

### Homework 3 - Algebra Lineare e geometria analitica

(Prof.ssa D. Bubboloni)

Assegnato 2 Dicembre 2018 - consegna giovedì 6 Dicembre 2017.

1. Si consideri il determinante della matrice

$$A_b = \begin{pmatrix} -b & 0 & 3 \\ 2 & 1 & b+2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare di  $b \in \mathbb{Q}$ . Si dica:

- i) per quali  $b$  esiste  $A_b^{-1}$  e si dica quanto vale  $\det A^{-1}$ ;
- ii) per quali  $b$  si ha  $\text{rank} A_b = 2$ ;
- iii) per quali  $b$  il sistema  $AX = [-1, 3, 4]^T$  ammette soluzione unica;
- iv) per quali  $b$  il sistema  $AX = [0, 0, 0]^T$  ammette soluzione unica.

2. Discutere il seguente sistema sfruttando il teorema di Rouchè-Capelli e la teoria del determinante

$$\begin{cases} x - by = 3 \\ bx - y = b + 4 \\ x - y = b \end{cases}$$

*Suggerimento: si inizi calcolando il determinante della matrice completa del sistema.*

3. Discutere al variare di  $a \in \mathbb{R}$  il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y - az = a \\ 2x + y - z = a \\ ax - 3y - z = a \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di  $a$  per cui il sistema è omogeneo e in tal caso esplicitarne le soluzioni.

4. Data la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$f[x, y]^T = \begin{pmatrix} 2x & +3y \\ -x & +y \\ & -2y \end{pmatrix}$$

dire se è lineare. In caso affermativo trovarne nucleo e immagine. Dire se  $f$  è biunivoca.

5. Data la funzione  $D : \mathbb{R}^{(3)}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{(3)}[x]$  definita da  $D(p(x)) = p''(x)$ , provare che è lineare e trovarne nucleo e immagine.

6. Dire sotto quale condizione su  $b \in \mathbb{Q}$  i seguenti vettori di  $\mathbb{Q}^4$ ,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b+1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

formano una base di  $\mathbb{Q}^4$ .

7. Dire perché  $\mathbb{R}^3$  non è un campo.

8. Dire perché le funzioni seguenti non sono lineari.

i) la funzione valore assoluto da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ ;

ii)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$f[x, y]^T = \begin{pmatrix} 2x & +3y - 4 \\ -x & +y + 6 \end{pmatrix}$$

iii) La funzione  $g : \mathbb{R}^{(3)}[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(p(x)) = p(1)$

8. Dire se è lineare la funzione  $u : \mathbb{R}^{(2)}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{(4)}[x]$  definita da  $u(p(x)) = xp(x)$ .