 0), \tag{12}$$

dove C è una costante arbitraria.

Osserviamo anche che se invece della funzione (10) avessimo considerato una qualsiasi altra primitiva ovvero se avessimo considerato l'integrale indefinito di $-\frac{1}{x}$ sull'intervallo $(-\infty, 0)$ **non** otterremmo due costanti arbitrarie nella formula risolutiva, ma sempre e soltanto una costante arbitraria. Infatti, se invece di $A(x) = \log\left(-\frac{1}{x}\right)$ avessimo considerato $A(x) = \log\left(-\frac{1}{x}\right) + K$, con K costante arbitraria, avremmo da (8)

$$u(x) = Ce^{\log\left(-\frac{1}{x}\right)+K} = Ce^{K}e^{\log\left(-\frac{1}{x}\right)} = -Ce^{K}\frac{1}{x}$$

dove C e K sono costanti arbitrarie. Tuttavia per l'arbitrarietà di C e K, le soluzioni di (9) sono nuovamente date dalla (12). Infatti (il lettore verifichi) vale l'uguaglianza

$$\left\{-Ce^{K} | C \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}.$$

Ora, ritorniamo all'equazione (6) e supponiamo di conoscere una sua **soluzione particolare**, sia essa $\widetilde{u} \in C^1(J)$. Per ora non ci occupiamo di trovare una tale soluzione, ma mostriamo che tutte le soluzioni di (6) sono date da

$$u(x) = \widetilde{u}(x) + Ce^{A(x)}, \quad x \in J \tag{13}$$

dove C è una costante arbitraria. Prima di tutto dimostriamo che $\widetilde{u} + Ce^{A}$ è soluzione di (6)

$$Du - au = D\left(\widetilde{u} + Ce^{A}\right) - a\left(\widetilde{u} + Ce^{A}\right) = \left(D\widetilde{u} - a\widetilde{u}\right) + \left(D\left(Ce^{A}\right) - a\left(Ce^{A}\right)\right),$$

ma $D\left(Ce^{A}\right) - a\left(Ce^{A}\right) = 0$, quindi

$$Du - au = D\widetilde{u} - a\widetilde{u}, \tag{14}$$

d'altra parte (poiché $\widetilde{u}$ è soluzione di (6)) abbiamo

$$D\widetilde{u} - a\widetilde{u} = f, \quad \text{in } J. \tag{15}$$

Quindi da (14) e (15) abbiamo $Du - au = f$, in J.

Ora dimostriamo il viceversa ovvero dimostriamo che se u è una soluzione di (6) allora essa deve essere del tipo (13). Poiché

$$D(u - \widetilde{u}) - a(u - \widetilde{u}) = (Du - au) - (D\widetilde{u} - a\widetilde{u}) = f - f = 0, \quad \text{in } J,$$

abbiamo che $u - \widetilde{u}$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione (6) e quindi, per la (8), esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $u - \widetilde{u} = Ce^{A}$ e da ciò segue la (13).

ESEMPIO 2

Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$u' + \frac{u}{x} = 1 \text{ in } (-\infty, 0). \tag{16}$$

Nell'Esempio 1 abbiamo trovato tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione (16). Quindi, per determinare tutte le soluzioni dell'equazione (16) è sufficiente trovare una soluzione particolare dell'equazione. Ad esempio, si verifica facilmente che la funzione $\frac{x}{2}$ è soluzione di (16). Pertanto, tenendo conto di (12), tutte le soluzioni di (16) sono date da

$$\frac{x}{2}+\frac{C}{x}, \quad x\in(-\infty,0)\,,$$

dove C è una costante arbitraria.

Non è difficile trovare una formula che fornisca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (6). Infatti, sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ e osserviamo che

$$u'-au=e^{A}D\left(e^{-A}u\right),$$

allora l'equazione (6) si può scrivere

$$D\left(e^{-A}u\right)=e^{-A}f, \quad \text{in } J.$$

Da quest'ultima abbiamo

$$e^{-A(x)}u(x)=\int e^{-A(x)}f(x)\,dx, \quad \text{in } J$$

ovvero

$$u(x)=e^{A(x)}\int e^{-A(x)}f(x)\,dx, \quad \text{in } J. \tag{17}$$

Si osservi che, per il procedimento seguito, la formula (17) fornisce tutte le soluzioni dell'equazione (6).

La formula (17) può essere scritta anche nel modo seguente (in cui si ritrova più esplicitamente la formula (13)). Sia $x_0\in J$ e sia

$$A(x)=\int_{x_0}^{x}a(t)\,dt\ , \quad x\in J,$$

allora

$$u(x)=Ce^{A(x)}+e^{A(x)}\int_{x_0}^{x}e^{-A(t)}f(t)\,dt\ , \quad x\in J, \tag{18}$$

dove C è una costante arbitraria. Ora osserviamo che

$$e^{A(x)}\int_{x_0}^{x}e^{-A(t)}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}e^{(A(x)-A(t))}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}f(t)\exp\left\{\int_{t}^{x}a(s)\,ds\right\}dt.$$

Quindi la formula (18) si può scrivere

$$u(x)=Ce^{\int_{x_0}^{x}a(t)dt}+\int_{x_0}^{x}f(t)\exp\left\{\int_{t}^{x}a(s)\,ds\right\}dt, \quad x\in J, \tag{19}$$

dove C è una costante arbitraria.

Problema di Cauchy

Siano $a, f \in C^0(J)$, $x_0 \in J$ e $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Il problema di determinare $u \in C^1(J)$ tale che

$$\begin{cases} u' - au = f, & \text{in } J \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}, \tag{20}$$

è noto come **problema di Cauchy per l'equazione differenziale** $u' - au = f$ **con dati iniziali** x_0 *e* η_0.

Vale il seguente

TEOREMA 1

Siano $a, f \in C^0(J)$, $x_0 \in J$ e $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Allora il problema di Cauchy (20) ha una ed una sola soluzione ed essa è data da

$$u(x) = \eta_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int_{x_0}^{x} f(t) \exp\left\{\int_t^x a(s)\, ds\right\} dt, \quad x \in J. \tag{21}$$

DIMOSTRAZIONE

Utilizzando la (19) con $C = \eta_0$, si verifica immediatamente che la (21) è soluzione dell'equazione $u' - au = f$, in J ed è altrettanto immediato verificare che $u(x_0) = \eta_0$. Per dimostrare che la (21) è l'unica soluzione del problema di Cauchy basta osservare che se v è soluzione del problema di Cauchy (20) allora essa è soluzione di $v' - av = f$ e, quindi, per la (19) esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$v(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int_{x_0}^{x} f(t) \exp\left\{\int_t^x a(s)\, ds\right\} dt, \quad x \in J. \tag{22}$$

D'altra parte, v deve soddisfare anche la condizione iniziale $v(x_0) = \eta_0$, ma dalla (22) abbiamo $v(x_0) = C$, quindi $C = \eta_0$ e in definitiva abbiamo che $v = u$. Ciò mostra che la u data da (21) è l'unica soluzione del problema di Cauchy (20).$\square$

ESEMPIO 2

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' - xu = xe^{x^2}, \\ u(0) = 1 \end{cases}. \tag{23}$$

Applichiamo la formula (21) con $a(x) = x$, $f(x) = xe^{x^2}$, $J = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $\eta_0 = 1$.

Abbiamo

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

quindi

$$\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \quad , \quad \int_t^x s ds = \frac{1}{2}\left(x^2 - t^2\right).$$

Perciò, da (21) abbiamo

$$u(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + \int_0^x te^{t^2} e^{\frac{1}{2}\left(x^2-t^2\right)} dt. \tag{24}$$

L'integrale a secondo membro della (24) può essere facilmente semplificato. Infatti

$$\int_0^x te^{t^2} e^{\frac{1}{2}\left(x^2-t^2\right)} dt = \int_0^x te^{\frac{t^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} dt = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x te^{\frac{t^2}{2}} dt = e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) = e^{x^2} - e^{\frac{x^2}{2}}$$

e inserendo quanto abbiamo ottenuto nella (24) abbiamo

$$u(x) = e^{x^2}$$

che è l'unica soluzione del problema di Cauchy (23).

Concludiamo questo paragrafo sottolineando che, pur disponendo della formula generale (19) che ci fornisce tutte le soluzioni dell'equazione (6), in alcuni casi può essere più conveniente cercare delle soluzioni particolari "ad hoc" dell'equazione non omogenea. Questo è il caso in cui il coefficiente a è costante e la funzione f è una funzione polinomiale, trigonometrica, esponenziale ecc. L'idea consiste nel cercare soluzioni particolari che "somiglino" al termine non omogeneo, f, dell'equazione. Rinviamo al libro di testo (n. 2 del paragrafo 17.1) per una trattazione dettaglata dell'argomento. Qui ci limitiamo ad illustrare solo qualche caso.

Supponiamo che a sia costante e $f(x) = e^{\alpha x}$. Consideriamo l'equazione

$$u' - au = e^{\alpha x}, \quad \text{in } \mathbb{R} \tag{25}$$

e proponiamoci di determinarne l'integrale generale. Innanzitutto troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$u' - au = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Esso è dato da

$$Ce^{ax}$$

dove C è una costante arbitraria. Ora cerchiamo una soluzione particolare di (25). Cominciamo a cercarla del tipo $\widetilde{u}(x) = Ke^{\alpha x}$ e determiniamo K richiedendo che $\widetilde{u}$ soddisfi l'equazione (25). Ciò equivale a richiedere che K sia tale che

$$D\left(Ke^{\alpha x}\right) - aKe^{\alpha x} = e^{\alpha x}, \quad \text{in } \mathbb{R}$$

ovvero

$$K(\alpha - a) = 1.$$

Ora se $\alpha \neq a$ allora

$$K = \frac{1}{\alpha - a}$$

e quindi l'integrale generale della (25) è dato da

$$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha - a} + Ce^{ax},$$

dove C è una costante arbitraria. Se $\alpha = a$ dovevamo aspettarci che (25) non avesse soluzioni del tipo $Ke^{\alpha x}$ e, ciò, per il semplice fatto che quando $\alpha = a$ le funzioni del tipo $Ke^{\alpha x}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea $u' - au = 0$. Quando $\alpha = a$ possiamo cercare una soluzione particolare di (25) del tipo $Kxe^{\alpha x}$. Dobbiamo, pertanto, richiedere che

$$D\left(Kxe^{\alpha x}\right) - \alpha Kxe^{\alpha x} = e^{\alpha x}, \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Svolgendo i calcoli abbiamo

$$\left(K\alpha xe^{\alpha x} + Ke^{\alpha x}\right) - \alpha Kxe^{\alpha x} = e^{\alpha x}, \quad \text{in } \mathbb{R},$$

da cui, semplificando, otteniamo

$$Ke^{\alpha x} = e^{\alpha x}, \quad \text{in } \mathbb{R}$$

e, quindi, $K = 1$. In definitiva, se $a = \alpha$ allora l'integrale generale della (25) è dato da

$$\left(C + x\right)e^{ax},$$

dove C è una costante arbitraria. Il lettore ritrovi lo stesso risultato utilizzando la formula (19).

ESERCIZI

1) Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

(a)

$$\begin{cases} u' - 2u = e^x + x, \\ u\left(0\right) = -1 \end{cases};$$

(b)

$$\begin{cases} u' - \frac{1}{x}u = -x\sin x, \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}.$$

2) Siano $a \in C^0\left(J\right)$ e sia $u \in C^1\left(J\right)$ una soluzione dell'equazione

$$u'\left(x\right) = a\left(x\right)u\left(x\right), \quad \text{per ogni } x \in J.$$

Senza risolvere l'equazione dimostrare che:

(i) se a è derivabile in $x_0 \in J$ allora u è derivabile due volte in x_0,
(ii) se $a \in C^1\left(J\right)$ allora $u \in C^2\left(J\right)$,
(iii) se $a \in C^k\left(J\right)$ allora $u \in C^{k+1}\left(J\right)$ e se $a \in C^\infty\left(J\right)$ allora $u \in C^\infty\left(J\right)$.

3) Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni

a) $u' - \frac{1}{2x}u = e^{-\sqrt{x}}\sin x$, in $(0, +\infty)$,
b) $u' - \frac{u}{x^2-1} = 0$, in $(-1, 1)$,
c) $u' + u = \sin x + 2x^2 - 3e^x$.

1.3 Qualche osservazione di algebra lineare

Il motivo per il quale l'equazione (6) è detta "lineare" è dovuto al fatto che l'operatore $u' - au$ (che raccoglie tutti i termini in cui compare la u o la sua derivata) è un **operatore lineare**. Precisiamo quanto affermato e, attingendo un po' dalle conoscenze di algebra lineare, mettiamo in maggior risalto alcuni aspetti strutturali dei procedimenti seguiti fin qui. Cominciamo col ricordare che risulta essere uno *spazio vettoriale reale* l'insieme delle funzioni definite in un intervallo J a valori in $\mathbb{R}$ con le operationi di somma e prodotto per uno scalare definite, rispettivamente, da

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{per ogni } x \in J$$

e

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \text{per ogni } x \in J,$$

dove $f : J \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ sono due funzioni qualsiasi e $\lambda \in \mathbb{R}$. Indichiamo con $\mathcal{F}(J)$ tale spazio vettoriale.

Poiché $C^0(J) \subset \mathcal{F}(J)$ e per ogni $f, g \in C^0(J)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $f + g \in C^0(J)$ e $\lambda f \in C^0(J)$, si ha che $C^0(J)$ è un *sottospazio vettoriale* di $\mathcal{F}(J)$. Analogamente se $k \in \mathbb{N}$ oppure $k = \infty$, $C^k(J)$ risulta essere un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(J)$. Osserviamo anche che l'operatore di derivazione D è un operatore lineare (o applicazione lineare) tra gli spazi vettoriali $C^k(J)$ e $C^{k-1}(J)$ quando $k \in \mathbb{N}$ (e tra $C^\infty(J)$ e $C^\infty(J)$ nel caso in cui $k = \infty$). Più precisamente, abbiamo che, per $k \in \mathbb{N}$,

$$D : C^k(J) \to C^{k-1}(J)$$

dove

$$Df := \text{funzione derivata di } f, \quad \text{per ogni } f \in C^k(J),$$

soddisfa le seguenti condizioni

$$D(f+g) = Df + Dg$$

e

$$D(\lambda f) = \lambda Df,$$

per ogni $f, g \in C^k(J)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si osservi che se $a \in C^0(J)$ anche l'operatore

$$T : C^1(J) \to C^0(J), \quad T(u) := Du - au, \text{ per } u \in C^1(J), \tag{26}$$

è un operatore lineare. Infatti

$$T(u+v) = D(u+v) - a(u+v) = Du + Dv - au - av = (Du - au) + (Dv - av) = T(u) + T(v)$$

e

$$T(\lambda u) = D(\lambda u) - a(\lambda u) = \lambda(Du - au) = \lambda T(u)$$

per ogni $u, v \in C^1(J)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Con le notazioni che abbiamo introdotto, l'equazione (6) e la sua omogenea associata (7) si possono scrivere rispettivamente

$$T(u) = f \tag{27}$$

e

$$T(u) = 0. \tag{28}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione (27) non è altro che l'immagine inversa di $\{f\}$ tramite T ovvero

$$T^{-1}(\{f\}) = \left\{u \in C^1(J) \,|T(u) = f\right\}.$$

Pertanto l'integrale generale di (28) non è altro che il nucleo (indicato spesso con Ker$T$) dell'applicazione lineare T. Indichiamo con V_0 tale nucleo. Dall'algebra lineare sappiamo che V_0 ha una struttura di spazio vettoriale, infatti esso è un sottospazio vettoriale di $C^1(J)$. Nella sezione precedente abbiamo anche visto che

$$V_0 = \left\{Ce^A | C \in \mathbb{R}\right\}, \tag{29}$$

dove A è una primitiva di a. In particolare la (29) consente di affermare che V_0 ha dimensione 1 e che l'insieme $\left\{e^A\right\}$ è una base di V_0.

Se $T^{-1}(\{f\}) \neq \emptyset$, cioè se l'equazione (27) ammette almeno una soluzione, allora tra $T^{-1}(\{f\})$ e il sottospazio V_0 vale la seguente semplice relazione (verificare!), indicata con $\widetilde{u}$ una soluzione particolare di (27),

$$T^{-1}(\{f\}) = V_0 + \widetilde{u} = \{v + \widetilde{u} | v \in V_0\}. \tag{30}$$

La (30), quando T è definito da (26), non è altro che la (13).

Un'altra conseguenza semplice e importante della linearità di T è il cosiddetto **principio di sovrapposizione**. Tale principio afferma che se f_1 e f_2 sono assegnate e u_1 e u_2 sono soluzioni di

$$T(u_1) = f_1 \quad \text{e} \quad T(u_2) = f_2$$

allora $c_1u_1 + c_2u_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, è una soluzione di

$$T(u) = c_1f_1 + c_2f_2.$$

Infatti per la linearità di T si ha

$$T(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) = c_1f_1 + c_2f_2.$$

Sintetizziamo un po' quanto abbiamo osservato fin qui e per sottolinearne il carattere generale cambiamo un po' le notazioni. Siano, dunque, X e Y due spazi vettoriali e sia

$$\mathcal{T} : X \to Y,$$

un operatore lineare. Sia $\varphi \in Y$. Per determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\mathcal{T}(u) = \varphi, \tag{31}$$

occorre e basta risolvere i due seguenti sottoproblemi:

(i) risolvere l'equazione omogenea associata della (31), $\mathcal{T}(u) = 0$, ovvero determinare il sottospazio $\mathcal{V}_0 = \mathcal{T}^{-1}(\{0\})$;

(ii) Trovare una soluzione particolare $\widetilde{u}$ di (31);

dopo aver risolto (i) e (ii) si ha che l'insieme di tutte le soluzioni di (31) è dato da $\widetilde{u} + \mathcal{V}_0$.

Inoltre (principio di sovrapposizione) se $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ e se u_1 e u_2 sono soluzioni di $\mathcal{T}(u_1) = \varphi_1$ e $\mathcal{T}(u_2) = \varphi_2$ allora $\mathcal{T}(c_1u_1 + c_2u_2) = \varphi$.

2 Equazioni differenziali di ordine n. Il problema di Cauchy

Siano $J, J_0, J_1, \ldots, J_n$ intervalli aperti di $\mathbb{R}$, indichiamo con Q il prodotto cartesiano $J \times J_0 \times J_1 \times \ldots \times J_n$ e sia

$$G : Q \to \mathbb{R}, \quad Q \ni (x, q, p_1 \ldots, p_n) \mapsto G(x, q, p_1 \ldots, p_n) \in \mathbb{R},$$

una funzione di $n+2$ variabili. Un'equazione differenziale di ordine n è un'equazione del tipo

$$G\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) = 0. \tag{32}$$

Si chiama soluzione dell'equazione (32) una funzione $u \in C^n\left(\widetilde{J}\right)$, dove $\widetilde{J}$ è un intervallo contenuto in J, tale che

$$G\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) = 0, \quad \text{per ogni } x \in \widetilde{J}.$$

Se $q, p_1 \ldots, p_n$ compaiono in G solo linearmente e $J_0 = J_1 = \ldots = J_n = \mathbb{R}$ diremo che l'equazione (32) è un'equazione differenziale lineare di ordine n. Nel paragrafo 1.2 abbiamo incontrato le equazioni del tipo

$$u' - au = f, \quad \text{in } J \tag{33}$$

con $a, f \in C^0(J)$. In questo caso $Q = J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $G(x, q, p_1) = p_1 - a(x)q - f(x)$ e poiché q e p_1 compaiono in G solo linearmente, l'equazione (33) è lineare ed è del primo ordine perché l'ordine più alto di derivazione è 1.

Un'equazione della forma

$$u^{(n)}(x) = F\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x)\right),$$

(in questo caso $G(x, q, p_1 \ldots, p_n) = p_n - F(x, q, p_1 \ldots, p_{n-1})$) è detta equazione equazione differenziale lineare di ordine n in **forma normale**.

2.1 Equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

Siano J, J_0 intervalli aperti di $\mathbb{R}$, indichiamo con $\Omega = J \times J_0$ e sia

$$F : \Omega \to \mathbb{R}, \tag{34}$$

una funzione di due variabili. Siano $x_0 \in J$ e $\eta_0 \in J_0$, il seguente problema: determinare u tale che

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)) \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}, \tag{35}$$

è detto *problema di Cauchy* per l'equazione differenziale $u' = F(x, u)$, la condizione $u(x_0) = \eta_0$ è detta *condizione iniziale* del problema di Cauchy, inoltre x_0 e il numero η_0 sono chiamati, rispettivamente, il *punto iniziale* e *il valore iniziale* del problema di Cauchy. Diremo che il problema di Cauchy (35) ammette soluzione se esiste un intervallo $(\alpha, \beta) \subset J$ tale che $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ed esiste $u \in C^1(\alpha, \beta)$ tale che il grafico di u sia contenuto in Ω e si abbia

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)), & \text{per ogni } x \in (\alpha, \beta) \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}. \tag{36}$$

Diremo che c'è unicità della soluzione per il problema di Cauchy (35) sull'intervallo (α, β) se accade che

$$\left(u, v \in C^1(\alpha, \beta) \text{ e } u \text{ e } v \text{ soddisfano (36)}\right) \Longrightarrow (u = v \text{ in } (\alpha, \beta)).$$

Nel paragrafo 1.2 abbiamo visto che se $a, f \in C^0(J)$ allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = a(x) u(x) + f(x), \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases},$$

ammette una e una sola soluzione in J. Tale risultato è stato ottenuto utilizzando l'integrale generale dell'equazione $u' = au + f$. Il procedimento seguito è stato agevole perché siamo riusciti con semplici passaggi a determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale. Nel caso in cui abbiamo a che fare con un'equazione differenziale del tipo $u' = F(x, u)$, non è sempre possibile determinare in modo soddisfacente l'integrale generale. Perciò, per stabilire l'esistenza e l'unicità di soluzioni per il problema di Cauchy (35) bisogna seguire altre strade. Qui di seguito forniremo delle condizioni sulla funzione F che ci forniscono l'esistenza e l'unicità per il problema di Cauchy.

Continuità di una funzione di due variabili.

Innanzitutto, data una funzioni di due variabili, definiamo cosa intendiamo che tale funzione è continua in un punto e in un insieme. Consideriamo la funzione (34) e sia $(\overline{x}, \overline{q})$ un punto di Ω, diremo che F *è continua in* $(\overline{x}, \overline{q})$ se accade che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \text{ t. c. se } |x - \overline{x}| < \delta, \ |q - \overline{q}| < \delta \text{ e } (x, q) \in \Omega \text{ allora } \ |F(x, q) - F(\overline{x}, \overline{q})| < \varepsilon.$$

Diremo che F è continua in Ω se F è continua in tutti i punti di Ω, in questo caso scriveremo $F \in C^0(\Omega)$.

Ad esempio se $F(x,q) = h(x)\, g(q)$ con $h : J \to \mathbb{R}$ e $g : J_0 \to \mathbb{R}$ funzioni (di una variabile) continue, rispettivamente, in $\overline{x}$ e $\overline{q}$ allora si verifica facilmente che F è continua in $(\overline{x}, \overline{q})$. Inoltre, se $h \in C^0(J)$ e $g \in C^0(J_0)$ allora $F \in C^0(\Omega)$.

Condizione di Lipschitz.

Sia F la funzione (34). Diremo che F è *lipschitziana* rispetto alla variabile q in $R := [\alpha, \beta] \times [\alpha_1, \beta_1] \subset \Omega$ se esiste $L \geq 0$ tale che

$$|F(x,q_1) - F(x,q_2)| \leq L\,|q_1 - q_2|, \quad \text{per ogni } (x,q_1), (x,q_2) \in R.$$

Diremo che F è *localmente lipschitziana* in Ω rispetto alla variabile q se per ogni $R = [\alpha, \beta] \times [\alpha_1, \beta_1] \subset \Omega$ accade che F è lipschitziana in R rispetto alla variabile q ovvero se per ogni $R = [\alpha, \beta] \times [\alpha_1, \beta_1] \subset \Omega$ esiste $L_R \geq 0$ tale che

$$|F(x,q_1) - F(x,q_2)| \leq L_R\,|q_1 - q_2|, \quad \text{per ogni } (x,q_1), (x,q_2) \in R.$$

Ad esempio, se $F(x,q) = a(x)\,q + f(x)$ con a funzione limitata in $[\alpha, \beta]$ allora F è lipschitziana rispetto alla variabile q in ogni rettangolo del tipo $[\alpha, \beta] \times [\alpha_1, \beta_1]$. Infatti indicando con

$$L = \sup_{[\alpha,\beta]} |a|,$$

abbiamo

$$|F(x,q_1) - F(x,q_2)| = |(a(x)\,q_1 + f(x)) - (a(x)\,q_2 + f(x))| = |a(x)|\,|q_1 - q_2| \leq L|q_1 - q_2|.$$

Invece, la funzione $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x,q) = |q|^\gamma$ con γ tale che $0 < \gamma < 1$, non è localmente lipschitziana rispetto alla variabile q. Infatti consideriamo il rettangolo $R = [-1,1] \times [-1,1]$, se F fosse localmente lipschitziana rispetto alla variabile q, dovrebbe esistere $L \geq 0$ tale che

$$|F(x,q) - F(x,0)| \leq L|q|, \quad \text{per ogni } (x,q) \in R,$$

ma se così fosse avremmo, in particolare,

$$|q|^{\gamma-1} = \frac{|F(0,q) - F(0,0)|}{|q|} \leq L, \quad \text{per ogni } q \in [-1,1] \setminus \{0\}$$

che è assurdo in quanto

$$\lim_{q \to 0} |q|^{\gamma-1} = +\infty.$$

Possiamo ora enunciare il teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy.

TEOREMA 1 (esistenza e unicità locale)

Siano J, J_0 intervalli aperti di $\mathbb{R}$, indichiamo con $\Omega = J \times J_0$ e sia

$$F : \Omega \to \mathbb{R},$$

una funzione continua in Ω e localmente lipschitziana in Ω rispetto alla seconda variabile q. Dati $x_0 \in J$ e $\eta_0 \in J_0$ esiste un intervallo aperto $(\alpha, \beta) \subset J$ tale che $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e

(i) esiste $u \in C^1(\alpha, \beta)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)), & \text{per ogni } x \in (\alpha, \beta) \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}, \tag{37}$$

(ii) il problema di Cauchy (37) non ha altre soluzioni in (α, β).

Rinviamo al libro di testo (in particolare paragrafo 17.2.2) per ulteriori approfondimenti. Qui ci limitiamo a segnalare che l'intervallo (α, β) non è assegnato a priori, ma dipende da tutti i dati del problema di Cauchy e cioè dalla funzione F, da x_0 e da η_0. Sembra del tutto naturale considerare l'unione $\widetilde{J}$ di tutti gli intervalli del tipo (α, β) per i quali la (i) e la (ii) del teorema precedente siano soddisfatte e definire in modo appropriato una funzione U definita in $\widetilde{J}$ e soluzione del problema di Cauchy (35) in $\widetilde{J}$. L'intervallo $\widetilde{J}$ è chiamato intervallo massimale, ma non sempre $\widetilde{J}$ coincide con l'intervallo J. Se ciò accade diremo che il problema di Cauchy (35) ammette (un'unica) soluzione globale. Il seguente teorema (cfr. Teorema 17.5 del libro di testo) fornisce delle condizioni su F che forniscono l'esistenza globale di una soluzione.

TEOREMA 2 (esistenza globale)

Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi del teorema precedente e sia $J_0 = \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che F soddisfi la seguente **condizione di crescita al più lineare rispetto a** q in J, ovvero esista una funzione $\phi \in C^0(J)$ tale che

$$|F(x, q)| \leq \phi(x)(1 + |q|), \quad \text{per ogni } (x, q) \in J \times \mathbb{R}. \tag{38}$$

Allora esiste una ed una sola $u \in C^1(J)$ tale che

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)), & \text{per ogni } x \in J \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}.$$

Si osservi che se $a, f \in C^0(J)$ allora $F(x, q) = a(x)q + f(x)$ soddisfa tutte le condizioni del teorema precedente e, in particolare la condizione di crescita al più lineare (38).

3 Alcune equazioni deifferenziali del primo ordine non lineari

In questo paragrafo considereremo alcune equazioni differenziali del primo ordine che si possono facilmente risolvere.

3.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono equazioni differenziali del tipo

$$u' = h(x) f(u). \tag{39}$$

con h e f funzioni continue. Il metodo che si adopera per trovare l'integrale generale della (39) è basato sul seguente procedimento che preciseremo e giustificheremo fra poco. Esprimiamo la derivata di u con la notazione di Leibniz, vale a dire riscriviamo la (39) come

$$\frac{du}{dx} = h(x) f(u), \tag{40}$$

ora "facciamo finta" che $\frac{du}{dx}$ sia un vero e proprio rapporto e moltiplichiamo ambo i membri della (40) per $\frac{1}{f(u)}dx$

$$\frac{du}{f(u)} = h(x)\, dx. \tag{41}$$

Ora, integriamo ambo i membri della (41)

$$\int \frac{du}{f(u)} = \int h(x)\, dx. \tag{42}$$

Ora, indicando con Φ e H una primitiva di $\frac{1}{f}$ e h rispettivamente, l'ultima uguaglianza si può scrivere

$$\Phi(u) = H(x) + C, \tag{43}$$

dove C è una costante arbitraria. A questo punto non rimane che ricavare la u dalla (43). Prima di passare alle necessarie precisazioni consideriamo il seguente esempio. Consideriamo l'equazione

$$u' = 1 + u^2$$

e seguiamo il procedimento descritto sopra. Abbiamo

$$\arctan u + C_1 = \int \frac{du}{1+u^2} = \int dx = x + C_2$$

dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie e, quindi,

$$\arctan u = x + C$$

dove C è una costante arbitraria. Ora invertiamo la funzione arcotangente. Fissiamo $C \in \mathbb{R}$ e abbiamo

$$u(x) = \tan(x + C), \quad \text{per } x \in \left(\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} + C\right)$$

(si faccia attenzione all'intervallo $\left(\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} + C\right)$).

Ora giustifichiamo e precisiamo i passaggi formali fatti sopra. Ci concentreremo sul caso $h = 1$, da cui si comprenderà facilmente il caso generale.

PROPOSIZIONE 1

Sia, dunque, J_0 un intervallo aperto e sia $f \in C^0(J_0)$ tale che $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in J_0$. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\eta_0 \in J_0$ e sia $\Phi : J_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi(q) = \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \quad q \in J_0.$$

Allora Φ è strettamente monotona, $\Phi \in C^1(J_0)$ e, posto $I_0 = x_0 + \Phi(J_0)$ (I_0 è un intervallo), si ha che la funzione $u : I_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = \Phi^{-1}(x - x_0), \quad \text{per } x \in I_0 \tag{44}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u), \text{ in } I_0 \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases} . \tag{45}$$

Dimostrazione

Poiché f è continua in J_0 ed è tale che $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in J_0$, per il teorema degli zeri, o accade che (a) $f(q) > 0$ per ogni $q \in J_0$ oppure (b) $f(q) < 0$ per ogni $q \in J_0$. Per fissare le idee supponiamo che valga (a). Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $\Phi \in C^1(J_0)$ e

$$\Phi'(q) = \frac{1}{f(q)} > 0, \quad \text{per ogni } q \in J_0, \tag{46}$$

da cui segue anche che Φ è strettamente crescente quindi invertibile. Inoltre per il teorema di derivazione della funzione inversa si ha

$$\frac{d}{dx}\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(x))}. \tag{47}$$

Ora dimostriamo che la funzione u definita da (44) è soluzione del problema di Cauchy (45). Innanzitutto, dal teorema di derivazione della funzione composta si ha $u \in C^1(I_0)$ e, tenendo presente la (46) e (47), abbiamo, per ogni $x \in I_0$,

$$u'(x) = \frac{d}{dx}\Phi^{-1}(x - x_0) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(x - x_0))} = f\left(\Phi^{-1}(x - x_0)\right) = f(u(x)).$$

Quindi

$$u' = f(u), \quad \text{in } I_0.$$

Verifichiamo che u soddisfa la condizione iniziale. A questo scopo osserviamo che $\Phi(\eta_0) = 0$ quindi $\Phi^{-1}(0) = \eta_0$. Perciò

$$u(x_0) = \Phi^{-1}(x_0 - x_0) = \Phi^{-1}(0) = \eta_0.$$

Ora dimostriamo l'unicità. Supponiamo che $v \in C^1(I_0)$ sia tale che $v(I_0) \subset J_0$ e

$$\begin{cases} v' = f(v), \text{ in } I_0 \\ v(x_0) = \eta_0 \end{cases}$$

e dimostriamo che $u = v$. Poiché $f > 0$ in J_0 e $v'(x) = f(v(x))$, per ogni $x \in I_0$ abbiamo

$$\frac{v'(x)}{f(v(x))} = 1, \quad \text{per ogni } x \in I_0$$

da cui segue, integrando membro a membro,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{v'(t)\,dt}{f(v(t))} = \int_{x_0}^{x} dt = x - x_0, \quad \text{per ogni } x \in I_0. \tag{48}$$

Ora dalla regola di integrazione per sostituzione, ponendo $v(t) = \eta$ otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{v'(t)\,dt}{f(v(t))} = \int_{\eta_0}^{v(x)} \frac{d\eta}{f(\eta)} = \Phi(v(x)), \quad \text{per ogni } x \in I_0.$$

Quindi la (48) diventa

$$\Phi(v(x)) = x - x_0, \quad \text{per ogni } x \in I_0$$

ovvero

$$v(x) = \Phi^{-1}(x - x_0) = u(x), \quad \text{per ogni } x \in I_0.$$

□

OSSERVAZIONI

1) Posto $J_0 = (c, d)$ con $c, d \in \mathbb{R}^*$, dalla Proposizione 1 si ha che gli estremi dell'intervallo I_0 sono dati dai due limiti

$$\alpha = \lim_{q \to c^+} \left(x_0 + \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)} \right), \quad \beta = \lim_{q \to d^-} \left(x_0 + \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)} \right).$$

Se $f > 0$ allora $I_0 = (\alpha, \beta)$, se $f < 0$ allora $I_0 = (\beta, \alpha)$. In particolare, si osservi che se la funzione $\frac{1}{f}$ è integrabile o impropriamente integrabile sull'intervallo (c, d) allora l'intervallo I_0 è limitato altrimenti, se uno dei due limiti non è finito (quindi la $\frac{1}{f}$ non è impropriamente integrabile su $\left(c, \frac{c+d}{2}\right]$ o $\left[\frac{c+d}{2}, d\right)$ o su entrambi) allora I_0 non è limitato.

2) Nel caso in cui la funzione f si annulli in un punto (o in un insieme finito di punti) dell'intervallo (c, d), la Proposizione 1 non è più valida. Consideriamo, ad esempio, il caso in cui si abbia $f(q_0) = 0$, dove q_0 è un punto di (c, d), allora la funzione costante $\widetilde{u} = q_0$ è soluzione dell'equazione $u' = f(u)$ ($\widetilde{u}$ è detta soluzione singolare dell'equazione), infatti $\widetilde{u}' = 0 = f(q_0) = f(\widetilde{u})$. In particolare $\widetilde{u}$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u), \\ u(x_0) = q_0 \end{cases} \tag{49}$$

e, poiché $\widetilde{u}$ non è iniettiva, essa non può essere ricavata da una formula del tipo (44).

D'altra parte, se $f \in C^1(c,d)$, abbiamo che $\widetilde{u}$ è *l'unica* soluzione del problema di Cauchy (49). L'unicità di $\widetilde{u}$ è conseguenza del Teorema 1 del paragrafo 2.1. Infatti, dal fatto che $f \in C^1(c,d)$ segue che f soddisfa alla seguente condizione di *lipschizianità locale*: per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset J_0$ si ha

$$|f(q_1) - f(q_2)| \leq L\,|q_1 - q_2| \ , \quad \text{per ogni } q_1, q_2 \in [a,b]\,, \tag{50}$$

dove

$$L = \max_{[a,b]} |f'|$$

(la (50) segue dal Teorema di Lagrange). Ora, mostriamo che se u è una qualsiasi soluzione di

$$u' = f(u)$$

allora o $u \equiv q_0$ oppure $u < q_0$ oppure $u > q_0$. Infatti supponiamo che $u \not\equiv q_0$ e che esistano due punti x_1 e x_2 nell'intervallo I in cui è definita u tali che $u(x_1) < q_0$ oppure $u(x_2) > q_0$. Per il Teorema dei valori intermedi esiste un punto $\overline{x} \in I$ tale che $u(\overline{x}) = q_0$. Perciò u sarebbe una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u)\,, \ \text{ in } I \\ u(\overline{x}) = q_0 \end{cases}$$

e, dal Teorema 1 del paragrafo 2.1, seguirebbe che $u \equiv q_0$ e ciò sarebbe in contraddizione con $u \not\equiv q_0$. In termini geometrici, quando $f(q_0) = 0$ e $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in (c,d) \setminus \{q_0\}$ (e $f \in C^1(c,d)$), abbiamo solo tre possibilità: o il grafico di u è la retta di equazione $u = q_0$, oppure il grafico di u è contenuto in una delle due strisce $\mathbb{R} \times (c, q_0)$, $\mathbb{R} \times (q_0, d)$. In modo analogo si procederà se f si annulla in più punti. Se, ad esempio, f si annulla in due punti $q_0, q_1 \in (c,d)$ con $q_0 < q_1$ allora avremo le due soluzioni singolari $u = q_0$ e $u = q_1$ e i grafici di tutte le altre soluzioni saranno contenuti in una delle sctrisce $\mathbb{R} \times (c, q_0)$, $\mathbb{R} \times (q_0, q_1)$ oppure $\mathbb{R} \times (q_1, d)$.

Abbiamo anche

PROPOSIZIONE 1

Siano J, J_0 intervalli aperti e siano $h \in C^0(J)$ $f \in C^0(J_0)$ con f tale che $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in J_0$. Siano $x_0 \in J$ e $\eta_0 \in J_0$ e $\Phi : J_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi(q) = \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \quad q \in J_0.$$

Allora Φ è strettamente monotona, $\Phi \in C^1(J_0)$. Inoltre, per un opportuno (cfr. Osservazione dopo l'enunciato) intervallo I contenente x_0, risulta che la funzione

$$u(x) = \Phi^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} h(t)\,dt\right),$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = h(x) f(u), \text{ in } I \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}.$$

OSSERVAZIONE

L'intervallo I dell'enunciato della Proposizione 2 si può definire nel modo seguente. Osserviamo innanzitutto che, poiché $\Phi(\eta_0) = 0$ e Φ è strettamente monotona e continua, si ha che $\Phi(J_0)$ è un intervallo aperto tale che $0 \in \Phi(J_0)$. Poniamo $H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\, dt$. Risulta $H \in C^0(J)$ (in realtà $H \in C^1(J)$) e $H(x_0) = 0$. Quindi esiste un intorno di x_0, tale che $U_{x_0} \subset J$ e tale che $H(U_{x_0}) \subset \Phi(J_0)$. A questo punto definiamo I come il più grande intervallo aperto tale che $U_{x_0} \subset I \subset H^{-1}(\Phi(J_0))$. Ad esempio se $h \equiv 1$, come nel caso della Proposizione 1 risulta $H(x) = x - x_0$ e, quindi, $H^{-1}(\Phi(J_0)) = x_0 + \Phi(J_0)$.

ESEMPIO 1

Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$u' = \frac{u^3}{2}. \tag{51}$$

1°) procedimento. Utilizziamo direttamente la Proposizione 1 tenendo conto delle osservazioni successive.

In questo caso $f(q) = \frac{q^3}{2}$ quindi $f \in C^1(\mathbb{R})$ e 0 è l'unico punto in cui f si annulla. Quindi una soluzione di (51) è la funzione identicamente nulla e un'altra qualsiasi soluzione u di (51) è o sempre positiva oppure sempre negativa. Pertanto, se in un punto x_0 si ha $u(x_0) > 0$ allora $u > 0$ e se $u(x_0) < 0$ allora $u < 0$. Consideriamo il primo caso. Poniamo $\eta_0 = u(x_0) > 0$. Abbiamo

$$\Phi(q) = \int_{\eta_0}^{q} \frac{2d\eta}{\eta^3} = -\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{\eta_0^2}\right), \quad q \in (0, +\infty)$$

e

$$u(x) = \Phi^{-1}(x - x_0) = \sqrt{\frac{\eta_0^2}{1 - \eta_0^2 (x - x_0)}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \eta_0^2 (x - x_0)}}, \quad \text{per } x \in I_0,$$

dove $I_0 = \left(-\infty, x_0 + \frac{1}{\eta_0^2}\right)$.

Se $u(x_0) < 0$, poniamo nuovamente $\eta_0 = u(x_0)$ e otteniamo

$$\Phi(q) = -\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{\eta_0^2}\right), \quad q \in (-\infty, 0),$$

$$u(x) = \Phi^{-1}(x - x_0) = -\sqrt{\frac{\eta_0^2}{1 - \eta_0^2 (x - x_0)}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \eta_0^2 (x - x_0)}}, \quad \text{per } x \in I_0.$$

2°) procedimento. Utilizziamo la strada (apparentemente) più sbrigativa esposta all'inizio. In questo caso la (42) si scrive

$$\int \frac{2du}{u^3} = \int dx$$

ovvero

$$-\frac{1}{u^2} = x + C,$$

dove C è una costante arbitraria. Pertanto

$$u^2(x) = -\frac{1}{x+C}. \tag{52}$$

Dalla (52) osserviamo subito che *non* ritroviamo la soluzione singolare $u = 0$ però troviamo tutte le altre soluzioni che sono date da

$$u = \sqrt{-\frac{1}{x+C}}, \quad \text{per } x \in (-\infty, -C)$$

e da

$$u = -\sqrt{-\frac{1}{x+C}}, \quad \text{per } x \in (-\infty, -C).$$

Il lettore rifletta sulla sostanziale equivalenza dei due procedimenti e tenga presente che se si adopera il secondo procedimento la prima cosa da fare è trovare le soluzioni singolari (nel nostro caso ce n'è solo una).

ESEMPIO 2

Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$u' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u}. \tag{53}$$

In questo caso $f(q) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{q}$ e 0 è l'unico punto in cui f si annulla quindi una soluzione di (53) è la funzione identicamente nulla, ma *non* possiamo asserire che le altre soluzioni di (53) non si annullino. Infatti, in questo caso, f non è localmente lipschitziana (il lettore verifichi, tenendo presente quanto già osservato in fondo al paragrafo 2.1). Per trovare l'integrale generale di (53) risolviamo

$$\frac{2}{3}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \int dx$$

ovvero

$$u^{2/3} = x + C,$$

dove C è una costante arbitraria. Da cui

$$u(x) = (x+C)^{3/2} \quad \text{oppure} \quad u(x) = -(x+C)^{3/2} \quad \text{per } x \geq -C.$$

Osserviamo che per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u} \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{54}$$

non vale l'unicità. Infatti sia $C \leq 0$ e consideriamo le funzioni $u_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$u_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -C \\ (x + C)^{3/2}, & \text{per } x \geq -C \end{cases}.$$

Si ha che (il lettore verifichi!) $u_C \in C^1(\mathbb{R})$, $u_C(0) = 0$ e $u_C' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u_C}$ quindi u_C è soluzione del problema di Cauchy (54) per ogni $C \leq 0$. Analogamente tutte le funzioni $\widetilde{u}_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$\widetilde{u}_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < -C \\ -(x + C)^{3/2}, & \text{per } x \geq -C \end{cases}$$

sono soluzioni del problema di Cauchy (54) per $C \leq 0$.

ESEMPIO 3

Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$u' = |u - 1|. \tag{55}$$

In questo caso $f(q) = |q - 1|$ e 1 è l'unico punto in cui f si annulla. Quindi una soluzione di (55) è la funzione costante 1. La funzione f è lipschitziana, infatti dalla disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|f(q_1) - f(q_2)| = ||q_1 - 1| - |q_2 - 1|| \leq |q_1 - q_2|, \quad \text{per ogni } q_1, q_2 \in \mathbb{R}.$$

Pertanto se u è una soluzione di (55) allora o (a) $u > 1$ oppure (b) $u < 1$. Nel caso (a) abbiamo che l'equazione (55) diventa

$$u' = u - 1,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine. Quindi

$$u(x) = Ce^x + 1, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

dove C è una costante arbitraria positiva. Nel caso (b) abbiamo

$$u' = -u + 1,$$

quindi

$$u(x) = Ce^{-x} + 1, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

dove C è una costante arbitraria negativa.

ESEMPIO 4

L'equazione differenziale

$$u'(t) = \beta u(t)(1 - u(t)), \tag{56}$$

con β numero positivo assegnato, è nota come *equazione logistica* (nella (56) la variabile t rappresenta il tempo). La (56) descrive un possibile andamento di un'epidemia in una comunità di N membri dei quali p siano infetti e $q = N - p$ siano sani. Indicando, rispettivamente, con $u = \frac{p}{N}$ e $v = \frac{q}{N}$ le percentuali degli infetti e dei sani, è ragionevole supporre che la velocità di diffusione dell'epidemia, $\frac{du}{dt}$, sia proporzionale al numero di contatti uv tra individui sani e individui malati. Poiché $v = 1 - u$, si ottiene la (56). Supponiamo che al tempo $t = 0$ la percentuale dei malati sia η_0 e studiamo come si evolve la malattia studiando il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \beta u (1-u) \\ u(0) = \eta_0 \end{cases} . \tag{57}$$

Qui considereremo solo il caso $\eta_0 \in [0,1]$ che è consistente col modello, ma il lettore studi anche gli altri casi. Se $\eta_0 = 0$ oppure $\eta_0 = 1$ allora il problema di Cauchy (57) ha come unica soluzione (il lettore giustifichi!) la funzione costante, 0 nel primo caso, 1 nel secondo. Se $\eta_0 \in (0,1)$ allora la soluzione di (57) deve soddisfare $0 < u < 1$. Possiamo quindi applicare la Proposizione 1 con $f(q) = \beta q (1-q)$, $J_0 = (0,1)$. Sia

$$\Phi(q) = \frac{1}{\beta} \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)}, \quad q \in (0,1).$$

Abbiamo

$$\Phi(q) = \frac{1}{\beta} \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} = \frac{1}{\beta} \int_{\eta_0}^{q} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{1-\eta} \right) d\eta =$$
$$= \frac{1}{\beta} \left\{ \log \frac{\eta}{1-\eta} - \log \frac{\eta_0}{1-\eta_0} \right\}.$$

quindi

$$u(t) = \frac{\eta_0 e^{\beta t}}{(1-\eta_0) + \eta_0 e^{\beta t}}.$$

ESEMPIO 5

Consideriamo l'equazione differenziale

$$u' = e^{-4u+u^2}. \tag{58}$$

Mostriamo che tutte le soluzioni di (58) sono definite su un intervallo limitato. In questo caso $f(q) = e^{-4q+q^2}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ e risulta $f > 0$. Sia u una soluzione di (58) e x_0 un punto del suo intervallo di definizione. Poniamo $u(x_0) = \eta_0$. Poiché i due limiti

$$\lim_{q \to +\infty} \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{e^{-4\eta+\eta^2}}, \quad \lim_{q \to -\infty} \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{e^{-4\eta+\eta^2}},$$

sono finiti (il lettore verifichi), l'intervallo di definizione di u deve essere limitato.

ESEMPIO 6

Determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u' = 2xe^{-u}. \tag{59}$$

La (59) è un'equazione a variabili separabili con $h(x) = x$, $f(q) = e^{-q}$. Per risolvere la (59) basta ricavare u dall'equazione

$$\int \frac{du}{e^{-u}} = \int 2x dx$$

il che equivale a ricavare u dall'equazione

$$e^u = x^2 + C, \tag{60}$$

dove C è una costante arbitraria. Da (60) si ottengono le soluzioni

$$u(x) = \log\left(x^2 + C\right).$$

Si osservi, in particolare, che se $C > 0$ le soluzioni sono definite in $\mathbb{R}$, inoltre considerando il caso $C \leq 0$, otteniamo le soluzioni $u : \left(\sqrt{-C}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ tali che $u(x) = \log\left(x^2 + C\right)$ e quelle del tipo $u : \left(-\infty, -\sqrt{-C}\right) \to \mathbb{R}$ tali che $u(x) = \log\left(x^2 + C\right)$.

ESERCIZI

1) Determinare tutte le soluzioni delle equazioni differenziali
(a) $u' = u^2\left(u^2 + 1\right)$;
(b) $u' = \sqrt{u^2 - 1}$;
(c) $u' = \sin x\sqrt{u^2 + 1}$;
(d) $u' = xu^2$.

2) Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy
(a) $\begin{cases} u' = u^2 + 2u + 2 \\ u(1) = 0 \end{cases}$;
(b) $\begin{cases} u' = u^2 + u \\ u(2) = -1 \end{cases}$;
(c) $\begin{cases} u' = u^3 + 2u^2 + 4u \\ u(0) = 1 \end{cases}$;
(d) $\begin{cases} u' = (e^u - 1)e^x \\ u(-1) = 1 \end{cases}$.

3.2 Equazioni di Bernoulli

Siano J un intervallo, $a, b \in C^0(J)$ e $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$. Un'equazione di Bernoulli è un'equazione differenziale del tipo

$$u' = a(x)u + b(x)u^\alpha. \tag{61}$$

Le equazioni del tipo (61) si possono trattare mediante la sostituzione

$$v = u^{1-\alpha}.$$

Infatti osserviamo che la (61) si può scrivere

$$u^{-\alpha} u' = a(x) u^{1-\alpha} + b(x),$$

ma $u^{-\alpha} u' = \frac{1}{1-\alpha} \left(u^{1-\alpha}\right)' = \frac{1}{1-\alpha} v'$, quindi

$$\frac{1}{1-\alpha} v' = a(x) v + b(x)$$

che è stata trattata nel paragrafo 1.2.

ESEMPIO 1
Troviamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$u' = u + xu^3. \tag{62}$$

La funzione nulla è soluzione di (62). Conviene anche qui osservare che, per il Teorema 1 del paragrafo 2.1, se u è una soluzione di (62) non identicamente nulla allora u non può annullarsi in nessun punto, quindi o $u > 0$ oppure $u < 0$. Infatti la funzione $F(x, q) = q + xq^2$ soddisfa le ipotesi del suddetto teorema.

Poniamo

$$v = u^{-2} \tag{63}$$

e abbiamo che la (62) si può scrivere

$$v' = -2v - 2x.$$

Ora, dalla (17) abbiamo che

$$v(x) = e^{A(x)} \int x e^{-A(x)} dx,$$

dove

$$A(x) = -2x.$$

Quindi

$$v(x) = e^{-2x} \int x e^{2x} dx = e^{-2x} \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + C e^{2x},$$

dove C è una costante arbitraria. A questo punto le soluzioni si trovano utilizzando la (63).

4 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Poiché l'argomento di questo paragrafo si comprende meglio se si fa ricorso alle funzioni a valori complessi, e in particolare all'esponenziale complesso, premettiamo ciò che ci occorre su questo argomento.

FUNZIONI A VALORI COMPLESSI

Sia $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione a valori complessi è una funzione tale che $f : J \to \mathbb{C}$. Ad esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x + ix^2$, $x \in \mathbb{R}$ è una funzione a valori complessi.

Sia $f : J \to \mathbb{C}$ e indichiamo con $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$. Quindi $f_1, f_2 : J \to \mathbb{R}$ e $f = f_1 + if_2$. Diremo che f è continua in un punto $x_0 \in J$ (nell'intervallo J) se f_1, f_2 sono entrambe continue in x_0 (nell'intervallo J). Analogamente, diremo che f è derivabile in un punto $x_0 \in J$ (nell'intervallo J) se f_1, f_2 sono entrambe derivabili in x_0 (nell'intervallo J) e porremo

$$Df(x_0) = Df_1(x_0) + iDf_2(x_0).$$

Con le definizioni che abbiamo dato si verifica facilmente che le regole di derivazione della somma, del prodotto e del quoziente sono ancora valide per funzioni a valori complessi. Inoltre vale il teorema della derivazione della funzione composta nella seguente forma se $g : J_1 \to \mathbb{R}$ (Nota Bene: g a valori reali) è derivabile in $x_0 \in J_1$, $g(J_1) \subset J$ e $f : J \to \mathbb{C}$ è derivabile in $y_0 = g(x_0)$ allora $f \circ g$ è derivabile in x_0 e si ha $D(f \circ g)(x_0) = f'(y_0)\, g'(x_0)$.

Diremo che $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se f_1, f_2 sono entrambe integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ e porremo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + i \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Naturalmente, per funzioni a valori complessi integrabili secondo Riemann si estendono facilmente le proprietà di linearità e additività dell'integrale, il Teorema fondamentale del calcolo ecc.

La seguente funzione a valori complessi risulterà molto utile in seguito:

$$e^{it} := E(t) = \cos t + i \sin t. \tag{64}$$

Si verifica facilmente che (il lettore verifichi!)

$$E(0) = 1,$$

$$E(t_1 + t_2) = E(t_1)\, E(t_2), \quad \text{per ogni } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

e

$$\overline{E(t)} = E(-t) = \frac{1}{E(t)}, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $E \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e
$$E'(t) = iE(t),$$
inoltre
$$\int E(t)\,dt = \frac{1}{i}E(t) + C,$$
dove $C \in \mathbb{C}$ è una costante arbitraria.

Da ora in avanti per indicare la funzione E utilizzeremo sempre la più comoda notazione e^{it} ma si tenga presente che la funzione e^{it} è definita dalla (64).

Se $z = \alpha + i\beta$ è un numero complesso, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ porremo (esponenziale complesso)
$$e^{z} = e^{\alpha}e^{i\beta}.$$
Si verifica facilmente che
$$e^{0} = 1,$$
$$e^{z+w} = e^{z}e^{w} \text{ per ogni } z, w \in \mathbb{C},$$
$$\overline{(e^{z})} = e^{\overline{z}}, \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$
Inoltre, la funzione
$$f(x) = e^{zx},$$
è derivabile infinite volte e si ha
$$f'(x) = ze^{zx}. \tag{65}$$
Verifichiamo (65)
$$De^{zx} = D\left(e^{\alpha x}e^{i\beta x}\right) = e^{i\beta x}D\left(e^{\alpha x}\right) + e^{\alpha x}D\left(e^{i\beta x}\right) = e^{i\beta x}\left(\alpha e^{\alpha x}\right) + e^{\alpha x}\left(i\beta e^{i\beta x}\right) = ze^{zx}.$$
Inoltre abbiamo che, se $z \neq 0$,
$$\int e^{zx}dx = \frac{e^{zx}}{z} + C,$$
dove $C \in \mathbb{C}$ è una costante arbitraria.

Ricordiamo infine che dalla definizione (64) si ha
$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Ora consideriamo le equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f \in C^{0}(\mathbb{R})$ (f a valori in $\mathbb{R}$). L'equazione
$$D^{2}u(x) + aDu(x) + bu(x) = f(x), \quad \text{per } x \in \mathbb{R}, \tag{66}$$
è detta equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Se $f \equiv 0$ l'equazione è detta omogenea. La funzione f è detta il termine noto

dell'equazione, mentre a e b sono chiamati i coefficienti dell'equazione (66). Qui studiamo il caso in cui f sia definita e continua su $\mathbb{R}$ al solo scopo di semplificare le notazioni, ma con lievi modifiche si ottengono risultati analoghi quando $f \in C^0(J)$, con J intervallo di $\mathbb{R}$.

Indichiamo con
$$P(D) = D^2 + aD + bI,$$
dove I è l'operatore identità, allora l'equazione (66) si può scrivere
$$P(D)u = f, \quad \text{per } x \in \mathbb{R}. \tag{67}$$
Osserviamo anche che
$$P(D) : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}), \quad P(D)u := D^2u + aDu + bu, \quad u \in C^2(\mathbb{R})$$
è un operatore lineare. Infatti, $P(D)u \in C^0(\mathbb{R})$ per ogni $u \in C^2(\mathbb{R})$, inoltre per ogni $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $P(D)(u+v) = P(D)u + P(D)v$ e $P(D)(\lambda u) = \lambda P(D)u$. Diremo che $P(D)$ è un operatore differenziale lineare di ordine 2 a coefficienti costanti.

Siamo interessati a trovare tutte le soluzioni a valori in $\mathbb{R}$ dell'equazione (67). A tale scopo cominciamo a ricordare che (cfr. paragrafo 1.3) per trovare tutte le soluzioni della (67) basta saper risolvere i due sottoproblemi seguenti:

(i) determinare il sottospazio $V_0 = \left\{u \in C^2(\mathbb{R}) \,|\, P(D)u = 0\right\}$, cioè determinare tutte le soluzioni dell'equazione
$$P(D)u = 0, \tag{68}$$
l'equazione (68) è detta l'equazione omogenea associata alla (67);

(ii) trovare una soluzione particolare $\widetilde{u}$ di (67).

Una volta risolti i problemi (i) e (ii) , indicando con V_f l'insieme di tutte le soluzioni di (67) abbiamo
$$V_f = \widetilde{u} + V_0.$$
In altre parole: una qualsiasi soluzione u di (67) è data dalla somma di una soluzione particolare della (67) e di una soluzione dell'equazione omogenea ad essa associata.

Soluzioni dell'equazione omogenea (68)

Se sostituiamo formalmente a D la variabile numerica ξ (e poniamo $D^0 = I$) otteniamo il polinomio di secondo grado
$$P(\xi) = \xi^2 + a\xi + b. \tag{69}$$
Il polinomio (69) è detto **polinomio caratteristico** dell'equazione differenziale (66) o dell'operatore $P(D)$.

Osserviamo che
$$P(D)\left(e^{\xi x}\right) = e^{\xi x} P(\xi). \tag{70}$$

Infatti

$$P(D)\left(e^{\xi x}\right) = D^2\left(e^{\xi x}\right) + aD\left(e^{\xi x}\right) + be^{\xi x} = \xi^2 e^{\xi x} + a\xi e^{\xi x} + be^{\xi x} = e^{\xi x} P\left(\xi\right).$$

Per quanto detto all'inizio di questo paragrafo la (70) vale anche se $\xi \in \mathbb{C}$. La (70) suggerisce che per trovare le soluzioni dell'equazione $P(D)u = 0$ basti trovare le radici del trinomio (69). Infatti se ξ è una tale radice dalla (70) si ha

$$P(D)(e^{\xi x}) = e^{\xi x} P(\xi) = 0. \tag{71}$$

In realtà riusciremo a determinare tutte le soluzioni dell'equazione $P(D)u = 0$.

Consideriamo il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea (68)

$$P(\xi) = \xi^2 + a\xi + b$$

e consideriamo l'equazione, detta **equazione caratteristica** (dell'equazione (66) o dell'operatore $P(D)$)

$$P(\xi) = 0 \tag{72}$$

e siano ξ_1, ξ_2 le due radici (non necessariamente distinte) reali o complesse coniugate di (72). Abbiamo

$$P(\xi) = \left(\xi - \xi_2\right)\left(\xi - \xi_1\right)$$

e anche

$$P(D)u = \left(D - I\xi_2\right)\left(\left(D - I\xi_1\right)u\right), \quad \text{per ogni } u \in C^2\left(\mathbb{R}\right). \tag{73}$$

Verifichiamo la (73). Sia $u \in C^2\left(\mathbb{R}\right)$. Abbiamo (ricordando che $a = -\left(\xi_1 + \xi_2\right)$ e $b = \xi_1 \xi_2$)

$$\left(D - I\xi_2\right)\left(\left(D - I\xi_1\right)u\right) = \left(D - I\xi_2\right)\left(Du - \xi_1 u\right) = D\left(Du - \xi_1 u\right) - \xi_2\left(Du - \xi_1 u\right) =$$

$$= D^2 u - \left(\xi_1 + \xi_2\right)Du + \xi_1\xi_2 u = D^2 u + aDu + bu = P(D)u.$$

Osserviamo anche che

$$\left(D - I\xi_1\right)u = e^{\xi_1 x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)$$

e

$$\begin{aligned}\left(D - I\xi_2\right)\left(D - I\xi_1\right)u &= \left(D - I\xi_2\right)\left(e^{\xi_1 x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)\right) = \\ &= e^{\xi_2 x} D\left(e^{\xi_1 x} e^{-\xi_2 x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)\right) = e^{\xi_2 x} D\left(e^{\left(\xi_1 - \xi_2\right)x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)\right).\end{aligned}$$

In definitiva, abbiamo dimostrato la seguente

PROPOSIZIONE 1
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e

$$P(D) = D^2 + aD + bI$$

allora

$$P(D)u = e^{\xi_2 x} D\left(e^{(\xi_1 - \xi_2)x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)\right), \quad \text{per ogni } u \in C^2(\mathbb{R}) \tag{74}$$

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 1

Siano ξ_1, ξ_2 le due radici reali o complesse coniugate di (72). Poniamo $\Delta = a^2 - 4b$.

(a) Se $\Delta > 0$, allora tutte le soluzioni di

$$P(D)u = 0, \tag{75}$$

sono date da

$$u(x) = C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x}, \tag{76}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(b) Se $\Delta = 0$, allora tutte le soluzioni della (75) sono date da

$$u(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\xi_1 x}, \tag{77}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(c) Se $\Delta < 0$, siano $\xi_1 = \alpha + i\beta$, $\xi_2 = \alpha - i\beta$ le radici complesse coniugate di (72) allora tutte le soluzioni della (75) sono date da

$$u(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x}, \tag{78}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

Dimostrazione

Dalla (74) abbiamo che l'equazione $P(D)u = 0$ è equivalente all'equazione

$$e^{\xi_2 x} D\left(e^{(\xi_1 - \xi_2)x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)\right) = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}$$

che, a sua volta, è equivalente a

$$D\left(e^{(\xi_1 - \xi_2)x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)\right) = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Quindi, poiché la derivata di $e^{(\xi_1 - \xi_2)x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right)$ è nulla in $\mathbb{R}$, abbiamo $e^{(\xi_1 - \xi_2)x} D\left(e^{-\xi_1 x} u\right) = K_1$, in $\mathbb{R}$, dove $K_1 \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Pertanto

$$D\left(e^{-\xi_1 x} u\right) = K_1 e^{(\xi_2 - \xi_1)x}, \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Perciò

$$e^{-\xi_1 x} u(x) = K_1 \int e^{(\xi_2 - \xi_1)x} dx,$$

da cui segue

$$u(x) = K_1 e^{\xi_1 x} \int e^{(\xi_2 - \xi_1)x} dx. \tag{79}$$

(a) Ora, se $\Delta > 0$ allora $\xi_1 \neq \xi_2$ e la (79) fornisce

$$u(x) = K_1 e^{\xi_1 x} \left(K_2 + \frac{e^{(\xi_2 - \xi_1)x}}{\xi_2 - \xi_1} \right) = K_1 K_2 e^{\xi_1 x} + \frac{K_1}{\xi_2 - \xi_1} e^{\xi_2 x}, \tag{80}$$

dove $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie. Per l'arbitrarietà di $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ la (a) risulta dimostrata.
(b) Se $\Delta = 0$ allora $\xi_1 = \xi_2$ e la (79) fornisce

$$u(x) = K_1 e^{\xi_1 x} (K_2 + x) = (K_1 K_2 + K_1 x) e^{\xi_1 x}$$

dove $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie. Nuovamente, per l'arbitrarietà di $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, la (b) risulta dimostrata.
(c) Nel caso in cui $\Delta < 0$, l'equazione $P(\xi) = 0$ ha due radici complesse coniugate. In questo caso si giunge nuovamente alla formula (76), con C_1 e C_2 costanti arbitrarie **complesse**. Ma noi siamo interessati a determinare tutte le **soluzioni reali** di $P(D)u = 0$. Siano $C_1 = \lambda_1 + i\mu_1$ $C_2 = \lambda_2 + i\mu_2$ con $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$u(x) = C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x} = \left((C_1 + C_2) \cos \beta x + i (C_1 - C_2) \sin \beta x \right) e^{\alpha x} \tag{81}$$

e

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) + i(\mu_1 + \mu_2) \\ i(C_1 - C_2) = -(\mu_1 - \mu_2) + i(\lambda_1 - \lambda_2) \end{cases}.$$

Affinché u sia una funzione a valori in $\mathbb{R}$ deve accadere che

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

e con queste condizioni si ha da (81)

$$u(x) = (2\lambda_2 \cos \beta x + 2\mu_2 \sin \beta x) e^{\alpha x},$$

dove λ_2, μ_2 sono costanti reali arbitrarie. E quindi anche la (c) è dimostrata.$\square$

OSSERVAZIONE 1

Il Teorema predente consente di dimostrare che il seguente problema ha una ed una sola soluzione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e siano $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$. Si è interessati a determinare $u \in C^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} u'' + au' + bu = 0, \quad \text{in } \mathbb{R} \\ u(x_0) = \eta_0 \\ u'(x_0) = \eta_1 \end{cases}. \tag{82}$$

Il problema (82) è chiamato *problema di Cauchy per l'equazione* $u''+au'+bu=0$ le condizioni $u(x_0)=\eta_0$ e $u'(x_0)=\eta_1$ sono chiamate *condizioni iniziali* del problema di Cauchy, inoltre x_0 e i numeri η_0 e η_1 sono chiamati, rispettivamente, il *punto iniziale* e *i valori iniziali* del problema di Cauchy. Mostriamo quanto asserito nel caso (a) (in cui $a^2-4b>0$). Dobbiamo quindi trovare le soluzioni di (82) tra le funzioni del tipo $C_1e^{\xi_1 x}+C_2e^{\xi_2 x}$ con $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. Le condizioni iniziali conducono a

$$\begin{cases} C_1e^{\xi_1 x_0}+C_2e^{\xi_2 x_0}=\eta_0 \\ C_1\xi_1e^{\xi_1 x_0}+C_2\xi_2e^{\xi_2 x_0}=\eta_1 \end{cases}. \tag{83}$$

Applichiamo la regola di Cramer per determinare C_1,C_2.

Abbiamo che

$$\det\begin{pmatrix} e^{\xi_1 x_0} & e^{\xi_2 x_0} \\ \xi_1e^{\xi_1 x_0} & \xi_2e^{\xi_2 x_0} \end{pmatrix}=e^{(\xi_1+\xi_2)x_0}(\xi_2-\xi_1)\neq 0.$$

Quindi il sistema (83) ammette una e una sola soluzione data da

$$C_1=\frac{\det\begin{pmatrix} \eta_0 & e^{\xi_2 x_0} \\ \eta_1 & \xi_2e^{\xi_2 x_0} \end{pmatrix}}{e^{(\xi_1+\xi_2)x_0}(\xi_2-\xi_1)}=\frac{(\eta_0\xi_2-\eta_1)e^{-\xi_1 x_0}}{\xi_2-\xi_1},$$

$$C_2=\frac{\det\begin{pmatrix} e^{\xi_1 x_0} & \eta_0 \\ \xi_1e^{\xi_1 x_0} & \eta_1 \end{pmatrix}}{e^{(\xi_1+\xi_2)x_0}(\xi_2-\xi_1)}=\frac{(\eta_1-\eta_0\xi_1)e^{-\xi_2 x_0}}{\xi_2-\xi_1}.$$

Pertanto l'unica soluzione del problema di Cauchy (82) è fornita da

$$u(x)=\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left((\eta_0\xi_2-\eta_1)e^{(x-x_0)\xi_1}+(\eta_1-\eta_0\xi_1)e^{(x-x_0)\xi_2}\right).$$

In modo analogo si verifica che nei casi (b) e (c) il problema di Cauchy (82) ammette una e una sola soluzione.

Soluzioni dell'equazione non omogenea (67)

Ora affrontiamo il problema (ii) ovvero troviamo una soluzione particolare $\widetilde{u}$ dell'equazione $P(D)u=f$ con $f\in C^0(\mathbb{R})$. Quando f è di tipo particolare questo problema può essere risolto anche con metodi "ad hoc", rinviamo al libro di testo (n. 2 del paragrafo 17.3.2) per una trattazione più estesa dell'argomento.Qui ci limitiamo al caso $f(x)=e^{\lambda x}$ e $P(\lambda)\neq 0$. In questo caso cerchiamo soluzioni della forma $\widetilde{u}(x)=Ke^{\lambda x}$ con K parametro da determinare. A tale scopo basta richiedere che

$$Ke^{\lambda x}P(\lambda)=P(D)\widetilde{u}=e^{\lambda x}$$

e abbiamo

$$K=\frac{1}{P(\lambda)}.$$

Utilizzando l'identità (74) possiamo facilmente trovare delle formule per $\widetilde{u}$ per ogni tipo di termine noto (purché in $C^0(\mathbb{R})$). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato e cerchiamo una soluzione particolare $\widetilde{u}$ tale che

$$\widetilde{u}\,(x_0) = D\widetilde{u}\,(x_0) = 0. \tag{84}$$

Dalla (74) abbiamo che $\widetilde{u}$ deve soddisfare

$$D\left(e^{(\xi_1-\xi_2)x} D\left(e^{-\xi_1 x}\widetilde{u}\right)\right) = e^{-\xi_2 x} f(x),$$

da cui, integrando

$$e^{(\xi_1-\xi_2)t} D\left(e^{-\xi_1 t}\widetilde{u}\right)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \int_{x_0}^{x} D\left(e^{(\xi_1-\xi_2)t} D\left(e^{-\xi_1 t}\widetilde{u}\right)\right) dt = \int_{x_0}^{x} e^{-\xi_2 t} f(t)dt,$$

ricordando la (84), abbiamo

$$D\left(e^{-\xi_1 x}\widetilde{u}\right) = e^{-(\xi_1-\xi_2)x} \int_{x_0}^{x} e^{-\xi_2 t} f(t)dt$$

e, integrando di nuovo, abbiamo

$$\widetilde{u}\,(x) = e^{\xi_1 x} \int_{x_0}^{x} \left(e^{-(\xi_1-\xi_2)t} \int_{x_0}^{t} e^{-\xi_2 s} f(s)ds\right) dt. \tag{85}$$

Semplifichiamo un po' il secondo membro di (85). Consideriamo prima il caso $\xi_1 \neq \xi_2$. Integrando per parti abbiamo

$$e^{\xi_1 x} \int_{x_0}^{x} \left(e^{-(\xi_1-\xi_2)t} \int_{x_0}^{t} e^{-\xi_2 s} f(s)ds\right) dt = e^{\xi_1 x} \int_{x_0}^{x} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-(\xi_1-\xi_2)t}}{-(\xi_1-\xi_2)}\right) \int_{x_0}^{t} e^{-\xi_2 s} f(s)ds\right] dt =$$

$$= \frac{e^{\xi_1 x}}{\xi_2-\xi_1} \left(e^{-(\xi_1-\xi_2)x} \int_{x_0}^{x} e^{-\xi_2 t} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} e^{-(\xi_1-\xi_2)t} e^{-\xi_2 t} f(t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\xi_2-\xi_1} \left(e^{\xi_2 x} \int_{x_0}^{x} e^{-\xi_2 t} f(t)dt - e^{\xi_1 x} \int_{x_0}^{x} e^{-\xi_1 t} f(t)dt\right) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{\xi_1(x-t)} - e^{\xi_2(x-t)}}{\xi_1-\xi_2}\right) f(t)dt.$$

In definitiva nel caso $\xi_1 \neq \xi_2$ abbiamo

$$\widetilde{u}\,(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{\xi_1(x-t)} - e^{\xi_2(x-t)}}{\xi_1-\xi_2}\right) f(t)dt. \tag{86}$$

Nel caso $\xi_1 = \xi_2$ si può procedere in modo analogo e si ha

$$\widetilde{u}\,(x) = \int_{x_0}^{x} (x-t)\, e^{\xi_1(x-t)} f(t)dt. \tag{87}$$

Osserviamo che nel caso in cui ξ_1, ξ_2 siano radici complesse coniugate, siano esse $\xi_1 = \alpha + i\beta$, $\xi_2 = \alpha - i\beta$, la formula (86) fornisce

$$\widetilde{u}\,(x) = \frac{1}{\beta} \int_{x_0}^{x} \left(e^{\alpha(x-t)} \sin\beta\,(x-t)\right) f(t)dt. \tag{88}$$

Mettendo insieme il Teorema 1 e quanto stabilito per le soluzioni particolari per l'equazione non omogenea abbiamo il seguente

TEOREMA 2

Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ e siano ξ_1, ξ_2 le due radici reali o complesse di (72). Poniamo $\Delta = a^2 - 4b$.

(a) Se $\Delta > 0$, allora tutte le soluzioni di

$$P(D)u = f \tag{89}$$

sono date da

$$u(x) = C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{\xi_1 (x-t)} - e^{\xi_2 (x-t)}}{\xi_1 - \xi_2} \right) f(t)dt, \tag{90}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(b) Se $\Delta = 0$, allora tutte le soluzioni della (89) sono date da

$$u(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\xi_1 x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, e^{\xi_1 (x-t)} f(t)dt, \tag{91}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(c) Se $\Delta < 0$, siano $\xi_1 = \alpha + i\beta$, $\xi_2 = \alpha - i\beta$ le radici complesse coniugate di (72), allora tutte le soluzioni della (89) sono date da

$$u(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x} + \frac{1}{\beta} \int_{x_0}^{x} \left(e^{\alpha (x-t)} \sin \beta (x-t) \right) f(t)dt, \tag{92}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

OSSERVAZIONE 2

In modo analogo a quanto mostrato nell'osservazione 1 si può dimostrare, utilizzando il Teorema 2, che il problema di Cauchy per l'equazione non omogenea ammette una ed una sola soluzione. Più precisamente sia $f \in C^0(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e siano $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$, esiste una sola $u \in C^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} u'' + au' + bu = f, \quad \text{in } \mathbb{R} \\ u(x_0) = \eta_0 \\ u'(x_0) = \eta_1 \end{cases}.$$

Inoltre è possibile determinare esplicitamente tale soluzione.

ESEMPIO 1

Vogliamo determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$u'' + u = |x-1|. \tag{93}$$

Consideriamo l'equazione caratteristica

$$\xi^2 + 1 = 0,$$

le cui radici sono date da $i, -i$. Perciò tutte le soluzioni a valori reali della (93) sono date da

$$C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{94}$$

Ora troviamo una soluzione particolare della (93). Dalla formula (88) abbiamo

$$\widetilde{u}(x) = \int_1^x |t-1| \sin(x-t)\, dt. \tag{95}$$

Calcoliamo l'integrale (95). Abbiamo, per $x \geq 1$

$$\widetilde{u}(x) = \int_1^x |t-1| \sin(x-t)\, dt = \int_1^x (t-1)\sin(x-t)\, dt = \int_1^x (t-1)\frac{d}{dt}(\cos(x-t))\, dt =$$

$$= (x-1) - \int_1^x \cos(x-t)\, dt = (x-1) + \left(\sin(x-t)|_{t=1}^{t=x}\right) = (x-1) - \sin(x-1)$$

e, analogamente, per $x < 1$

$$\widetilde{u}(x) = \int_1^x |t-1| \sin(x-t)\, dt = -(x-1) + \sin(x-1).$$

In definitiva

$$\widetilde{u}(x) = |x-1| - \sin|x-1|.$$

Quindi tutte le soluzioni di (93) sono date da

$$|x-1| - \sin|x-1| + C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO 2

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - u = \sinh x, \quad \text{in } \mathbb{R} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}. \tag{96}$$

Prima di tutto troviamo tutte le soluzioni dell'equazione

$$u'' - u = \sinh x, \quad \text{in } \mathbb{R} \tag{97}$$

e, a tale scopo, consideriamo le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$u'' - u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}. \tag{98}$$

Il polinomio caratteristico è $\xi^2 - 1$ le cui radici sono $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = -1$. Quindi le soluzioni di (96) sono date da

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Per trovare una soluzione particolare possiamo adoperare la formula (86) (il lettore adoperi anche il "metodo ad hoc"). Poiché $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ possiamo determinare una soluzione particolare quando il termine noto è e^x e e^{-x} e successivamente, indicate con $\widetilde{u}_1$ e $\widetilde{u}_2$ rispettivamente le soluzioni ottenute, dal principio di sovrapposizione si ha che

$$\widetilde{u} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2\right).$$

Applichiamo la formula (86) quando $f(x) = e^x$. Abbiamo

$$\widetilde{u}_1(x) = \int_0^x \left(\frac{e^{(x-t)} - e^{-(x-t)}}{2}\right) e^t dt = \frac{1}{2}\left\{e^x \int_0^x dt + e^{-x}\int_0^x e^{2t} dt\right\} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

Applichiamo la (86) quando $f(x) = e^{-x}$. Otteniamo

$$\widetilde{u}_2(x) = \int_0^x \left(\frac{e^{(x-t)} - e^{-(x-t)}}{2}\right) e^{-t} dt = \frac{1}{2}\left\{e^x \int_0^x e^{-2t} dt + e^{-x}\int_0^x dt\right\} = \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right) + \frac{1}{2}xe^{-x}.$$

Perciò

$$\widetilde{u}(x) = \frac{x}{2}\cosh x.$$

Quindi le soluzioni di (97) sono date da

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2}\cosh x, \tag{99}$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy basta richiedere che

$$\begin{cases} \left(C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2}\cosh x\right)_{|x=0} = 0 \\ D\left(C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2}\cosh x\right)_{|x=0} = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Quindi $C_1 = -\frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$ e l'unica soluzione di (96) è data da

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(-\sinh x + x\cosh x\right).$$

ESERCIZI

1) Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

(a) $u'' + u' + u = 0$;

(b) $u'' - 2u' + u = 0$;

(c) $u'' - 4u = 0$;

(d) $u'' - 3u' = 0$;

(e) $u'' - 5u' + 6u = 0$;

(f) $u'' = 0$;

(g) $u'' = \sqrt[3]{x}$;

(h) $u'' + u = e^x$;
(i) $u'' - u = e^x + 4x$;
(l) $u'' - 3u' + 2u = e^x + x - 2x^2$;
(m) $u'' + 4u = \cos 2x$;
(n) $u'' - u = \max\{x, 0\}$;
(o) $u'' - 5u = xe^x$.

2) Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} u'' = 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} u'' = \arctan x + e^{-x} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} u'' + 4u' + 3u = 0 \\ u(1) = 1 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} u'' + 2u' + 4u = 2^x \\ u(-1) = -2 \\ u'(-1) = 1 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} u'' + u = \sin x \\ u(\pi) = 0 \\ u'(\pi) = 0 \end{cases}$;

(f) $\begin{cases} u'' + 4u' = 2e^{|x|} \\ u(1) = 0 \\ u'(1) = 1 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} u'' + 4u' + 3u = -x \\ u(3) = 1 \\ u'(3) = -2 \end{cases}$;

3) Determinare tutti valori di $k \in \mathbb{R}$ tali l'equazione differenziale

$$u'' + 2u' + ku = 0$$

ammetta soluzioni non identicamente nulle che soddisfino la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0.$$

4) Stabilire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + u' + 3u = 0 \\ u(1) = k + |k| \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

sia la funzione identicamente nulla. Se esistono, determinarli.

5 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti variabili

Consideriamo il caso di equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti variabili.

Sia J un intervallo e $a, b, f \in C^0(J)$. L'equazione

$$u'' + au' + bu = f, \quad \text{in } J, \tag{100}$$

è detta equazioni differenziale lineare del secondo ordine (a coefficienti variabili). Le funzioni a, b sono chiamati i coefficienti dell'equazione (100), mentre f è detto il termine noto dell'equazione (100). Una soluzione di (100) è una qualsiasi funzione $u \in C^2(J)$ tale che

$$u''(x) + a(x)\,u'(x) + b(x)\,u(x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in J.$$

Si osservi che l'operatore

$$P : C^2(J) \to C^0(J), \quad Pu = u'' + au' + bu, \quad u \in C^2(J) \tag{101}$$

è lineare.

Il problema di Cauchy per l'equazione (100), si formula nel seguente modo. Sia $x_0 \in J$ e siano $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$. Si è interessati a determinare $u \in C^2(J)$ tale che

$$\begin{cases} Pu = f, \quad \text{in } J \\ u(x_0) = \eta_0 \\ u'(x_0) = \eta_1 \end{cases}, \tag{102}$$

le condizioni $u(x_0) = \eta_0$ e $u'(x_0) = \eta_1$ sono chiamate *condizioni iniziali* del problema di Cauchy, inoltre x_0 e i numeri η_0 e η_1 sono chiamati, rispettivamente, il *punto iniziale* e *i valori iniziali* del problema di Cauchy. Vale il seguente teorema

TEOREMA 1 (esistenza e unicità per e.d.o. lineari del secondo ordine)
Sia J un intervallo e $a, b, f \in C^0(J)$. Allora il problema di Cauchy (102) ha una ed una sola soluzione $u \in C^2(J)$.

A differenza delle equazioni del primo ordine a coefficienti variabili e alle equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti, nel caso delle equazioni del tipo (100) le soluzioni raramente possono essere trovate in forma esplicita. Proprio per questo motivo risulta utile disporre di alcune proprietà generali per le equazioni del tipo (100).

Poiché P è un operatore lineare possiamo avvalerci di quanto osservato nel paragrafo 1.3, quindi per trovare tutte le soluzioni della (100) basta saper risolvere i due seguenti sottoproblemi:

(i) Determinare il sottospazio $V_0 = \{u \in C^2(J) \,|\, Pu = 0\}$, cioè risolvere l'equazione omogenea associata alla (100), ovvero l'equazione

$$Pu = 0,$$

(ii) Trovare una soluzione particolare $\widetilde{u}$ di (100);
dopo di che, indicando con V_f l'insieme di tutte le soluzioni di (100) avremo

$$V_f = \widetilde{u} + V_0.$$

In altre parole, una qualsiasi soluzione u di (100) è data dalla somma di una soluzione particolare della (100) e di una soluzione dell'equazione omogenea associata.

Nello studio della (100) un ruolo importante è svolto dal wronskiano che si definisce come segue. Il wronskiano di $u_1, u_2 \in C^1(J)$ è l'espressione

$$W[u_1, u_2] = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2. \tag{103}$$

Ad esempio il wronskiano delle due funzioni $u_1(x) = x$, $u_2(x) = \cos x$ è la funzione

$$\det \begin{pmatrix} x & \cos x \\ 1 & -\sin x \end{pmatrix} = -x \sin x - \cos x.$$

PROPOSIZIONE 2
Siano $u_1, u_2 \in C^2(J)$ soluzioni dell'equazione omogenea

$$u'' + a(x) u' + b(x) u = 0, \quad \text{in } J \tag{104}$$

allora, posto $w = W[u_1, u_2]$, risulta $w \in C^1(J)$ e

$$w' + aw = 0, \quad \text{in } J. \tag{105}$$

Dimostrazione
Abbiamo

$$w' = (u_1 u_2'' + u' u_2') - (u_1'' u_2 + u' u_2') = u_1 u_2'' - u_1'' u_2. \tag{106}$$

D'altra parte, poiché u_1 e u_2 sono soluzioni dell'equazione (104) abbiamo

$$u_1'' = -a u_1' - b u_1 \quad \text{e} \quad u_2'' = -a u_2' - b u_2$$

e, ricordando (106), abbiamo

$$w' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2 = u_1(-a u_2' - b u_2) - u_2(-a u_1' - b u_1) = -a(u_1 u_2' - u_1' u_2) = -aw,$$

da cui segue la (105).□

OSSERVAZIONE

Sia $x_0 \in J$. Se u_1 e u_2 sono soluzioni dell'equazione (104) allora, posto $w = W[u_1, u_2]$, si ha

$$(w(x) = 0 \text{ per ogni } x \in J) \Longleftrightarrow (w(x_0) = 0). \tag{107}$$

L'implicazione "$\Rightarrow$" è banale. L'implicazione "$\Leftarrow$" segue dal fatto che w è soluzione di $w\prime + aw = 0$ in J e, quindi (cfr. paragrafo 1.2), se $w(x_0) = 0$ allora $w(x) = 0$ per ogni $x \in J$.

Ricordiamo che due funzioni u, v sono *linearmente indipendenti* se accade che la relazione

$$C_1 u(x) + C_2 v(x) = 0, \text{ per ogni } x \in J,$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, è soddisfatta se e solo se $C_1 = C_2 = 0$.

Abbiamo la seguente

PROPOSIZIONE 3

Siano $u_1, u_2 \in C^2(J)$ soluzioni dell'equazione omogenea

$$u'' + a(x)u' + b(x)u = 0, \quad \text{in } J.$$

Sia $x_0 \in J$. Sono equivalenti

(i) u_1, u_2 linearmente indipendenti,

(ii) $W[u_1, u_2]$ è diverso da zero in x_0.

Dimostrazione

Supponiamo che valga (i). Procediamo per assurdo. Supponiamo che $W[u_1, u_2]$ si annulli in x_0 allora esistono C_1 e C_2 non entrambe nulle tali che

$$\begin{cases} C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) = 0, \\ C_1 u_1'(x_0) + C_2 u_2'(x_0) = 0 \end{cases}. \tag{108}$$

Sia ora

$$v = C_1 u_1 + C_2 u_2,$$

da (108) abbiamo che $v(x_0) = v'(x_0) = 0$ e inoltre $v'' + av' + bv = 0$, in J. In definitiva, v sarebbe soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'' + av' + bv = 0, \quad \text{in } J \\ v(x_0) = 0 \\ v'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e dal Teorema 1 seguirebbe

$$v(x) = 0, \quad \text{per ogni } x \in J.$$

Avremmo pertanto provato che esistono C_1 e C_2 non entrambe nulle tali che $C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0$, in J, ma ciò contraddice (i).

Supponiamo che valga (ii) e dimostriamo che u_1, u_2 sono linearmente indipendenti. Siano C_1 e C_2 tali che

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0, \quad \text{in } J, \tag{109}$$

mostriamo che $C_1 = C_2 = 0$. A tale scopo osserviamo che dalla (109) segue

$$C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) = 0.$$

Derivando ambo i membri di (109) e calcolando la derivata ottenuta in x_0 abbiamo

$$C_1 u_1'(x_0) + C_2 u_2'(x_0) = 0.$$

In definitiva abbiamo che

$$\begin{cases} C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) = 0, \\ C_1 u_1'(x_0) + C_2 u_2'(x_0) = 0, \end{cases}$$

e, dalla (ii) sappiamo che

$$\det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

da cui segue $C_1 = C_2 = 0$.

OSSERVAZIONI

1) Dalla dimostrazione della Proposizione 3 si comprende che per avere l'implicazione (ii)$\Rightarrow$(i) non occorre che u_1, u_2 siano soluzioni dell'equazione omogenea. Al contrario, l'implicazione (i)$\Rightarrow$(ii) in generale non è valida se u_1, u_2 non sono soluzioni di un'equazione omogenea. Ad esempio, siano u, v le seguenti funzioni $u(x) = x^3$, $v(x) = x^3 sgn(x)$. Si ha $W[u,v]_{|x=0} = 0$, tuttavia u, v sono linearmente indipendenti. Infatti siano C_1 e C_2 tali che

$$C_1 u(x) + C_2 v(x) = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}$$

ovvero, tali che

$$(C_1 + C_2 sgn(x))\, x^3 = 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{110}$$

Poniamo in (110) $x = 1$ e $x = -1$, otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases},$$

da cui $C_1 = C_2 = 0$. Quindi u e v sono linearmente indipendenti, ma non esiste un'equazione omogenea di cui u e v siano entrambe soluzioni.

2) Nel caso di equazioni a **coefficienti costanti** utilizzando il wronskiano si può verificare che

(a) se $a^2 - 4b > 0$ indicate con ξ_1, ξ_2 le radici reali distinte dell'equazione

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0, \tag{111}$$

le funzioni $e^{\xi_1 x}, e^{\xi_2 x}$ sono linearmente indipendenti;

(b) se $a^2 - 4b = 0$ indicata con ξ_1 la radice doppia di (111), le funzioni $e^{\xi_1 x}, xe^{\xi_1 x}$ sono linearmente indipendenti;

(c) se $a^2 - 4b < 0$ indicate con $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ le radici complesse coniugate di (111) $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, le funzioni $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ sono linearmente indipendenti.

TEOREMA 4

Siano $a, b \in C^0(J)$ e sia

$$Pu = u'' + au' + bu$$

Il sottospazio $V_0 = \left\{u \in C^2(J) \,|\, Pu = 0\right\}$ ha dimensione 2 ovvero esistono due soluzioni, u_1, u_2, dell'equazione omogenea

$$Pu = 0, \quad \text{in } J \tag{112}$$

linearmente indipendenti tali che per ogni soluzione u di (112) esistono due costanti C_1 e C_2 per le quali si abbia

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 \ , \quad \text{in } J. \tag{113}$$

Dimostrazione

Sia $x_0 \in J$. Dal Teorema 1 abbiamo che esistono $u_1, u_2 \in C^2(J)$ soluzioni, rispettivamente, dei due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} Pu_1 = 0, \ \text{in } J \\ u_1(x_0) = 1, \\ u_1'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{114}$$

e

$$\begin{cases} Pu_2 = 0, \ \text{in } J \\ u_2(x_0) = 0, \\ u_2'(x_0) = 1 \end{cases} . \tag{115}$$

Dimostriamo che $\{u_1, u_2\}$ è una base di V_0.

Innanzitutto dalla Proposizione 3 abbiamo che u_1, u_2 sono linearmente indipendenti.

Infatti

$$\det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ora sia $u \in V_0$ e dimostriamo che esistono C_1, C_2 tali che

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x), \qquad \text{per ogni } x \in J. \tag{116}$$

A tale scopo sarà sufficiente verificare che

$$u(x) = u(x_0) u_1(x) + u'(x_0) u_2(x), \text{ per ogni } x \in J,$$

in tale modo otterremo la (116) con $C_1 = u(x_0)$ e $C_2 = u'(x_0)$.

Per dimostrare quanto asserito poniamo

$$v(x) = u(x_0)u_1(x) + u'(x_0)u_2(x)$$

e, osserviamo che da (114) e (115) abbiamo

$$v(x_0) = u(x_0)u_1(x_0) + u'(x_0)u_2(x_0) = u(x_0)$$

e

$$v'(x_0) = (u(x_0)u_1'(x) + u'(x_0)u_2'(x))_{|x=x_0} = u'(x_0).$$

Inoltre

$$Pv = u(x_0)Pu_1 + u'(x_0)Pu_2 = 0.$$

In definitiva v soddisfa a

$$\begin{cases} Pv = 0, \text{ in } J \\ v(x_0) = u(x_0) \\ v'(x_0) = u'(x_0) \end{cases},$$

ma anche u soddisfa alle stesse condizioni della v ($Pu = 0$ e, banalmente, $u(x_0) = u(x_0)$ e $u'(x_0) = u'(x_0)$) Perciò per il Teorema 1 abbiamo $u = v$ in J e ciò prova la (116).

Concludendo abbiamo dimostrato che $u_1, u_2 \in V_0$ sono linearmente indipendenti e generano tutto lo spazio V_0, quindi $\{u_1, u_2\}$ è una base di V_0 e pertanto V_0 ha dimensione 2.

Ora ritorniamo all'equazione non omogenea

$$u'' + au' + bu = f, \quad \text{in } J. \tag{117}$$

Vediamo come si può costruire una soluzione particolare di (117) a partire da due soluzioni linearmente indipendenti, u_1, u_2, dell'equazione omogenea $u'' + au' + bu = 0$. Il metodo che presentiamo è detto **metodo della variazione delle costanti arbitrarie**.

Siano u_1, u_2 soluzioni linearmente dell'equazione omogenea

$$u'' + au' + bu = 0. \tag{118}$$

Cerchiamo una soluzione v di (117) del tipo

$$v(x) = \varphi(x)\, u_1(x) + \psi(x)\, u_2(x), \tag{119}$$

dove $\varphi, \psi \in C^2(J)$ sono due funzioni da trovare e sulle quali richiediamo anche che

$$\varphi'(x)\, u_1(x) + \psi'(x)\, u_2(x) = 0, \quad \text{per ogni } x \in J. \tag{120}$$

Calcoliamo le derivate di v. Abbiamo

$$v' = \varphi u_1' + \varphi' u_1 + \psi u_2' + \psi' u_2 \tag{121}$$

e, tenendo conto di (120) abbiamo

$$v' = \varphi u_1' + \psi u_2'.$$

Derivando ulteriormente otteniamo

$$v'' = \varphi u_1'' + \varphi' u_1' + \psi u_2'' + \psi' u_2'. \tag{122}$$

Da (119), (121) e (122) otteniamo (tenendo conto del fatto che u_1, u_2 sono soluzioni dell'equazione (118))

$$v''+av'+bv = \varphi\left(u_1'' + au_1' + bu_1\right)+\left(\varphi' u_1' + \psi' u_2'\right)+\psi\left(u_2'' + au_2' + bu_2\right) = \varphi' u_1'+\psi' u_2'.$$

Perciò, affinché v sia soluzione di (117) basterà richiedere che

$$\varphi' u_1' + \psi' u_2' = f.$$

Ricordando che abbiamo richiesto che valga anche (120) abbiamo

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi' u_1 + \psi' u_2 = 0, \\ \varphi' u_1' + \psi' u_2' = f \end{array}\right. ,$$

da cui, applicando la regola di Cramer, si ha (ricordiamo che $W\left[u_1, u_2\right]$ è diverso da zero in tutti i punti di J, perché u_1, u_2 soluzioni linearmente indipendenti)

$$\varphi' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ f & u_2' \end{pmatrix}}{W\left[u_1, u_2\right]} = -\frac{f u_2}{W\left[u_1, u_2\right]} \tag{123}$$

e

$$\psi' = \frac{\det\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ u_1' & f \end{pmatrix}}{W\left[u_1, u_2\right]} = \frac{f u_1}{W\left[u_1, u_2\right]}. \tag{124}$$

ESEMPIO

Mostriamo come si possono ritrovare le formule (90), (91), (92) del paragrafo 4 con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Qui ci limitiamo al caso dell'equazione

$$u'' + \omega^2 u = f, \tag{125}$$

con $\omega > 0$ e $f \in C^0\left(J\right)$. Il lettore si occupi degli altri casi. Poiché due soluzioni linearmente independenti dell'equazione omogenea associata

$$u'' + \omega^2 u = 0$$

sono date da $\cos\omega x, \sin\omega x$, possiamo trovare una soluzione di (125)

$$v\left(x\right) = \varphi\left(x\right)\cos\omega x + \psi\left(x\right)\sin\omega x$$

utilizzando le formule (123), (124).

Abbiamo

$$W\left[\cos\omega x,\sin\omega x\right]=\det\begin{pmatrix}\cos\omega x & \sin\omega x\\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x\end{pmatrix}=\omega.$$

Quindi da (123) abbiamo

$$\varphi'\left(x\right)=-\frac{f\left(x\right)\sin\omega x}{\omega},$$

da cui, fissato $x_0\in J$ abbiamo

$$\varphi\left(x\right)=-\int_{x_0}^{x}\frac{f\left(t\right)\sin\omega t}{\omega}dt$$

e, analogamente, utilizzando (124), abbiamo

$$\psi\left(x\right)=\int_{x_0}^{x}\frac{f\left(t\right)\cos\omega t}{\omega}dt.$$

Pertanto

$$v\left(x\right)=-\cos\omega x\int_{x_0}^{x}\frac{f\left(t\right)\sin\omega t}{\omega}dt+\sin\omega x\int_{x_0}^{x}\frac{f\left(t\right)\cos\omega t}{\omega}dt=$$

$$=\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\left(-\cos\omega x\sin\omega t+\sin\omega x\cos\omega t\right)f\left(t\right)dt=\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\left(\sin\omega\left(x-t\right)\right)f\left(t\right)dt.$$

Perciò, tutte le soluzioni di (125) sono date da

$$C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x+\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\left(\sin\omega\left(x-t\right)\right)f\left(t\right)dt,$$

dove C_1,C_2 sono costanti arbitrarie.

QUADRO RIASSUNTIVO FINALE E METODI AD HOC

i) EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

i-a) EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Siano a e f due funzioni continue nell'intervallo J. Consideriamo equazione nell'incognita $u \in C^1(J)$

$$u'(x) = a(x)\,u(x) + f(x)\,, \quad \text{per ogni } x \in J. \tag{126}$$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$. Tutte le soluzioni di (126)

$$u(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} f(x)\,dx, \quad \text{in } J. \tag{127}$$

In particolare se $f \equiv 0$, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$u' = a(x)\,u, \quad \text{in } J$$

sono date da

$$u(x) = Ce^{A(x)}\ , \quad x \in J$$

dove C è una costante arbitraria.

La formula (127) si può anche scrivere

$$u(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int_{x_0}^{x} f(t) \exp\left\{\int_t^x a(s)\,ds\right\} dt, \quad x \in J,$$

dove C è una costante arbitraria e $x_0 \in J$

i-b) EQUAZIONI DEL DEL TIPO $u' = f(u)$

PROPOSIZIONE 1

Sia J_0 un intervallo aperto e sia $f \in C^0(J_0)$ tale che $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in J_0$. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\eta_0 \in J_0$ e sia $\Phi : J_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi(q) = \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \quad q \in J_0.$$

Allora Φ è strettamente monotona, $\Phi \in C^1(J_0)$ e, posto $I_0 = x_0 + \Phi(J_0)$ (I_0 è un intervallo), si ha che la funzione $u : I_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = \Phi^{-1}(x - x_0)\,, \quad \text{per } x \in I_0$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u)\,, \text{ in } I_0 \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}.$$

i-c) EQUAZIONI DEL DEL TIPO $u' = h(x) f(u)$

PROPOSIZIONE 2

Siano J, J_0 intervalli aperti e siano $h \in C^0(J)$ $f \in C^0(J_0)$ con f tale che $f(q) \neq 0$ per ogni $q \in J_0$. Siano $x_0 \in J$ e $\eta_0 \in J_0$ e $\Phi : J_0 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi(q) = \int_{\eta_0}^{q} \frac{d\eta}{f(\eta)}, \quad q \in J_0.$$

Allora Φ è strettamente monotona, $\Phi \in C^1(J_0)$. Inoltre, per un opportuno intervallo I contenente x_0, risulta che la funzione

$$u(x) = \Phi^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} h(t)\, dt\right),$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = h(x) f(u), \text{ in } I \\ u(x_0) = \eta_0 \end{cases}.$$

i-d) EQUAZIONE DI BERNOULLI

Siano J un intervallo, $a, b \in C^0(J)$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Un'equazione di Bernoulli è un'equazione differenziale del tipo

$$u' = a(x) u + b(x) u^{\alpha}. \tag{128}$$

Le equazioni del tipo (128) si possono trattare mediante la sostituzione

$$v = u^{1-\alpha}.$$

Infatti osserviamo che la (128) si può scrivere

$$\frac{1}{1-\alpha} v' = a(x) v + b(x)$$

che è un'equazione lineare.

ii) EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

TEOREMA

Sia $f \in C^0(J)$ con J intervallo e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione

$$u'' + au' + bu = f(x), \quad \text{in } J. \tag{129}$$

Poniamo

$$P(\xi) = \xi^2 + a\xi + b$$

e $\Delta = a^2 - 4b$. Siano ξ_1, ξ_2 le due radici reali o complesse coniugate di

$$P(\xi) = 0. \tag{130}$$

Sia $x_0 \in J$.
(a) Se $\Delta > 0$, allora tutte le soluzioni di (129) sono date da

$$u(x) = C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{\xi_1 (x-t)} - e^{\xi_2 (x-t)}}{\xi_1 - \xi_2} \right) f(t) dt, \tag{131}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.
(b) Se $\Delta = 0$, allora tutte le soluzioni della (129) sono date da

$$u(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\xi_1 x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, e^{\xi_1 (x-t)} f(t) dt, \tag{132}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.
(c) Se $\Delta < 0$, siano $\xi_1 = \alpha + i\beta$, $\xi_2 = \alpha - i\beta$ le radici complesse coniugate di (130), allora tutte le soluzioni della (129) sono date da

$$u(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x} + \frac{1}{\beta} \int_{x_0}^{x} \left(e^{\alpha (x-t)} \sin \beta (x-t) \right) f(t) dt, \tag{133}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(**N.B. In particolare** se $f \equiv 0$ allora tutte le soluzioni di $u'' + au' + bu = 0$ sono date da:

Nel caso (a), $C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x}$; nel caso (b), $(C_1 + C_2 x)\, e^{\xi_1 x}$; nel caso (c), $(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x}$, con C_1 e C_2 costanti arbitrarie reali).

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: Se u_1, u_2 sono soluzioni, rispettivamente di $u'' + au' + bu = f_1(x)$ e di $u'' + au' + bu = f_2(x)$ e λ_1, λ_2 sono due numeri allora $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ è soluzione di $u'' + au' + bu = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

METODI AD HOC

1) Supponiamo che $f(x) = p_m(x)$ con p_m **polinomio di grado** m. Se 0 è una radice di molteplicità s dell'equazione $P(\xi) = 0$ allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = p_m(x)$$

del tipo $\widetilde{u} = x^s Q_m(x)$ dove $Q_m(x)$ è un polinomio di grado m. **N.B.** se $b \neq 0$ allora $s = 0$; se $b = 0$ e $a \neq 0$ allora $s = 1$; se $b = 0$ e $a = 0$ allora $s = 2$.

2) Supponiamo che $f(x) = e^{\gamma x} p_m(x)$ con p_m **polinomio di grado** m **e** $\gamma \in \mathbb{R}$. Se γ è soluzione di $P(\xi) = 0$ di molteplicità s allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = e^{\gamma x} p_m(x)$$

del tipo $\widetilde{u} = e^{\gamma x} x^s Q_m(x)$ dove $Q_m(x)$ è un polinomio di grado m.

N.B. Se γ **non è** soluzione di $P(\xi) = 0$ allora $s = 0$; se γ **è** soluzione di $P(\xi) = 0$ ma $\Delta \neq 0$, allora $s = 1$; se γ **è** soluzione di $P(\xi) = 0$, ma $\Delta = 0$, allora $s = 2$.

3) Supponiamo che $f(x) = p_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$ oppure $f(x) = p_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$ con p_m **polinomio di grado** m **e** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq 0$. Se $\alpha + i\beta$ è soluzione di $P(\xi) = 0$ di molteplicità s allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = p_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$$

oppure di

$$u'' + au' + bu = p_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

del tipo $\widetilde{u} = x^s e^{\alpha x} (Q_m(x) \cos \beta x + Q_m^*(x) \sin \beta x)$ dove $Q_m(x)$ e $Q_m^*(x)$ sono polinomi di grado m.

N.B. Se $\alpha + i\beta$ **non è** soluzione di $P(\xi) = 0$ allora $s = 0$; se $\alpha + i\beta$ **è** soluzione di $P(\xi) = 0$, allora $s = 1$.